Compito per l'appello straordinario di Meccanica Analitica e Relativistica del 7 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana. In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G, massa M e raggio R. Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB, rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = \frac{R}{2}$ dall'estremo A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy, passante per C, ed è soggetto alle due forze attive $\underline{F}_{\rm a} = -K\,{\rm H_aA}$ e $\underline{F}_{\rm b} = -K\,{\rm H_bB}$, con $K > 0$, dove $\rm H_a$ è la proiezione ortogonale di A sulla retta $x = -\gamma$ e $\rm H_b$ è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{\gamma}{R} \in (0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\gamma = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \left(M + \frac{m}{3}\right) R^2$.

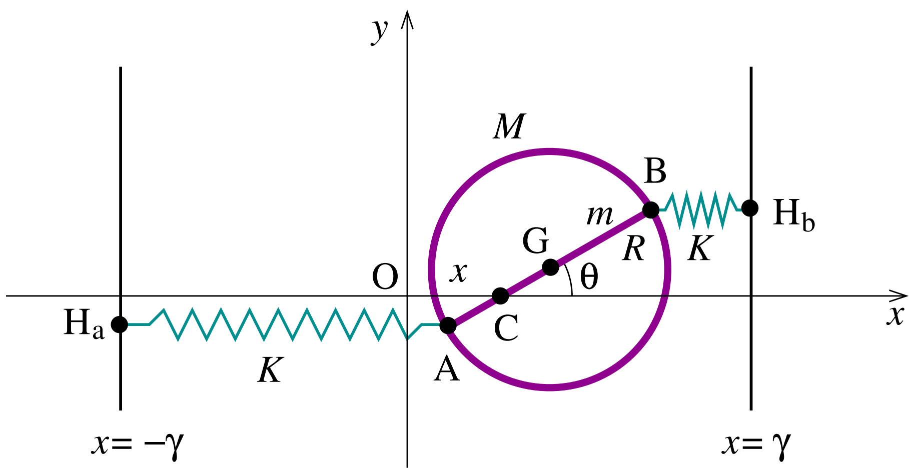

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. È assegnata la trasformazione

$$Q = \frac{1}{\alpha^{1/5}}\, p^{1/5} q^{-3/5}, \qquad\qquad P = -\frac{5}{\alpha^{4/5}}\, p^{\alpha/5} q^{2\alpha/5},$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dove α è un parametro reale.
1. Si determini per quale valore di α la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tale valore di α, si determini la funzione generatrice $F_1(q, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Meccanica Relativistica. Una particella di massa a riposo m si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa, a cui corrisponde l'energia potenziale $U(x) = Ax^6$, dove A è una costante dimensionale.
1. Si scriva l'equazione del moto relativistica per la particella assegnata.
2. Assumendo che la particella transiti per l'origine $x = 0$ con velocità v_0, di determini il valore x_{max} della massima ascissa da essa raggiunta.

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

1. Si ha $x_{\rm G} = x + \frac{R}{2}\cos\theta$, $y_{\rm G} = \frac{R}{2}\sin\theta$, $x_{\rm A} = x - \frac{R}{2}\cos\theta$, $x_{\rm B} = x + \frac{3R}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[(M+m)\,\dot{x}^2 + \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2\,\dot{\theta}^2 - (M+m)R\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_{\rm A} - x_{\rm H_a})^2 + (x_{\rm B} - x_{\rm H_b})^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x - \frac{R}{2}\cos\theta + \gamma\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(x + \frac{3R}{2}\cos\theta - \gamma\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(2x + R\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = \frac{KR}{2}\sin\theta\left(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\frac{R}{2}\cos\theta, \qquad (2x + 5R\cos\theta - 4\gamma)\sin\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = -\frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{\gamma}{R}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = -\frac{\gamma}{2}$. Poiché la traccia assegna $\gamma > 0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = 2K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{KR}{2}\left[(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta)\cos\theta + 5R\sin^2\theta\right], \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $4K^2R(\gamma - R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{\gamma}{R} > 1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-4K^2R(\gamma + R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{\gamma}{R} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$.
Riassumendo, per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{\gamma}{R} > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M + m = 4, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2 = \frac{13}{3}, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{R}{2}(M+m)\sin\theta = -2\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{5}{2}KR^2\sin^2\theta = \frac{5}{2}\sin^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KR\sin\theta = -\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2 - 4\,\omega^2\right)\left(\frac{5}{2}\sin^2\theta - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \left(1 - 2\,\omega^2\right)^2\sin^2\theta = 0,$$

dove $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{\gamma^2}{R^2} = \frac{5}{9}$ nelle posizioni di equilibrio 3,4. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$34\,\omega^4 - 27\,\omega^2 + 5 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{27\pm 7}{68} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{5}{17}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$ e $\omega_- = \sqrt{\frac{5}{17}} \approx 0.542$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

1. La parentesi di Poisson canonica vale

$$[Q,P]_{q,p} = q^{(2\alpha-8)/5}p^{(\alpha-4)/5}$$

e imponendo che assuma il valore canonico si trova $\alpha = 4$.
2. Invertendo la trasformazione, in corrispondenza del valore di α ricavato al punto precedente, si trova

$$p = 4\,q^3Q^5, \qquad P = -5\,q^4Q^4.$$

Allora

$$F_1(q,Q) = \int_{0,0}^{q,Q} p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q = q^4Q^5,$$

dove il valore dell'integrale non dipende dal cammino scelto per andare dal punto iniziale al punto finale.

Esercizio 1: Meccanica Relativistica.

1. Indicando con $v = \dot{x}$ la velocità della particella lungo l'asse x, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = -6Ax^5.$$

2. Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + Ax^6 = \text{costante} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}} = mc^2 + Ax_{max}^6.$$

Quindi

$$x_{max} = \left[\frac{mc^2}{A}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}-1\right)\right]^{1/6}.$$