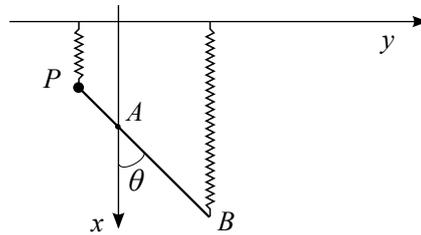


Corso di Meccanica Analitica e Relativistica
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti e L. Gualtieri
Prova in itinere del 02.11.2021



Es. 1

Es. 1

Una sbarra di lunghezza $4a$, densità uniforme e massa M , può muoversi nel piano verticale con il punto A posto ad una distanza a da un estremo della sbarra vincolato a muoversi lungo l'asse x , diretto verticalmente ed orientato verso il basso, di un sistema di riferimento Oxy . All'estremità della sbarra più vicina al punto A è attaccata rigidamente una pallina P di dimensioni trascurabili e massa m . Entrambe le estremità della sbarra sono attaccate all'asse orizzontale y mediante due molle identiche di costante elastica k , massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla. Le molle sono sempre parallele all'asse x . Tutto il sistema è soggetto alla forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate la posizione x del punto A e l'angolo θ che la sbarra forma con la direzione positiva dell'asse x , ed orientato in senso antiorario, si chiede

1. La Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{4ka}$.
3. Fissati i valori $a = 1$, $k = 1$, $g = 1$, $M = 5$ ed $m = 5$, e scelta una configurazione di equilibrio stabile, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni.

• **Risposte**

1) L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) + \frac{M}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2,$$

con $I = 4Ma^2/3$ momento d'inerzia della sbarra rispetto al centro di massa. Sostituendo

$$\begin{cases} x_P = x - a \cos \theta \\ y_P = -a \sin \theta \end{cases}; \quad \begin{cases} x_G = x + a \cos \theta \\ y_G = a \sin \theta \end{cases}$$

si ha:

$$T = \frac{1}{2}[(m + M)\dot{x}^2 + (m + 7M/3)a^2\dot{\theta}^2 + 2a(m - M)\sin \theta \dot{x}\dot{\theta}].$$

L'energia potenziale del sistema è

$$\begin{aligned} V &= -Mgx_G - mgx_P + \frac{k}{2}x_P^2 + \frac{k}{2}x_B^2 \\ &= -Mg(x + a \cos \theta) - mg(x - a \cos \theta) + \frac{k}{2}(x - a \cos \theta)^2 + \frac{k}{2}(x + 3a \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è quindi data da

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}[(m + M)\dot{x}^2 + (m + 7M/3)a^2\dot{\theta}^2 + 2a(m - M)\sin \theta \dot{x}\dot{\theta}] \\ &\quad + (m + M)gx + (M - m)ga \cos \theta - \frac{k}{2}(x - a \cos \theta)^2 - \frac{k}{2}(x + 3a \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

Utilizzando questa espressione otteniamo le equazioni del moto:

$$(M + m)\ddot{x} - (M - m)a \sin \theta \ddot{\theta} - (M - m)a \cos \theta \dot{\theta}^2 = (m + M)g - 2k(x + a \cos \theta).$$

e

$$(m + 7M/3)a^2\ddot{\theta} - (M - m)a \sin \theta \ddot{x} = -[(M - m)g - 2k(x + 5a \cos \theta)]a \sin \theta.$$

2) Dal punto precedente si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}V &= -(m + M)g + 2k(x + a \cos \theta) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}V &= [(M - m)g - 2k(x + 5a \cos \theta)]a \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{(m + M)g}{2k} - a \cos \theta, \quad \text{con } \theta = 0, \pi \text{ e } \cos \theta = -\frac{mg}{4ka}.$$

L'ultima soluzione esiste se e solo se $\lambda = \frac{mg}{4ka} \leq 1$. Per determinare la stabilità di questi punti stazionari consideriamo gli autovalori dell'Hessiano del potenziale:

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$$

• Per $\theta = 0$ si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & -2a(mg + 4ka) \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = 2k > 0$$

$$\lambda_2 = -2a(mg + 4ka) < 0$$

ed il punto stazionario è di equilibrio instabile.

- Per $\theta = \pi$ (o $\theta = -\pi$) si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2a(mg - 4ka) \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = 2k > 0$$

$$\lambda_2 = 2a(mg - 4ka)$$

ed il punto stazionario è di equilibrio stabile se $\lambda = \frac{mg}{4ka} > 1$, ovvero instabile se $\lambda = \frac{mg}{4ka} < 1$.

- Per $\cos \theta = -\frac{mg}{4ka}$ con $\lambda = \frac{mg}{4ka} < 1$ si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2k & -2k \sin \theta \\ -2k \sin \theta & 10k \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

la cui traccia e determinate sono

$$\text{Tr } V_{hk} = 2k + 10k \sin^2 \theta > 0$$

$$\text{Det } V_{hk} = 16k^2 \sin^2 \theta > 0.$$

Gli autovalori sono entrambi positivi ed il punto stazionario uno stato di equilibrio stabile. Vi sono due di questi punti e rappresentano configurazioni simmetriche rispetto all'asse x .

- 3) Con i valori dati $r = mg/4ka = 5/4 > 1$ per cui la configurazione di equilibrio stabile è data $\theta = \pi$ (ovvero $\theta = -\pi$). Per questo punto si ha

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dall'espressione dell'energia cinetica ottenuta al punto 1) segue

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + M & a(m - M) \sin \theta \\ a(m - M) \sin \theta & (m + 7M/3)a^2 \end{bmatrix}$$

che per $\theta = \pi$ ed i valori numerici dati si riduce a

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50/3 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza

$$V_{hk} - \omega^2 T_{hk} = \begin{bmatrix} 2(1 - 5\omega^2) & 0 \\ 0 & 2(1 - 25\omega^2/3) \end{bmatrix},$$

per cui le due frequenze sono

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{25}}.$$