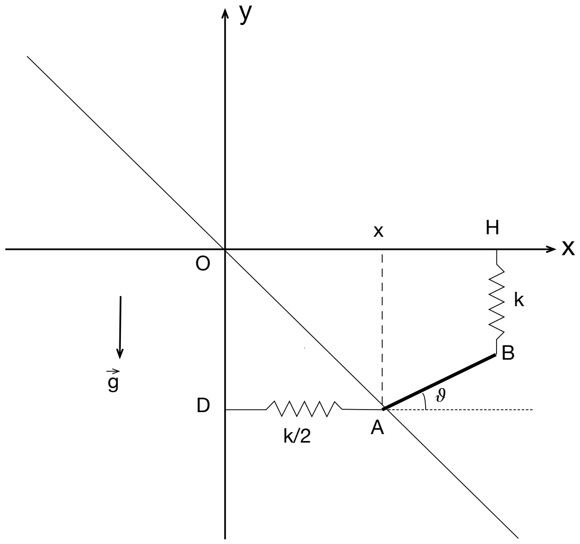
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 gennaio 2022
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana [15 punti]. In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, con y verticale ascendente. In tale piano si muove un'asta omogenea AB di massa M e lunghezza ℓ, il cui estremo A è vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea posta lungo la bisettrice del secondo e quarto quadrante (si veda la figura). L'asta è soggetta alle forze elastiche $\underline{F}_1 = -\frac{k}{2}\underline{DA}$, $\underline{F}_2 = -k\underline{HB}$, con $k > 0$, D proiezione di A sull'asse y ed H proiezione di B sull'asse x.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x dell'estremo A e l'angolo θ tra l'asta e la parallela all'asse x passante per A.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare del parametro adimensionale $\lambda \equiv \frac{Mg}{k\ell}$.
3. Ponendo ora, $g = 1$, $M = 3$, $k = 1$, $\ell = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \frac{1}{12}M\ell^2$.



2. Trasformazioni canoniche [5 punti]. Si consideri la trasformazione

$$Q = q^\alpha \big[p + \beta \cos(qt)\big],$$
$$p = e^P + \cos(qt),$$

dalle variabili canoniche q, p, t alle variabili Q, P, t, con α, β parametri reali.

1. Deterninare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P, t)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica [5 punti]. Due astronavi A_1 e A_2 partono dalla Terra all'istante $t = 0$ muovendosi nella stessa direzione con versi opposti con velocità in modulo rispettivamente $v_1 = c/2$ e $v_2 = c/3$ in un sistema solidale alla Terra. Gli orologi delle due astronavi vengono sincronizzati con quello sulla Terra alla partenza. Quando l'orologio sull'astronave A_1 segna il tempo $\tau_B = 1$y, essa emette un segnale luminoso verso l'altra astronave (evento B). Si determini il tempo τ_D segnato dall'orologio di A_2 quando il segnale viene ricevuto (evento D).

4. Urti relativistici [5 punti]. Due particelle relativistiche di massa propria M si muovono lungo l'asse x di un sistema di riferimento $R = \{Oxyz\}$ con velocità, rispettivamente $\vec{v}_1 = (1/4, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (-1/4, 0, 0)$, in unità $c = 1$. Dall'urto delle due particelle nascono due particelle, la prima con massa propria m e velocità $\vec{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 0, 0)$, la seconda con massa propria $2m$ e velocità $\vec{u}_2$. Determinare la velocità $\vec{u}_2$ della seconda particella e la massa m.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
La lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{M}{2}\left(2\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell(\sin\theta + \cos\theta)\dot{x}\dot{\theta}\right) - Mg\left(-x + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 + \ell^2\sin^2\theta - 2x\ell\sin\theta\right).$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = \pi/2$, $x = \frac{2}{3}\ell(1+\lambda)$, stabile per $\lambda > 2$.
2. $\theta = 3\pi/2$, $x = \frac{2}{3}\ell(-1+\lambda)$, instabile.
3. $\theta = \pm\arcsin\frac{\lambda}{2}$, $x = \ell\lambda$, esiste ed è diversa dalle percedenti per $-2 < \lambda < 2$. Per questi valori di λ è sempre stabile.

La posizione di equilibrio stabile con i dati forniti è la prima, e le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzati dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{10}}{15}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{10}}{15}}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = 1$, $\beta = -1$.
2. La funzione generatrice è $F_2(q, P, t) = qe^P + \frac{1}{t}\sin(qt) + g(t)$ con $g(t)$ funzione qualsiasi.

3. Cinematica relativistica.
Il tempo misurato dall'orologio di A_2 alla ricezione del segnale è

$$\tau_D = \frac{1}{\gamma_2}\frac{c+v_1}{c-v_2}\gamma_1\tau_B = \sqrt{6}\mathrm{y}\,.$$

4. Urti relativistici.
La velocità è

$$\vec{u}_2 = (-1/3, 0, 0),$$

e la massa è data da

$$m = \frac{2\gamma M}{\gamma_1 + 2\gamma_2} = \frac{8\sqrt{2}M}{3\sqrt{5}(1+\sqrt{3})}\,.$$