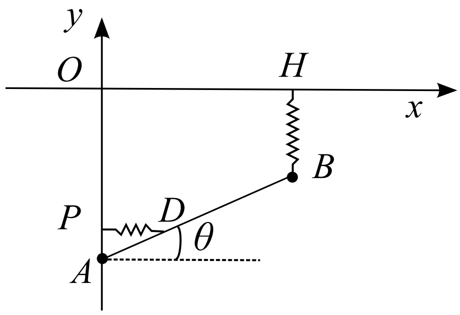
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 maggio 2022
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana. In un piano verticale è scelto un sistema di riferimenti di assi cartesiani ortogonali Oxy di origine O e con l'asse y orientato verso l'alto. In tale piano si muove un'asta rigida di lunghezza a e massa trascurabile il cui l'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse y. Il punto D di tale asta, posto ad una distanza $a/4$ dall'estremo A, è soggetto ad un a forza repulsiva $\vec{F}_D = k\,\overrightarrow{PD}$ parallela all'asse x mentre l'estremo B è soggetto ad una forza attrattiva $\vec{F}_B = -k\,\overrightarrow{HB}$ parallela all'asse y. All'estremo B della sbarra è fissata una massa m mentre all'estremo A una massa $2m$. Il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Prendendo come coordinate lagrangiane la coordinata y del punto A e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità, in funzione del parametro $\lambda = mg/ka$.
3. Fissato $\lambda = 1$ e scelta una posizione di equilibrio, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche. Si consideri la trasformazione

$$Q = 4p^3 q^\beta,$$
$$P = \alpha \frac{\sqrt{q}}{p^2},$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice $F_4(p, P)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato i loro orologi, due astronavi partono dalla Terra nello stesso istante (tempo 0), movendosi lungo l'asse x. La prima si muove con velocità $c/3$ per un tempo t (misurato nel sistema della Terra), poi si ferma. La seconda si muove con velocità $c/4$.

1. Quanto tempo è trascorso sulla prima astronave nel momento in cui si incontrano?
2. Quanto tempo è trascorso sulla seconda astronave nel momento in cui si incontrano?

4. Trasformazioni di Lorentz. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Indicare se esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi

$$E_1 = (2, 0, 0, 2) \quad E_2 = (5, \cos\beta, \sin\beta, 2) \quad (\beta = \pi/6)$$

avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
La lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left(3\dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\cos\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right) - 3mgy - mga\sin\theta + \frac{ka^2}{32}\cos^2\theta - \frac{k}{2}\left(y + a\sin\theta\right)^2 .$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = \pi/2$, $y = -a(1+3\lambda)$, stabile se $\lambda > 1/32$.
2. $\theta = -\pi/2$, $y = a(1-3\lambda)$, instabile.
3. $\sin\theta = \lambda/32$, $y = -35\lambda a$, esiste solo per $\lambda < 1/32$. Questi sono sue punti simmetrici rispetto all'asse y e sono stabili quando esistono.

La posizione di equilibrio stabile per $\lambda = 1$ è la prima: $\theta = \pi/2$ e $y = -4a$. Le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzati dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1^2 = \frac{1}{3}\frac{k}{m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{31}{16}\frac{k}{m}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = -\frac{1}{10}$, $\beta = \frac{1}{2}$.
2. Una funzione generatrice è $F_4(p, P) = -20p^5P^2$.

3. Cinematica relativistica.

1. $\tau_1 = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{3}\right)t = \frac{2\sqrt{2}+1}{3}t$
2. $\tau_2 = \frac{1}{\gamma_2}\frac{4}{3}t = \sqrt{\frac{5}{3}}t$

4. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra i due eventi, nel riferimento (ct, x, y, z), è

$$E_2E_1 = (3, \cos\beta, \sin\beta, 0)\,,$$

quindi $|E_2E_1|^2 = 8 > 0$: l'intervallo è di tipo tempo, ed esiste un riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione.

La trasformazione è la composizione

$$(ct, x, y, z) \to (ct', x', y', z') \to (ct'', x'', y'', z'')$$

dove la prima è una rotazione nel piano $x - y$ di un angolo $\beta = \pi/6$; nel riferimento (ct', x', y', z') la separazione tra i due eventi è

$$E_2E_1 = (3, 1, 0, 0)\,.$$

La seconda è un boost lungo l'asse x' con velocità v, tale che

$$\Delta x'' = \Delta x' - \frac{v}{c}\Delta t' = 1 - 3\frac{v}{c} = 0$$

quindi

$$v = \frac{1}{3}c\,.$$