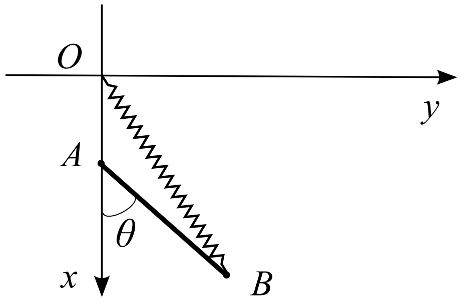
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 17 giugno 2022

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana. In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxy di origine O e con l'asse x orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa M. L'estremo A dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x, mentre all'estremo B è applicata una forza $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OB}$. Il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Prendendo come coordinate Lagrangiane la coordinata x del punto A e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità, in funzione del parametro $\lambda = Mg/k\ell$.
3. Fissato $\lambda > 2$ e scelta una posizione di equilibrio, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche. Si consideri la trasformazione

$$Q = \frac{1}{q}(p-q)^{\alpha},$$
$$P = -\frac{2}{3}q^{\beta}(p-q)^{1/2},$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi di bordo, due astronavi partono dalla Terra nello stesso istante (tempo 0), muovendosi la prima lungo l'asse x con velocità $c/2$ e la seconda lungo l'asse y con velocità $c/3$ di un sistema di riferimento solidale con la terra. Trascorso un tempo t_0 misurato nel sistema di riferimento di ciascuna astronave, le astronavi invertono il moto e tornano sulla terra.

1. Quale astronave torna prima sulla terra?
2. Quanto tempo passa, misurato nel sistema di riferimento solidale con la terra, tra l'arrivo della prima e della seconda astronave?
3. Che tempo segna l'orologio di bordo di ciascuna astronave al rientro sulla terra?

4. Trasformazioni di Lorentz. In un sistema di riferimento inerziale di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z) sono dati due eventi

$$E_1 = (\sinh a, 0, 0, 5), \qquad E_2 = (0, \cosh a, b, 5)$$

dove a è un parametro fissato. Determinare per quali valori del parametro b esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei. Per tali valori di b, si determini la trasformazione di coordinate tra il sistema di riferimento originale ed uno in moto rispetto ad esso lungo l'asse x tale che gli eventi siano contemporanei e calcolare la separazione E_2E_1 in tale riferimento.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
La Lagrangiana del sistema è

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right) + Mg\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) - \frac{k}{2}(x^2 + 2\ell x\cos\theta + \ell^2) \\
&= \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right) - \frac{k}{2}x^2 + Mgx - k\ell\left(x - \frac{\lambda}{2}\ell\right)\cos\theta - \frac{k\ell^2}{2},
\end{aligned}
$$

con $\lambda = Mg/k\ell$. Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = 0$, $x = (\lambda - 1)\ell$, stabile se $\lambda < 2$.
2. $\theta = \pm\pi$, $x = (\lambda + 1)\ell$, stabile.
3. $\cos\theta = \lambda/2$, $x = \lambda\ell/2$, esiste solo per $\lambda < 2$. Questi sono sue punti simmetrici rispetto all'asse x e sono instabili quando esistono.

La posizione di equilibrio stabile per $\lambda > 2$ è : $\theta = \pi$ e $x = (\lambda + 1)\ell)$. $\theta = -\pi$ è coincidente con questa. Le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzate dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1^2 = \frac{k}{M}, \qquad \omega_2^2 = 3\,(1 + \lambda/2)\,\frac{k}{M}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$.
2. Una funzione generatrice è $F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2 - \frac{3}{4}q^{-3}P^2 + \text{const.}$.

3. Cinematica relativistica.

1. Arriva prima l'astronave partita lungo l'asse y.
2. L'astronave partita lungo l'asse x ritorna sulla terra con un ritardo di $t_x - t_y = \frac{4t_0}{\sqrt{3}} - \frac{3t_0}{\sqrt{2}} \simeq 0.19t_0$.
3. All'arrivo sulla terra entrambi gli orologi di bordo segnano un tempo pari a $2t_0$.

4. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra i due eventi, nel riferimento $R : (t, x, y, z)$ (con $c = 1$), è

$$E_2E_1 = (-\sinh a, \cosh a, b, 0)\,,$$

quindi $|E_2E_1|^2 = -(1 + b^2) < 0$: l'intervallo è di tipo spazio per ogni valore di b ed esistono riferimenti R' in moto rispetto al riferimento R in cui i due eventi avvengono allo stesso istante..

In particolare questo avviene nel sistema di riferimento R' in moto lungo l'asse x di R con velocità

$$\beta = -\tanh a$$

in cui la separazione vale

$$E_2E_1 = (0, 1, b, 0)\,.$$