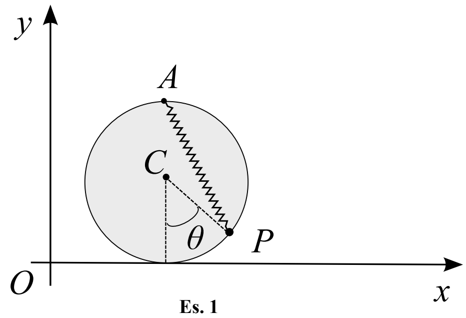
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 12 luglio 2022
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana. Un disco di massa M e raggio R può traslare orizzontalmente, ma non ruotare, in un piano verticale. Sul bordo del disco è fissata una guida in cui può scorrere senza attrito una pallina P di massa m e dimensioni trascurabili. La pallina è soggetta alla forza di gravità con accelerazione di gravità g ed ad una forza elastica di richiamo $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{AP}$ verso il punto più alto A della guida, si veda la figura. Si scelga un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxy con origine O, asse x orientato verso destra e asse y orientato verso l'alto come in figura.

Utilizzando il formalismo Lagrangiano con coordinate Lagrangiane la coordinata x del centro C del disco e l'angolo θ, misurato rispetto ad una retta verticale passante per il centro del disco, che individua la posizione della pallina sulla guida, come in figura, si chiede:

1. Le equazioni del moto del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità;
3. Fissato $kR > mg$ e scelta una posizione di equilibrio, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche. Si consideri la trasformazione

$$p = (q-t)^2 - (q-t)^\alpha QP,$$
$$Q = (q-t)^\beta \ln \frac{P}{q-t},$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice $F(q, Q, t)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica. Un'astronave parte dalla Terra (evento A) con velocità $c/4$. Trascorso $T = 1$ anno (misurato da un orologio sull'astronave), viene inviato un segnale elettromagnetico dall'astronave verso Terra; appena il segnale viene ricevuto, una seconda astronave, inizialmente in quiete a Terra, inizia a muoversi con velocità $c/3$ nella stessa direzione della prima, e la raggiunge nell'evento B.

1. Qual è la distanza spaziale tra gli eventi A e B, misurata in un riferimento solidale a Terra?
2. Quanto tempo è trascorso tra gli eventi A e B, misurato da un orologio sulla prima astronave, e misurato da un orologio sulla seconda astronave?

4. Trasformazioni di Lorentz. In un sistema di riferimento inerziale di coordinate spazio-temporale $R : (ct, x, y, z)$ sono dati due eventi

$$E_1 = (2a, a, 1, 0), \qquad E_2 = (-a, 0, 0, 2a)$$

in termini di un parametro a. Determinare per quali valori del parametro a esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei. Si chiede inoltre per quali valori del parametro a esiste in sistema di riferimento inerziale R' con assi paralleli ad R ed in moto rispetto ad esso lungo l'asse y, in cui i due eventi sono simultanei.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
La variabile x è ciclica, ed la sua equazione del moto è:

$$\dot{x} = \frac{1}{m+M}\left[p_x - mR\cos\theta\,\dot{\theta}\right],$$

con p_x costante del moto. L'equazione per θ è:

$$\left[M + m\sin^2\theta\right]\ddot{\theta} + m\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = (m+M)\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right)\sin\theta.$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = 0$, stabile se $kR < mg$.
2. $\theta = \pm\pi$, stabile se $kR > mg$.

La posizione del centro del disco, variabile x, è indifferente.
Per $kR > mg$ la posizione di equilibrio stabile è $\theta = \pi$ (ovvero $\theta = -\pi$) e le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzate dalle pulsazioni proprie

$$\omega^2 = \frac{m+M}{M}\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right).$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = -1$, $\beta = -1$.
2. Una funzione generatrice è $F(q, Q, t) = \frac{1}{3}(q-t)^3 - e^{(q-t)Q} + \text{const.}$.

3. Cinematica relativistica. Rispetto alla Terra il segnale luminoso raggiunge Terra dopo tempo $t = \sqrt{\frac{5}{3}}T$ dall'evento A, mentre l'evento B avviene al tempo $t_B = 4\sqrt{\frac{5}{3}}T$.

1. La separazione spaziale tra gli eventi A e B è

$$x_B = \sqrt{\frac{5}{3}}\,cT\,.$$

2. I tempi misurati dai due orologi sulle astronavi per l'evento B sono

$$\tau_1 = 5T, \qquad \tau_2 = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{5}{3}}T \simeq 4.94T.$$

4. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra i due eventi, nel riferimento (ct, x, y, z), è

$$E_2E_1 = (-3a, -a, -1, 2a)\,,$$

quindi $|E_2E_1|^2 = 4a^2 - 1 < 0$: l'intervallo è di tipo spazio se $|a| < 1/2$.
Indicato con $\beta = v/c$ la velocità (in unità c) del sistema di riferimento R' rispetto ad R, la condizione affinchè gli eventi siano simultanei è $\beta = 3a$. Di conseguenza R' esiste se e solo se $|a| < 1/3$.