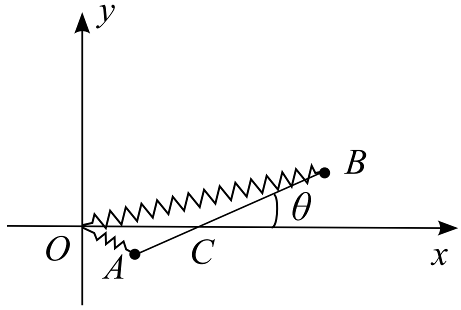
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 12 settembre 2022
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana. Due masse m identiche e puntiformi sono fissate ai due estremi A e B di una sbarra rigida di massa trascurabile e lunghezza a posta su un piano orizzontale. La sbarra può ruotare senza attrito intorno al punto C, posto ad $1/3$ della lunghezza della sbarra dall'estremo A, vincolato a muoversi lungo l'asse x di un sistema di riferimento Oxy, nel piano, vedi figura. Ciascuna massa è soggetta ad una forza di richiamo elastica verso l'origine O, rispettivamente: $\vec{F}_A = -k\,\overrightarrow{OA}$ e $\vec{F}_B = -k\,\overrightarrow{OB}$.

Utilizzando il formalismo Lagrangiano con coordinate Lagrangiane la coordinata x del punto C e l'angolo θ che la sbarra forma con l'asse x, misurato in senso positivo antiorario, si chiede:

1. Le equazioni del moto del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità;
3. Scelta una posizione di equilibrio stabile, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche. Si consideri la trasformazione

$$q = \left[\frac{e^{Q/\beta} - 1}{\cos p}\right]^{1/\alpha},$$
$$P = 2\,e^{Q}\,q^{\alpha}\,\sin p,$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica. Un'astronave parte dalla Terra con velocità $v = \beta c$. Raggiunta una stella distante 1 anno luce dalla terra, l'astronave torna indietro alla stessa velocità. Una volta tornata a terra, l'orologio dell'astronave mostra che sono passati $2\sqrt{15}$ anni.

1. Qual è il valore di β.
2. Quanto tempo è trascorso sulla terra tra la partenza dell'astronave e il suo ritorno?

4. Trasformazioni di Lorentz. In un sistema di riferimento inerziale R di coordinate spazio-temporali (ct, x, y, z) sono dati due eventi

$$E_1 = (a, 0, 0, 1), \qquad E_2 = (1, 0, b, 0)$$

in termini di due parametri a e b.

1. Posto $b = 0$, determinare per quali valori del parametro a gli eventi hanno separazione di tipo nullo.
2. Per ciascuno dei valori di a trovati al punto precedente, si ponga adesso $b = a$ e si determini se esiste un sistema di riferimento R' in cui i due eventi sono simultanei, e in caso esista determinare una trasformazione di Lorentz tra R ed R'.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.
La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\Big[2\dot{x}^2 + \frac{5}{9}a^2\dot{\theta}^2 - \frac{2}{3}a\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\Big] - \frac{k}{2}\Big[2x^2 + \frac{5}{9}a^2 + \frac{2}{3}a\cos\theta\,x\Big],$$

da cui si ottengono le equazioni del moto:

$$m\Big[2\ddot{x} - \frac{a}{3}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{a}{3}\cos\theta\,\dot{\theta}^2\Big] = -k\Big[2x + \frac{a}{3}\cos\theta\Big],$$

e

$$m\Big[\frac{5}{3}a\ddot{\theta} - \sin\theta\,\ddot{x}\Big] = k\sin\theta\,x.$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $x = 0$, $\theta = \pi/2$, Instabile.
2. $x = 0$, $\theta = -\pi/2$, Instabile.
3. $x = -a/6$, $\theta = 0$, Stabile.
4. $x = a/6$, $\theta = \pm\pi$, Stabile.

Le posizioni di equilibrio stabile 3. e 4. sono simmetriche per rotazione di π intorno al centro O della sbarra. In entrambi i casi otteniamo la frequenza delle piccole oscillazioni sono

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{10m}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$.
2. Una funzione generatrice è $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2\,\tan p + \text{const.}$.

3. Cinematica relativistica.
Sia $\bar{x} = 1$ anno luce la posizione della stella, che viene raggiunta (nel riferimento della terra) al tempo

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}}{v} = \frac{1}{\beta}\ \text{anni}\,.$$

Il tempo proprio dell'astronave quando raggiunge la stella, misurato in anni, è

$$\tau = \bar{t}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

ed è pari alla metà del tempo misurato sull'astronave al ritorno, $\tau = \sqrt{15}$. Quindi

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \sqrt{15} \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

quindi

$$v = \frac{c}{4}\,, \quad \bar{t} = 4\,\text{anni}$$

e il tempo trascorso sulla terra al ritorno è $t = 2\bar{t} = 8$ anni.

4. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra i due eventi, nel riferimento (ct, x, y, z), è $E_2E_1 = (1-a, 0, b, -1)$, e quindi $|E_2E_1|^2 = a^2 - 2a - b^2$.

1. Ponendo $b = 0$ e richiedendo $|E_2E_1|^2 = 0$ si trovano i valori $a = 0$, $a = 2$.
2. Nel caso $b = a = 0$ l'intervallo è di tipo nullo. Nel caso $b = a = 2$ si ha $|E_2E_1|^2 = -4$ e quindi l'intervallo è di tipo spazio. In questo secondo caso quindi esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi appaiono simultanei, e una possibile trasformazione di Lorentz si ottiene con un boost lungo y di velocità $\beta = -1/2$.