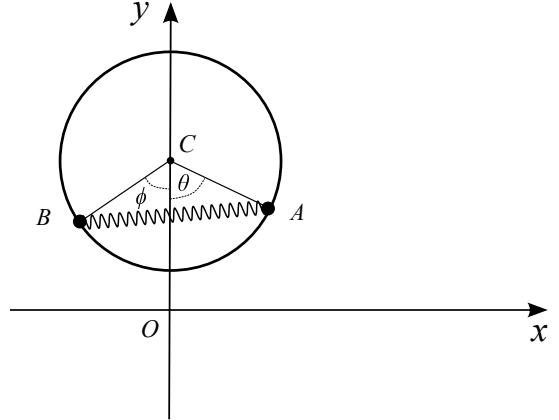


## Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 gennaio 2023

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

**Esercizio 1.** In un piano orizzontale  $Oxy$  giace una guida circolare di raggio  $R$  e massa trascurabile il cui centro è vincolato a muoversi lungo l'asse  $y$ . Si denoti con  $\xi$  la coordinata  $y$  del centro  $C$  della guida. Lungo la guida possono scorrere senza attrito due palline  $A$  e  $B$ , entrambe di massa  $m$ , unite tra loro da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo nulla. Si denotino con  $\theta$  e  $\phi$  gli angoli dei raggi che congiungono le palline al centro della guida rispetto all'asse  $y$ , crescenti in senso antiorario, come mostrato in figura.



1. Si scriva la Lagrangiana  $L$  del sistema.
2. Si calcolino i tre momenti cinetici  $p_\xi, p_\theta, p_\phi$ .
3. Si identifichino due integrali primi.
4. Quali vincoli sul centro  $C$  della guida (ovvero sulla coordinata  $\xi$ ) sono necessari affinché la funzione

$$f(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})$$

sia integrale primo del moto?

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente Lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{a}{2}x^2 + \ln x - bx \sin y,$$

con  $x > 0$ , ed  $m, a$  e  $b$  opportune costanti positive. Si chiede:

1. La Hamiltoniana e le relative equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Scelto un punto di equilibrio stabile le frequenze delle piccole oscillazioni.

**Esercizio 3.** Sia data l'Hamiltoniana:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}e^{-2p} + \alpha q,$$

(con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Sia data inoltre una funzione generatrice del terzo tipo (con  $P, Q > 0$ ):

$$F_3(p, Q) = -Qe^{-p} + \frac{Q^2}{2}.$$

1. Si scriva la trasformazione canonica  $Q(q, p), P(q, p)$  da essa generata e la sua inversa  $q(Q, P), p(Q, P)$ ;
2. Si calcoli la nuova Hamiltoniana  $K(Q, P)$  e si determini il valore di  $\alpha$  tale per cui  $K(Q, P)$  non contenga alcun termine in  $Q^2$ .

**Esercizio 4.** Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità costante  $v$ . Al momento della partenza gli orologi sulla Terra e sull'astronave segnano il tempo  $t = 0$ . Dopo un tempo  $t_1$  la Terra invia un segnale luminoso all'astronave, che non appena lo riceve inverte la rotta e torna sulla Terra alla stessa velocità. Al suo arrivo, l'orologio sulla Terra segna un tempo  $t^* = 10y$ , mentre quello sull'astronave riporta il tempo  $\tau^* = 8y$ .

1. Qual è la velocità  $v$  dell'astronave?
2. Quanto vale  $t_1$ ?
3. Esistono infiniti sistemi di riferimento in cui l'evento "il segnale luminoso parte dalla Terra", detto  $E_1$ , può essere simultaneo a eventi sull'astronave. Individuare l'intervallo temporale (misurato dall'orologio sull'astronave) entro il quale gli eventi sull'astronave possono essere simultanei a  $E_1$ .

## Soluzioni

### Esercizio 1.

La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2} \left[ 2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \right] - kR^2 [1 - \cos(\theta - \phi)]$$

da cui si ottengono i momenti cinetici

$$\begin{aligned} p_\xi &= 2m\dot{\xi} + mR(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \\ p_\theta &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{\xi} \sin \theta \\ p_\phi &= mR^2\dot{\phi} + mR\dot{\xi} \sin \phi. \end{aligned}$$

La Lagrangiana non dipende da  $\xi$  e dal tempo  $t$ , quindi  $p_\xi$  e l'energia generalizzata

$$\mathcal{H}(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \left[ 2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \right] + kR^2 [1 - \cos(\theta - \phi)]$$

sono due integrali primi.

La funzione  $f$  è un integrale primo se

$$\frac{d}{dt} f(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -mR\ddot{\xi}(\sin \theta + \sin \phi) = 0,$$

che si realizza se  $\xi$  è fissato o vincolato a muoversi di moto uniforme.

### Esercizio 2.

La Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 + \frac{p_y^2}{x^2} \right) + \frac{a}{2} x^2 - \ln x + bx \sin y$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x}{m} & \frac{dp_x}{dt} &= \frac{p_y^2}{mx^3} - ax + \frac{1}{x} - b \sin y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{p_y}{mx^2} & \frac{dp_y}{dt} &= -bx \cos y. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono due e sono date da  $y_\pm = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $x_\pm = \mp \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}}$ , solo la soluzione  $(x_-, y_-)$  è stabile.

Le pulsazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a + 1/x_-^2}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{b}{mx_-}}.$$

### Esercizio 3.

La trasformazione è

$$\begin{aligned} Q &= -qe^p & q &= -Q(P + Q) \\ P &= e^{-p} + qe^p & p &= -\ln(P + Q) \end{aligned}$$

Sostituendo  $q(Q, P)$  e  $p(Q, P)$  in  $H(q, p)$  si ottiene

$$K(Q, P) = \frac{1}{2}(P + Q)^2 - \alpha Q(P + Q)$$

che non ha termini proporzionali a  $Q^2$  se  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

### Esercizio 4.

Si trova  $\gamma = \frac{5}{4}$ , quindi  $v = \frac{3}{5}c$ . Il segnale parte al tempo  $t_1 = \frac{t^*}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 2y$ .

L'intervallo temporale richiesto è  $\frac{1-v/c}{1+v/c} \frac{\tau^*}{2} < \tau < \frac{\tau^*}{2}$ , ovvero  $1y < \tau < 4y$ .