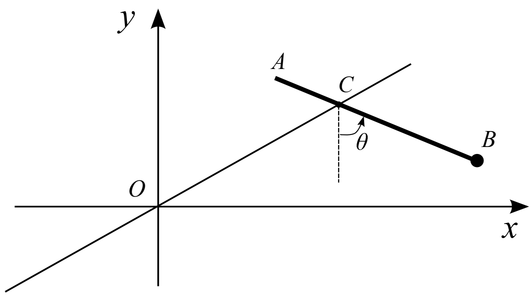
Compito straordinario di Meccanica Analitica e Relativistica del 9 maggio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto



Esercizio 1 [7 punti]. Una sbarra omogenea AB di massa M e lunghezza $4a$ posta in un piano verticale può ruotare senza attrito intorno al punto C posto alla distanza a dall'estremo A. Il punto C è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = \beta x$ di un sistema di riferimento Oxy con l'asse y orientato verso l'alto. All'estremo B è fissata una massa m.

Utilizzando come coordinate generalizzate l'ascissa x del punto C e l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale [vedi figura], si chiede:

1. la Lagrangiana del sistema;
2. i momenti coniugati p_x e p_θ.

Esercizio 2 [8 punti]. Un sistema meccanico è descritto dalla Lagrangiana

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{r^2}{2}\dot{\theta}^2 + r\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) - \frac{k_1}{2}\left[(x + r\cos\theta)^2 + (2r - r\sin\theta)^2\right] - \frac{k_2}{2}(b - x)^2 + M\theta,$$

dove m, r, b, k_1 e k_2 sono parametri postivi di dimensioni opportune.

1. Determinare il valore di M per il quale $(x, \theta) = (x_0, \pi/2)$ sia una posizione di equilibrio del sistema, ed il corrispondente valore di x_0.
2. Verificare che con il valore di M determinato al punto precedente la configurazione $(x, \theta) = (x_0, \pi/2)$ è una posizione di equilibrio stabile, e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a tale posizione.

Esercizio 3 [7 punti]. Sia data la trasformazione

$$p = e^q\, Q^a,$$
$$P = -\frac{e^{bq}}{2Q^{1/2}}.$$

1. Determinare i valori dei parametri reali a e b tali che la trasformazione sia canonica.
2. In corrispondenza di tali valori determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi partono simultaneamente, all'istante $t = 0$, dalla Terra con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = \frac{3}{5}c$, rispettivamente, e dirette lungo l'asse x di un sistema di riferimento R solidale con la Terra. Trascorso un tempo $\tau_1 = T$ misurato rispetto all'orologio di bordo dell'astronave 1, essa inverte la sua velocità e torna indietro (evento E_1), mentre l'astronave 2 continua il suo viaggio. Si chiede:

1. Dopo quanto tempo t^* misurato rispetto alla Terra le due astronavi si incontrano (evento E_2), e a che distanza x^* misurata nel sistema di riferimento R della Terra avviene l'incontro.
2. Si consideri l'istante in cui l'orologio sull'astronave 2 segna un tempo $\tau_2 = T$ (evento E_3). Determinare se esiste un sistema di riferimento R' in cui l'evento E_1 e l'evento E_3 appaiono simultanei, e in caso affermativo determinare la velocità u del sistema R' rispetto ad R.
3. Se si è risposto affermativamente alla domanda precedente, quali sono le velocità v'_1 e v'_2 delle due astronavi rispetto al sistema di riferimento R'.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana del sistema è:

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{M+m}{2}(1+\beta^2)\,\dot{x}^2 + \frac{a^2}{2}\left(\frac{7}{3}M+9m\right)\dot{\theta}^2 + a(M+3m)\big(\cos\theta+\beta\sin\theta\big)\,\dot{x}\dot{\theta}$$
$$-(M+m)\beta g x + (M+3m)ag\cos\theta.$$

2. I momenti coniugati sono

$$p_x = \frac{\partial}{\partial\dot{x}}L = (M+m)(1+\beta^2)\,\dot{x} + a(M+3m)\big(\cos\theta+\beta\sin\theta\big)\,\dot{\theta}$$
$$p_\theta = \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}L = a^2\left(\frac{7}{3}M+9m\right)\dot{\theta} + a(M+3m)\big(\cos\theta+\beta\sin\theta\big)\,\dot{x}.$$

Esercizio 2.

1. $M=-k_1 r x_0$, con $x_0=\frac{bk_2}{k_1+k_2}$, da cui $M=-\frac{bk_1k_2r}{k_1+k_2}$.
2. $\omega_\pm^2=\frac{1}{m}\left[7k_1+k_2\pm\sqrt{45k_1^2+k_2^2+6k_1k_2}\right]$.

Esercizio 3.

1. $a=1/2, b=1$.
2. $F_3(p,Q)=p(1-\log p+\frac{1}{2}\log Q)$.

Esercizio 4.

1. $t^*=\frac{2v_1}{v_1+v_2}\gamma_1 T=\frac{40}{21}T$, $x^*=v_2t^*=\frac{8}{7}cT$.
2. $|E_1-E_3|^2=-c^2T^2/6<0$, quindi esiste R' in cui E_1 ed E_3 sono simultanei, con $u=\frac{ct_1-ct_3}{x_1-x_3}c=\frac{5}{7}c$.
3. $v_1'=\frac{v_1-u}{1-v_1u/c^2}=c/5$, $v_2'=\frac{v_2-u}{1-v_2u/c^2}=-c/5$.