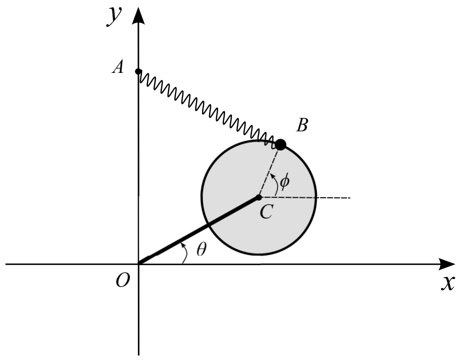
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 23 gennaio 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Un'asta rigida di massa M e lunghezza $2a$ può ruotare senza attrito in un piano verticale intorno al suo estremo O vincolato nell'origine del sistema di riferimento Oxy. All'estremo opposto C dell'asta è fissato il centro di un disco di raggio a e massa trascurabile. Il disco può ruotare senza attrito intorno al suo centro. Sul bordo del disco è fissata una massa puntiforme m, punto B in figura. La massa è soggetta alla forza elastica $\vec{F} = -k\overrightarrow{AB}$ di costante elastica k verso il punto $A = (0, 4a)$. Oltre alla forza elastica, sul sistema agisce la forza di gravità.

Si utilizzino come coordinate generalizzate l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x e l'angolo ϕ che il raggio $\overline{CB}$ forma con un asse orizzontale passante per C.

Si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le equazioni del moto.
3. Verificare che la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione $(\theta, \phi) \to (\pi - \theta, \pi - \phi)$. Esiste una grandezza conservata associata a tale trasformazione?

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri un sistema descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot\theta, \theta, \dot x, x) = \frac{1}{2}\dot x^2 + \frac{1}{2}\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\dot x\dot\theta \sin\theta + a\sin\theta - x^2 - 4x\cos\theta \ .$$

dove a è una costante positiva: $a > 0$.

Si chiede:

1. L'Hamiltoniana del sistema.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità per tutti i valori ammessi di a.
3. Le frequenze delle piccole oscillazioni di tutti i punti di equilibrio stabile per tutti i valori ammessi di a.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente trasformazione

$$\begin{cases} Q = p^a \cos q, \\ P = -2p^b \sin q. \end{cases}$$

Si chiede:

1. Determinare i valori di a e b tali che la trasformazione sia canonica.
2. Applicare la trasformazione canonica trovata alla Hamiltoniana $H(q,p) = -p\sin(2q)$ e determinare la corrispondente Hamiltoniana $K(Q,P)$.
3. Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton per Q e P.
4. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $q(0) = \pi/4$ e $p(0) = 1$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi partono all'istante $t = 0$ dalla terra (situata a riposo nell'origine di un sistema di riferimento $R : Oxyz$), avendo sincronizzato gli orologi di bordo con quello sulla terra. L'astronave A si dirige in direzione positiva dell'asse x con velocità v_A mentre l'astronave B si dirige lungo la bisettrice del primo quadrante del piano xy ($x = y$, $z = 0$) con velocità v_B. Dopo un tempo $\bar{t}/2$, l'astronave A cambia istantaneamente direzione del moto e si dirige parallelamente all'asse y mantenendo il modulo della velocità v_A inalterato (evento E_1). Al tempo $\bar{t}$ le due astronavi si incontrano (evento E_2).

Si chiede:

1. Qual è la velocità che l'astronave B non deve superare, affinché le due astronavi possano incontrarsi al tempo $\bar{t}$?
2. Siano τ_A e τ_B i tempi propri corrispondenti all'istante $\bar{t}$ misurati rispettivamente sull'astronave A e sull'astronave B. Quanto valgono v_A e v_B se $\tau_B = \sqrt{2}\tau_A$?
3. Assumendo che le astronavi si muovano con le velocità calcolate al punto precedente, indicare per quali valori di $\bar{t}$ esiste un sistema di riferimento R' in cui E_1 ed E_2 avvengono nello stesso punto. Per questi valori, trovare la velocità di R' rispetto al sistema di riferimento R di partenza.
4. Qual è la velocità v'_B dell'astronave B misurata nel riferimento R'?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana è $L = T - V$ con

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3}(2M+6m)\,a^2\dot\theta^2 + \frac{ma^2}{2}\dot\phi^2 + 2ma^2\cos(\theta-\phi)\,\dot\theta\dot\phi \\ V &= (Mg+2mg-8ka)a\sin\theta + (mg-4ka)a\sin\phi + 2ka^2\cos(\theta-\phi) + \text{const.}, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{3}(2M+6m)\,a^2\dot\theta^2 + \frac{ma^2}{2}\dot\phi^2 + 2ma^2\cos(\theta-\phi)\,\dot\theta\dot\phi \\ &- (Mg+2mg-8ka)a\sin\theta - (mg-4ka)a\sin\phi - 2ka^2\cos(\theta-\phi) + \text{const.}. \end{aligned}$$

2.

$$\frac{2}{3}(2M+6m)\,\ddot\theta + 2m\cos(\theta-\phi)\,\ddot\phi + 2m\sin(\theta-\phi)\,\dot\phi^2 = -k(\lambda_1+2\lambda_2-8)\cos\theta + 2k\sin(\theta-\phi),$$

$$m\ddot\phi + 2m\cos(\theta-\phi)\,\ddot\theta - 2m\sin(\theta-\phi)\,\dot\theta^2 = -k(\lambda_2-4)\cos\phi - 2k\sin(\theta-\phi),$$

dove $\lambda_1 = Mg/ka$ e $\lambda_2 = mg/ka$.

3. La simmetria è discreta per cui non vi sono grandezze conservate associate.

Esercizio 2.

1.

$$H(p_\theta,\theta,p_x,x) = \frac{2}{4-\sin^2\theta}\left[p_x^2 + p_\theta^2 + p_x p_\theta\sin\theta\right] - a\sin\theta + x^2 + 4x\cos\theta\ .$$

2. I punti di equilibrio sono

- $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, esiste sempre; stabile per $a > 8$.
- $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, esiste sempre; instabile.
- $\theta = \sin^{-1}\frac{a}{8}$, $x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{64-a^2}$, con $x < 0$ se $0 \le \theta \le \pi/2$ e $x > 0$ se $\pi/2 \le \theta \le \pi$, esiste per $0 < a < 8$; sempre stabile quando esiste.

3. Per il punto $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ si ha

$$\omega_\pm^2 = \frac{2}{3}\left[(a-2) \pm \sqrt{a^2-10a+52}\right]$$

mentre per $\theta = \sin^{-1}\frac{a}{8}$, $x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{64-a^2}$ si ha

$$\omega_1^2 = 8$$

$$\omega_2^2 = 8\frac{64-a^2}{256-a^2}.$$

Esercizio 3.

1.

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

2.

$$K(Q,P) = QP.$$

3.

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = Q, \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -P, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Q(t) = Q_0\, e^{t}, \\ P(t) = P_0\, e^{-t}. \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} q(t) = \arctan(e^{-2t}), \\ p(t) = \cosh(2t). \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. $v_B < \frac{c}{\sqrt{2}}$;
2. $v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}c$, $v_B = \frac{c}{\sqrt{3}}$;
3. $\exists\, R'\, \forall\, \bar{t}$, $\beta = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$;
4. $v'_B = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}c, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}c, 0\right)$.