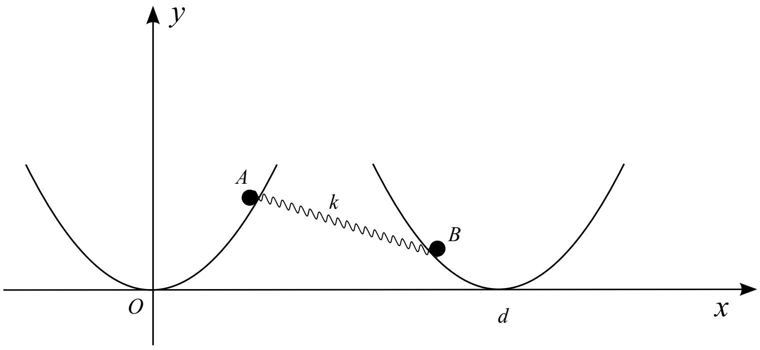
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 5 febbraio 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Due punti materiali A e B di massa identica m possono scorrere senza attrito su due guide paraboliche fissate su un piano verticale, sotto l'azione della forza di gravità. Le due guide hanno equazioni $y = \frac{1}{2}ax^2$ e $y = \frac{1}{2}b(x-d)^2$ dove a, b, d sono delle costanti reali. I due punti sono connessi da una molla di lunghezza di riposo nulla e costante elastica k.

Si utilizzino come coordinate generalizzate gli spostamenti $x = x_A$ e $z = x_B - d$ dei punti A e B lungo l'asse x rispetto all'asse della rispettiva parabola.

Si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le equazioni del moto.
3. Indicare sotto quali condizioni la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione $(x, z) \to (-x, -z)$. Esiste una grandezza conservata associata a tale trasformazione?

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri il sistema descritto dalla Lagrangiana

$$L(x, z, \dot{x}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2(1 + a^2x^2) + \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{ax^2}{2} - \frac{1}{2}(x - z - 1)^2 - \frac{a^2}{8}x^4 \ .$$

Si chiede, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

1. L'Hamiltoniana del sistema.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Le frequenze delle piccole oscillazioni di tutti i punti di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{4q}, \qquad q > 0.$$

1. Scrivere le equazioni di Hamilton.
2. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, Q, t) = W(q, Q) - Q\,t$ che mappi la Hamiltoniana $H(q, p, t)$ in $K(Q, P, t) = 0$.
3. Determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, Q, t)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q).
4. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto per (q, p) con le condizioni iniziali $q(0) = 1/2$ e $p(0) = 1/3$.
5. Verificare che le soluzioni trovate al punto 4. soddisfano le equazioni di Hamilton calcolate al punto 1..

Esercizio 4 [8 punti]. Un treno di lunghezza a riposo L viaggia a velocità relativistica v ed entra in un tunnel il cui ingresso è situato ad $x = 0$ e la cui uscita a $x = \frac{3}{5}L$. Consideriamo gli eventi: ingresso della testa del treno nel tunnel E_1, uscita della testa del treno dal tunnel E_2, ingresso della coda del treno nel tunnel E_3. Si chiede:

1. Trovare, in un sistema di riferimento S solidale con la terra (e quindi col tunnel), una velocità v_t per la quale il treno è, ad un dato istante, esattamente contenuto nel tunnel. Nel resto dell'esercizio la velocità del treno è fissata a tale valore.

2. Quali sono gli intervalli temporali che passano fra E_1 ed E_2 e fra E_2 ed E_3 nel sistema S ($\Delta t_{21} = t_2 - t_1$ e $\Delta t_{32} = t_3 - t_2$) e nel sistema S' solidale col treno ($\Delta t'_{21} = t'_2 - t'_1$ e $\Delta t'_{32} = t'_3 - t'_2$) ?

3. Di che tipologia sono gli intervalli spazio-temporali E_2-E_1 ed E_3-E_1?

4. Esiste un sistema di riferimento S'' che si muova lungo l'asse x nel quale l'evento E_3 avviene ad un tempo antecedente a E_2 di un intervallo temporale $\Delta t''_{23} = t''_2 - t''_3 = \frac{\sqrt{3}L}{5c}$? In che verso dell'asse x e con che velocità si dovrebbe muovere S''?

5. Nel caso esista S'', qual è la velocità del treno in tale sistema di riferimento?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana è $L = T - V$ con

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(1+a^2x^2) + \dot{z}^2(1+b^2z^2)] \ ,$$
$$V = \frac{mg}{2}[ax^2+bz^2] + \frac{k}{2}\left[(x-z-d)^2 + \frac{1}{4}(ax^2-bz^2)^2\right] \ ,$$

per cui

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(1+a^2x^2) + \dot{z}^2(1+b^2z^2)] - \frac{mg}{2}[ax^2+bz^2] - \frac{k}{2}\left[(x-z-d)^2 + \frac{1}{4}(ax^2-bz^2)^2\right]$$

2.

$$m\ddot{x}(1+a^2x^2) = -ma^2x\dot{x}^2 - mgax - k(x-z-d) - \frac{kax}{2}(ax^2-bz^2) \ ,$$
$$m\ddot{z}(1+b^2z^2) = -mb^2z\dot{z}^2 - mgbz + k(x-z-d) + \frac{kbz}{2}(ax^2-bz^2)$$

3. La simmetria è presente quando $d = 0$, altrimenti il termine $-\frac{k}{2}(x-z-d)^2$ della Lagrangiana non è invariante. È una simmetria discreta per cui non vi sono grandezze conservate associate.

Esercizio 2.

1.

$$H(p_x, x, p_z, z) = \frac{p_x^2}{2(1+a^2x^2)} + \frac{p_z^2}{2} + \frac{ax^2}{2} + \frac{1}{2}(x-z-1)^2 + \frac{a^2}{8}x^4 \ .$$

2. I punti di equilibrio sono
   (a) $x = 0$, $z = -1$, stabile per $a > 0$.
   (b) $x = \pm\sqrt{-2/a}$, $z = \pm\sqrt{-2/a} - 1$, esistono e sono stabili per $a < 0$.

3. Per il punto (a) le frequenze sono $\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(2+a\pm\sqrt{4+a^2})$ per $a > 0$ (altrimenti una frequenza è negativa) Per i punti (b), quando esistono ovvero $a < 0$, le frequenze di oscillazione sono $\omega_\pm^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-2a}}$.

Esercizio 3.

1.

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2q}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{4q^2}, \end{cases}$$

2. L'equazione di Hamilton-Jacobi è:

$$\frac{1}{4q}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - Q = 0.$$

da cui

$$S(q, Q, t) = \pm\frac{4}{3}Q^{1/2}\,q^{3/2} - Qt.$$

3.

$$\begin{cases} Q &= \frac{p^2}{4q}, \\ P &= -\frac{4}{3}\frac{q^2}{p} + t. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} q &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} Q^{1/3}\,(P-t)^{2/3} \\ p &= -(12)^{1/3}\,Q^{2/3}(P-t)^{1/3}. \end{cases}$$

4. La soluzione con $q(0) = 1/2$ e $p(0) = 1/3$ è:

$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{2/3}, \\ p(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{1/3}. \end{cases}$$

5. Con le soluzioni al punto precedente si ha

$$\frac{p}{2q} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1+t)^{1/3} \times \frac{2}{(1+t)^{2/3}} = \frac{1}{3}(1+t)^{-1/3} = \dot{q},$$

e

$$\frac{p^2}{4q^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}(1+t)^{2/3} \times \frac{4}{(1+t)^{4/3}} = \frac{1}{9}(1+t)^{-2/3} = \dot{p}.$$

Esercizio 4.

1. $v_t = \frac{4c}{5}$;
2. In S $\Delta t_{21} = t_2 - t_1 = \frac{3L}{4c}$, $\Delta t_{32} = 0$. In S' $\Delta t'_{21} = \frac{9L}{20c}$, $\Delta t'_{32} = \frac{4L}{5c}$;
3. $\Delta s^2_{21} > 0$, $\Delta s^2_{31} > 0$, entrambi di tipo tempo;
4. Sì, esiste. Si muove in verso contrario al treno con velocità $V'' = -\frac{1}{2}c$;
5. $v''_t = \frac{13}{14}c$.