Compito di Meccanica Analitica e Relativistica dell'8 maggio 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti]. Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$, con l'asse z orientato verso l'alto, un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Oltre alla forza peso sul punto materiale agisce una forza conservativa con potenziale $U(x, y, z) = -k(x^2+y^2)/2$. Utilizzando come coordinate generalizzate (r, θ) si chiede di:

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema e le associate equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Scrivere l'Hamiltoniana del sistema e le associate equazioni di Hamilton.
3. Individuare gli integrali primi del moto.

Esercizio 2 [6 punti]. Sia dato un sistema con coordinate $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e Hamiltoniana

$$H(p_r, p_\theta, r, \theta) = \frac{p_r^2}{2[1 + (r - 1/r)^2]} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{k}{2}r^2 + r^2/2 - \ln r + \sin^2\theta$$

1. Studiare le posizioni di equilibrio, e la loro stabilità in funzione di k.
2. Scelta una posizione di equilibrio stabile, calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio 3 [10 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{4q^4}, \qquad q > 0.$$

1. Scrivere le equazioni di Hamilton.
2. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, Q, t) = W(q, Q) - Q\,t$ che mappi la Hamiltoniana $H(q, p, t)$ in $K(Q, P, t) = 0$.
3. Determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, Q, t)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q).
4. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto per (q, p) con le condizioni iniziali $q(0) = 6^{1/3}$ e $p(0) = 2 \times 6^{2/3}$.
5. Verificare che le soluzioni trovate al punto 4. soddisfano le equazioni di Hamilton calcolate al punto 1.

Esercizio 4 [8 punti].
Un'astronave si trova su una stazione spaziale orbitante ad una distanza costante attorno alla Terra. Scegliamo un sistema di riferimento R (che supponiamo inerziale ai fini dell'esercizio) nel quale la stazione spaziale si trova ad una distanza positiva di $L = 2\,\mathrm{ly}$ (anni-luce) sull'asse delle x. Ad un certo punto, dalla Terra iniziano ad essere inviati segnali in direzione della stazione spaziale con cadenza annuale. All'arrivo del primo di tali segnali (per convenzione si consideri questo come istante $t = 0$ in R), l'astronave parte in direzione della Terra con velocità $v_1 = \frac{3}{5}c$. Al terzo segnale ricevuto (incluso quello all'arrivare del quale essa è partita), essa inverte istantaneamente il verso del moto e torna verso la stazione spaziale con velocità $v_2 = \frac{3}{7}c$. Si dica:

1. Qual è la distanza Δx dalla stazione spaziale alla quale si trova l'astronave quando inverte il moto?
2. Quanti segnali riceve in tutto l'astronave al suo ritorno sulla stazione spaziale (incluso quello subito dopo il quale è partita)?
3. Quanto tempo dura il viaggio per gli astronauti?
4. Esiste almeno un sistema di riferimento R' nel quale gli eventi "emissione del quinto segnale sulla terra" e "ritorno dell'astronave sulla stazione spaziale" avvengono nella stessa posizione? In caso affermativo, quale è la velocità minima $\vec{v}_{R'}^{\,min}$ (modulo, direzione e verso) che deve avere R' rispetto ad R? Qual è il limite superiore α dell'angolo che può formare $\vec{v}_{R'}$ con l'asse delle x?
5. Esiste almeno un sistema di riferimento R" nel quale gli eventi "emissione del quinto segnale sulla terra" e "ritorno dell'astronave sulla stazione spaziale" sono simultanei? In caso affermativo, quale è la velocità minima $\vec{v}_{R''}^{\,min}$ (modulo, direzione e verso) che deve avere R" rispetto ad R? Qual è il limite superiore α dell'angolo che può formare $\vec{v}_{R''}$ con l'asse delle x?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Utilizzando il vincolo $z = r^2/2 - \ln r$, la Lagrangiana è $L = T - V$ con

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + (r-1/r)^2\dot{r}^2] \ , \\ V &= -\frac{k}{2}r^2 + mg[r^2/2 - \ln r] \ , \end{aligned}$$

$$L(\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + (r-1/r)^2\dot{r}^2] + \frac{k}{2}r^2 - mg[r^2/2 - \ln r]$$

   Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} m\ddot{r}[1 + (r-1/r)^2] + 2m\dot{r}^2(r-1/r)(1+1/r^2) &= mr\dot{\theta}^2 + kr - mg(r-1/r) \ , \\ \frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] &= 0 \end{aligned}$$

2. I momenti coniugati sono

$$\begin{aligned} p_r &= m[1 + (r-1/r)^2]\dot{r} \ , \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} \ , \end{aligned}$$

   da cui segue la Hamiltoniana

$$H(p_r, p_\theta, r, \theta) = \frac{p_r^2}{2m[1 + (r-1/r)^2]} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{2}r^2 + mg[r^2/2 - \ln r]$$

   Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m[1 + (r-1/r)^2]} \ , \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \ , \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_r^2}{m[1 + (r-1/r)^2]^2}(r-1/r)(1+1/r^2) + \frac{p_\theta^2}{mr^3} + kr - mg(r-1/r) \ , \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \ . \end{aligned}$$

3. Gli integrali primi del moto sono l'energia (ovvero H) e il momento angolare $L = p_\theta$.

Esercizio 2.

1. I punti di equilibrio esistono solo per $k \leq 1$ e hanno la forma $r = \sqrt{1/(1-k)}$ e $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. I punti con $\theta = 0, \pi$ sono stabili, gli altri due sono instabili.

2. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono

$$\omega_r = \sqrt{\frac{2(1-k)^2}{1-k+k^2}} \qquad \omega_\theta = \sqrt{2(1-k)} \tag{1}$$

Esercizio 3.

1. $$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2q^4}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{q^5}, \end{cases}$$

2. L'equazione di Hamilton-Jacobi è:

$$\frac{1}{4q^4}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - Q = 0.$$

da cui

$$S(q, Q, t) = \pm\frac{2}{3}Q^{1/2}\, q^3 - Qt.$$

3. $$\begin{cases} Q &= \frac{p^2}{4q^4}, \\ P &= -\frac{2}{3}\frac{q^5}{p} + t. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q &= 3^{1/3}\, Q^{1/6}\,(t-P)^{1/3} \\ p &= 2 \times 3^{2/3}\, Q^{5/6}(t-P)^{2/3}. \end{cases}$$

4. La soluzione con $q(0) = 6^{1/3}$ e $p(0) = 2 \times 6^{2/3}$ è:

$$\begin{cases} q(t) = 3^{1/3}(2+t)^{1/3}, \\ p(t) = 2 \times 3^{2/3}(2+t)^{2/3}. \end{cases}$$

5. Con le soluzioni al punto precedente si ha

$$\frac{p}{2q^4} = 3^{2/3}(2+t)^{2/3} \times \frac{1}{3^{4/3}(2+t)^{4/3}} = \frac{1}{3^{2/3}}(2+t)^{-2/3} = \dot{q},$$

e

$$\frac{p^2}{q^5} = 4 \times 3^{4/3}(2+t)^{4/3} \times \frac{1}{3^{5/3}(2+t)^{5/3}} = \frac{4}{3^{1/3}}(2+t)^{-1/3} = \dot{p}.$$

Esercizio 4.

1. Supponendo per ipotesi che l'astronave riceva il primo segnale al tempo $t = 0$ e parta istantaneamente, il terzo segnale al ricevimento del quale essa invertirà il moto verrà emesso sulla Terra al tempo (misurato in R):

$$t^* = -\frac{L}{c} + 2\,\mathrm{y} = 0\,.$$

Di conseguenza, il tempo t_1 (misurato in R) al quale l'astronave riceverà il terzo segnale sarà

$$v_1 t_1 + c(t_1 - t^*) = L\,, \qquad\qquad t_1 = \frac{L + c\,t^*}{v_1 + c} = \frac{5}{4}\,\mathrm{y}\,.$$

L'astronave, prima di invertire il moto, percorre la distanza

$$\Delta x = v_1 t_1 = v_1 \frac{L + c\,t^*}{v_1 + c} = \frac{3}{4}\,\mathrm{ly}\,.$$

2. Per tornare sulla stazione spaziale, l'astronave impiega in tutto

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta x}{v_2} = \frac{L + c\,t^*}{v_1 + c}\left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right) = 3\,\mathrm{y}$$

e quindi riceve in tutto 4 segnali dalla Terra (includendo il segnale arrivato al tempo 0 al momento della partenza e il segnale che riceve mentre ritorna sulla stazione spaziale).

3. Il tempo che dura il viaggio per gli astronauti è

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\, t_1 + \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\, (t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \mathrm{y} \approx 2.58\,\mathrm{y}.$$

4. L'intervallo fra i due eventi è di tipo spazio, quindi non esiste nessun R'.

5. Esiste R", la cui velocità minima deve essere $\vec{v}_{R''}^{\,min} = \{\frac{c}{2}, 0, 0\}$. Il limite superiore α dell'angolo che può formare $\vec{v}_{R''}$ con l'asse delle x è invece determinato da

$$\tan\alpha = \frac{v_{R''}^{\perp}}{v_{R''}^{min}} = \sqrt{3} \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}\,.$$