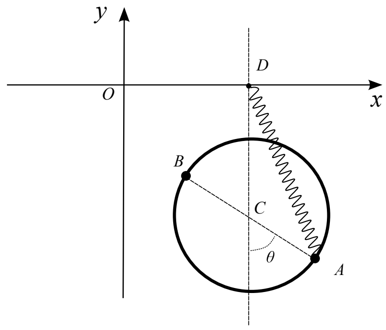
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 14 giugno 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Un anello di raggio R e massa uniforme M può muoversi liberamente in un piano verticale xy di un un sistema di riferimento Oxy. Sull'anello sono fissate in posizione diametralmente opposta due masse A e B di dimensioni trascurabili e massa rispettivamente m_A e m_B. La massa A è soggetta ad una forza di richiamo $\vec{F}_A = -k\,\overrightarrow{DA}$ verso il punto D intersezione dell'asse verticale passante per il centro C dell'anello e l'asse x del sistema di riferimento Oxy. Sulle masse, oltre alla forze elastica, agisce la forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate le coordinate (x, y) del centro C dell'anello e l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi]$ che $\overrightarrow{CA}$ forma con l'asse verticale passante per il centro C dell'anello [Vedi figura], si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. Le equazioni del moto Lagrangiane.
3. Individuare gli integrali primi del sistema.

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri il sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2\lambda}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}\left[y^2 + 2y\,(\lambda - \cos z)\right],$$

dove λ è un parametro adimensionale positivo e $-\pi < z \le \pi$.

Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità al variare del parametro reale $\lambda > 0$.
3. Preso $\lambda > 1$ le frequenze delle piccole oscillazioni al punto, o ai punti, di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Sia data la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{1}{8p^2(1+q)^2}\left[4p^6(1+q)^6 + \ln^2(1+q)\right],$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} p &= \sqrt{Q}\,(1+q)^\alpha \\ P &= -\frac{Q^\beta}{2}\,\ln(1+q). \end{cases}$$

con α e β parametri reali.

Si chiede:

1. Determinare il valore dei parametri α e β affinchè la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $F(q, Q)$ della trasformazione.
3. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto per (q, p) ottenute a partire dalla Hamiltoniana data con le condizioni iniziali $q(t = 0) = 0$ e $p(t = 0) = 1$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi, A e B, si muovono l'una verso l'altra. Rispetto a un osservatore fisso nel riferimento della terra, l'astronave A si muove con velocità positiva $v_A = c\beta_A$ lungo l'asse x, e l'astronave B si muove in direzione opposta, ovvero con velocità negativa $v_B = -c\beta_B$ lungo lo stesso asse x. Sempre nel riferimento della terra, al tempo $t = 0$, l'astronave A si trova in $x = 0$ e l'astronave B si trova in $x = L$.

1. Calcolare la velocità relativa dell'astronave B osservata dall'astronave A.
2. Determinare il tempo a cui le due astronavi si scontrano, misurato dall'osservatore sulla terra.
3. Determinare il tempo a cui le due astronavi si scontrano, misurato da un osservatore sull'astronave A (il cui orologio indicava $t = 0$ quando l'astronave A era in $x = 0$ nel riferimento terrestre).

Al tempo $t = 0$ l'osservatore sulla terra comincia a inviare regolarmente segnali di luce in direzione dell'astronave B con periodo T (misurato nel riferimento terrestre).

4. Calcolare il periodo T'_B con cui un osservatore fermo nell'astronave B vede arrivare i segnali inviati dalla terra.
5. Determinare quanti segnali riceve B prima di scontrarsi con A scegliendo $\beta_A = 6/10$, $\beta_B = 8/10$, $L = 10$ anni luce, e $T = 1$ anno.

Soluzioni

Esercizio 1.

1.

$$L(x,y,\theta,\dot x,\dot y,\dot\theta)=\frac12\Big[(m_A+m_B+M)\,(\dot x^2+\dot y^2+R^2\dot\theta^2)+2(m_A-m_B)R\,\dot\theta\,(\dot x\cos\theta+\dot y\sin\theta)\Big]$$
$$-\,(m_A+m_B+M)\,g\,y+(m_A-m_B)\,gR\cos\theta-\frac{k}{2}(y^2-2Ry\cos\theta+R^2)$$

2. Ponendo $M_{\mathrm{T}}=m_A+m_B+M$:

$$M_{\mathrm{T}}\,\ddot x+(m_A-m_B)R\left(\ddot\theta\,\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta\right)=0,$$

$$M_{\mathrm{T}}\,\ddot y+(m_A-m_B)R\left(\ddot\theta\,\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta\right)=-M_{\mathrm{T}}g-ky+kR\cos\theta,$$

$$M_{\mathrm{T}}\,R\,\ddot\theta+(m_A-m_B)\big(\ddot x\,\cos\theta+\ddot y\sin\theta\big)=-(m_A-m_B)g\sin\theta-ky\sin\theta.$$

3. La Lagrangiana non dipende dal tempo ne dalla coordinata x per cui l'energia

$$E(x,y,\theta,\dot x,\dot y,\dot\theta)=\frac12\Big[(m_A+m_B+M)\,(\dot x^2+\dot y^2+R^2\dot\theta^2)+2(m_A-m_B)R\,\dot\theta\,(\dot x\cos\theta+\dot y\sin\theta)\Big]$$
$$+\,(m_A+m_B+M)\,g\,y-(m_A-m_B)\,gR\cos\theta+\frac{k}{2}(y^2-2Ry\cos\theta+R^2)$$

e il momento coniugato

$$p_x=\frac{\partial}{\partial\dot x}L=(m_A+m_B+M)\,\dot x+(m_a-m_B)\,R\cos\theta\,\dot\theta$$

sono integrali primi del moto.

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned}\dot x&=\frac{p_x}{\lambda}, &\qquad \dot p_x&=0;\\ \dot y&=\frac{p_y}{\lambda}, &\qquad \dot p_y&=-y-\lambda+\cos z;\\ \dot z&=\frac{p_z}{\lambda}, &\qquad \dot p_z&=-y\sin z.\end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono $p_x=p_y=p_z=0$ e

   (a) $x=$ costante, $y=1-\lambda$, $z=0$, stabile per $\lambda<1$.

   (b) $x=$ costante, $y=-1-\lambda$, $z=\pi$, stabile.

   (c) $x=$ costante, $y=0$, $z=\arccos(\lambda)$, esiste solo per $\lambda<1$ ed è instabile.

3. Per $\lambda>1$ il solo punto stabile è il (b), le frequenze sono $\omega_y^2=\frac{1}{\lambda}$ e $\omega_z^2=\frac{1}{\lambda}+1$. In x il sistema è fermo.

Esercizio 3.

1.

$$\alpha=-1,\qquad \beta=-1/2.$$

2.

$$F(q,Q)=\sqrt{Q}\,\ln(1+q)+\mathrm{const}.$$

3.

$$\begin{cases} q = \mathrm{e}^{-2\sqrt{Q}\,P} - 1, \\ p = \sqrt{Q}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{Q}\,P} \end{cases}$$

dove

$$Q(t) = Q_0\,\cos t + P_0\,\sin t, \qquad P(t) = -Q_0\,\sin t + P_0\,\cos t,$$

poichè

$$K(Q, P) = \frac{1}{2}\big(Q^2 + P^2\big)$$

oscillatore armonico con pulsazione $\omega = 1$.
Usando la trasformazione canonica per i valori $q(0) = 0$ e $p(0) = 1$, si ha

$$Q_0 = p(0)^2[1 + q(0))]^2 = 1, \qquad P_0 = -\frac{1}{Q_0^{1/2}}\ln[1 + q(0)] = 0,$$

per cui

$$\begin{cases} q(t) = \exp\Big[2\sqrt{\cos t}\,\sin t\Big] - 1, \\ p(t) = \sqrt{\cos t}\,\exp\Big[-2\sqrt{\cos t}\,\sin t\Big]. \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. La velocità relativa v_{AB} dell'astronave B osservata dall'astronave A può essere trovata usando la formula di composizione delle velocità relativistiche:

$$\beta_{AB} = \frac{v_{AB}}{c} = -\frac{\beta_B + \beta_A}{1 + \beta_A\beta_B}\ .$$

2. Il tempo t_C necessario perché le due astronavi si scontrino, misurato dall'osservatore sulla terra, è dato da:

$$ct_C = \frac{L}{\beta_A + \beta_B}\ .$$

3. Nel riferimento di A i tempi sono contratti dunque

$$ct_A = \frac{ct_C}{\gamma_A} = \frac{1}{\gamma_A}\frac{L}{\beta_A + \beta_B}\ .$$

4. Nel riferimento della terra, il segnale numero $k = 0, 1, 2, \cdots$ segue la traiettoria $x = c(t - kT)$ e incontra l'astronave B con traiettoria $x = L - \beta_B ct$ al tempo

$$ct_k = \frac{L + kcT}{1 + \beta_B}$$

Dunque il periodo T_B con cui i segnali incontrano l'astronave B, misurato sulla terra, vale $cT_B = \frac{cT}{1+\beta_B}$. Nel riferimento dell'astronave B il periodo è

$$cT'_B = \frac{cT_B}{\gamma_B} = \frac{1}{\gamma_B}\frac{1}{1 + \beta_B}cT\ .$$

5. Scegliendo $\beta_A = 6/10$, $\beta_B = 8/10$, $L = 10$ anni luce, e $cT = 1$ anno luce, e usando l'anno luce come unità per tutte le quantità, la condizione per cui l'astronave B riceve il segnale k prima di scontrarsi con l'astronave A è

$$ct_k = \frac{10 + k}{1.8} \le ct_C = \frac{50}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad k \le \frac{20}{7}$$

e dunque l'astronave B riceve 3 segnali in totale ($k = 0, 1, 2$).