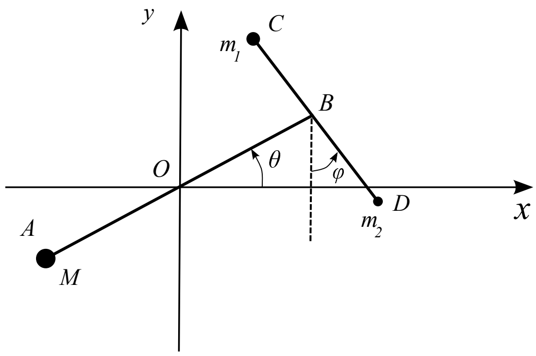
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 settembre 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Una sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{AB} = 2a$ può ruotare liberamente in un piano verticale intorno al suo centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento Oxy, con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale ed orientato verso l'alto. All'estremità A della sbarretta è fissata una massa puntiforme M. All'altro estremo, estremo B, è fissato il centro di una seconda sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{CD} = 2b$. La sbarretta CD può ruotare liberamente nel piano verticale intorno al suo centro. All'estremo C della seconda sbarretta è fissata una massa puntiforme di massa m_1, mentre all'estremo opposto D è fissata una terza massa puntiforme di massa m_2.

Sul sistema agisce la forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate l'angolo θ che la sbarretta AB forma con l'asse x e l'angolo φ che la sbarretta CD forma con la verticale, ed orientati come in Figura, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. La Hamiltoniana del sistema.
3. Indicare le quantità conservate nel caso $m_1 \neq m_2$ e nel caso particolare $m_1 = m_2$

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri il sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_r^2}{1 + (r - 1/r)^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\big(1 + \cos^2\theta - \lambda\big)\, r^2 - \ln r, \qquad r > 0,$$

dove λ è un parametro reale.

Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità al variare del parametro reale λ.
3. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio stabile del sistema.

Esercizio 3 [8 punti]. Sia data la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = p^3 - \frac{q^3}{81 p^6}\ ,$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} Q &= \frac{1}{3}\, q\, p^a\ , \\ P &= p^3\ , \end{cases}$$

con a parametro reale.

Si chiede:

1. Determinare i valori del parametro a affinchè la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $G(q, P)$ della trasformazione.

3. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto per (q, p) ottenute a partire dalla Hamiltoniana data con le condizioni iniziali $p(t = 0) = 1$ e $q(t = 0) = 0$.

4. Verificare esplicitamente che le soluzioni ottenute verificano le equazioni di Hamilton per (p, q).

Esercizio 4 [8 punti]. Nel sistema di riferimento R, l'astronave A si trova al tempo $t = 0$ nell'origine del sistema di coordinate e viaggia alla velocità v_A in verso positivo lungo l'asse delle x mentre l'astronave B si trova, sempre al tempo $t = 0$, nel punto di coordinate $(-L$,0,0) e viaggia in verso positivo lungo l'asse delle x con velocità $v_B = 3v_A$. Sull'astronave A (il cui tempo proprio è indicato da τ con origine $\tau = 0$ corrispondente a $t = 0$) è presente un ordigno con timer impostato per scoppiare al tempo $\tau_1 = \frac{\sqrt{6}L}{c}$.

1. Quale è il valore minimo $v_{\min}$ di $v_A = v_B/3$ affinchè le due astronavi si incontrino prima dello scoppio dell'ordigno?

Ci si ponga adesso in un sistema di riferimento R', con assi paralleli agli assi del sistema R, che si muove rispetto ad R con velocità $V = v_A = v_B/3$ nella direzione x e la cui origine delle coordinate coincida con quella di R al tempo $t' = t = 0$:

2. quali sono le velocità v'_A e v'_B di A e B nel riferimento R'?

3. quali sono le coordinate in R' dell'evento che corrisponde all'astronave A situata al tempo $t = 0$ nel punto (0,0,0) di R? Che relazione intercorre fra t' e τ (il tempo proprio sull'astronave A)?

4. quali sono le coordinate in R' dell'evento che corrisponde all'astronave B situata al tempo $t = 0$ nel punto $(-L$,0,0) di R?

5. ragionando nel sistema R' si trovi il valore minimo $V_{\min}$ di $V = v_A = v_B/3$ (da cui dipendono v'_A e v'_B) affinchè le due astronavi si incontrino prima dello scoppio dell'ordigno.

Soluzioni

Esercizio 1.

1.

$$L(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi)=\frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2+\frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2+ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$-\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta-bg(m_1-m_2)\cos\varphi.$$

2.

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi)=\frac{1}{2D(\theta,\varphi)}\left[b^2(m_1+m_2)\,p_\theta^2+a^2(m_1+m_2+M)\,p_\varphi^2-2ab(m_1-m_2)\,p_\theta p_\varphi\sin(\theta-\phi)\right]$$
$$+\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta+bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

con

$$D(\theta,\varphi)=a^2b^2\Big[(m_1+m_2)(m_1+m_2+M)-(m_1-m_2)^2\sin^2(\theta-\varphi)\Big].$$

3. Formulazione Lagrangiana:
La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza l'energia generalizzata

$$\mathcal{E}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi)=\frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2+\frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2+ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$+\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta+bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

è una costante del moto.

Se $m_1=m_2$ la Lagrangiana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}L=2b^2m_1\,\frac{d}{dt}\dot\varphi=0\qquad\Rightarrow\qquad\dot\varphi=costante.$$

Formulazione Hamiltoniana:
La Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza la Hamiltoniana è una costante del moto.

Se $m_1=m_2$ la Hamiltoniana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\dot p_\varphi=-\frac{\partial}{\partial\varphi}H=0\qquad\Rightarrow\qquad p_\varphi=costante.$$

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned}\dot r&=\frac{p_r}{1+(r-1/r)^2},\\ \dot p_r&=\frac{p_r^2}{[1+(r-1/r)^2]^2}\,(r-1/r^3)+\frac{p_\theta^2}{r^3}-(1+\cos^2\theta-\lambda)\,r+1/r\\ \dot\theta&=\frac{p_\theta}{r^2},\\ \dot p_\theta&=r^2\cos\theta\,\sin\theta.\end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono $p_r=p_\theta=0$ e
   (a) $r=1/\sqrt{2-\lambda}$, $\theta=0,\pi$, esistono solo se $\lambda<2$. Sempre instabile.
   (b) $r=1/\sqrt{1-\lambda}$, $\theta=\pm\pi/2$, esistono solo se $\lambda<1$. Sempre stabile.

3. Il sistema possiede punti di equilibrio stabili solo se $\lambda<1$, punti (b). La frequenza delle piccole oscillazioni intorno a questi punti sono: $\omega_r^2=2\frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda+\lambda^2}$, $\omega_\theta^2=1$.

Esercizio 3.

1.

$$\{Q, P\} = p^{a+2} \ , \qquad \text{dunque} \qquad a = -2$$

e la trasformazione è

$$\begin{cases} P = p^3 \ , \\ Q = \frac{1}{3}\frac{q}{p^2} \ . \end{cases} \qquad \begin{cases} p = P^{1/3} \ , \\ q = 3QP^{2/3} \ . \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial q} = p = P^{1/3} & \Rightarrow G(q, P) = qP^{1/3} + h(P) \\ \frac{\partial G}{\partial P} = Q = \frac{1}{3}qP^{-2/3} & \Rightarrow \frac{1}{3}qP^{-2/3} = \frac{1}{3}qP^{-2/3} + h'(P) \Rightarrow h(P) = \text{const.} \end{cases}$$

e la costante si può scegliere uguale a zero senza perdere generalità.

3. Sostituendo $(p, q) \to (P, Q)$ nell'Hamiltoniana si ottiene

$$K(Q, P) = P - \frac{1}{3}Q^3 \ .$$

Dunque

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial K}{\partial P} = 1 & \Rightarrow \quad Q = Q_0 + t \ , \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial K}{\partial Q} = Q^2 & \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{(Q_0+t)^3 - Q_0^3}{3} \end{cases}$$

Usando la trasformazione canonica per i valori $p(0) = 1$ e $q(0) = 0$, si ha

$$Q_0 = 0 \ , \qquad P_0 = 1 \ ,$$

per cui

$$\begin{cases} Q(t) = t \\ P(t) = 1 + \frac{t^3}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} q(t) = 3t\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{2/3} \\ p(t) = \left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{1/3} \end{cases}$$

4. Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q^2}{27p^6} \ , \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 3p^2 + \frac{2q^3}{27p^7}$$

Dalla soluzione trovata abbiamo

$$\dot{p} = \frac{t^2}{3}\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{-2/3} \qquad = \qquad \frac{q^2}{27p^6} = \frac{1}{27}9t^2\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{-2/3}$$

La seconda equazione si verifica analogamente.

Esercizio 4.

1. $v_{\min} = \frac{c}{5}$;
2. $\beta'_A = 0 \qquad \beta'_B = \frac{2\beta_A}{1-3\beta_A^2}$;
3. $(0, 0, 0, 0)$, $\tau = t'$;
4. $(\beta_A\gamma_A L, \ -\gamma_A L, \ 0, 0)$ con $\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_A^2}}$;
5. $V_{\min} = \frac{c}{5}$.