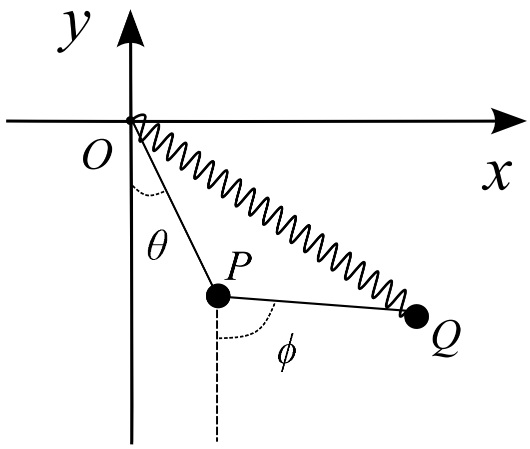
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica dell'11 Novembre 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



In un piano verticale due aste OP e PQ di lunghezza l e massa trascurabile hanno un estremo P in comune. La prima asta è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'origine degli assi O. In corrispondenza di P e di Q si trovano due punti materiali di massa m. Il sistema è soggetto alla forza di gravità e, inoltre, il punto Q è collegato al punto O tramite una molla ideale (di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla). Si chiede:

1. la Lagrangiana del sistema;
2. le equazioni di Eulero-Lagrange;
3. gli integrali primi del moto rispettivamente in presenza ed in assenza della forza di gravità.

Esercizio 2 [8 punti]. Un punto materiale P di massa m si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie

$$z = \frac{r^4}{4R^3} \ , \qquad \text{dove} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

L'asse z è orientato verso l'alto, e sul punto agiscono la forza di gravità g e una forza di energia potenziale $-ax$. Si scelga un sistema di unità di misura in cui $m = 1$, $R = 1$ e $g = 1$. Usando le coordinate polari, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

1. Si scriva la Hamiltoniana del sistema.
2. Al variare di $a \neq 0$ si trovino le posizioni di equilibrio del sistema (non si consideri il caso $r = 0$).
3. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. Per $a = 1$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la Hamiltoniana

$$H(p,q) = \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{p}{2q}\right)\right]^3 \ ,$$

e la funzione generatrice del primo tipo

$$G_1(q,Q) = q^a e^Q \ .$$

1. Si scriva la trasformazione canonica generata da $G_1(q,Q)$, ovvero $P(p,q)$ e $Q(p,q)$.
2. Si scriva la Hamiltoniana $K(P,Q)$.
3. Scelto un valore opportuno di a, si risolvano le equazioni del moto per (P,Q).
4. Si usi la soluzione per (P,Q) e la trasformazione canonica per risolvere il moto con dato iniziale $p_0 = 1$ e $q_0 = 1$.

Esercizio 4 [8 punti]. Un treno di lunghezza a riposo $L_T = L$ viaggia a velocità relativistica $v_T = \frac{4}{5}c$ ed entra in una galleria il cui ingresso è situato ad $x = 0$ e la cui uscita a $x = L_G = L$. Consideriamo gli eventi: E_1 ingresso della testa del treno nella galleria, E_2 uscita della testa del treno dalla galleria, E_3 ingresso della coda del treno nella galleria. Si chiede:

1. Scegliendo come origine dei tempi nel sistema di riferimento S solidale con la terra (e quindi con la galleria) l'istante nel quale la coda del treno entra nella galleria ($t_3 = 0$), quali sono i tempi t_1 e t_2 corrispondenti agli eventi gli eventi E_1 ed E_2?

2. Di che tipologia sono gli intervalli spazio-temporali E_2-E_1 ed E_3-E_2?

3. Esiste un sistema di riferimento S' che si muova lungo l'asse x nel quale l'evento E_2 e l'evento E_3 sono simultanei? In caso di risposta affermativa qual è la velocità di S' in modulo ed il suo verso?

4. Quali sono le velocità v'_T e v'_G del treno e della galleria in S'?

5. Quali sono le lunghezze L'_T e L'_G di treno e galleria in S'?

6. Esiste un sistema di riferimento S'' nel quale gli eventi E_2 ed E_1 avvengono in uno stesso punto dello spazio? In caso affermativo qual è la velocità di S'' in modulo ed il suo verso?

Soluzioni

Esercizio 1.

1.
$$L = ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\phi^2 + ml^2\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi) - kl^2(1+\cos(\theta-\phi))$$

2.
$$2ml^2\ddot\theta + ml^2\ddot\phi\cos(\theta-\phi) + ml^2\dot\phi^2\sin(\theta-\phi) = -2mgl\sin\theta + kl^2\sin(\theta-\phi)$$
$$ml^2\ddot\phi + ml^2\ddot\theta\cos(\theta-\phi) - ml^2\dot\theta^2\sin(\theta-\phi) = -mgl\sin\phi - kl^2\sin(\theta-\phi)$$

3.
$$\mathcal{H} = ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\phi^2 + ml^2\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi) - mgl(2\cos\theta + \cos\phi) + kl^2(1+\cos(\theta-\phi))$$

   In assenza di forza di forza di gravità, la Lagrangiana è simmetrica sotto la trasformazione $(\theta,\phi)\to(\theta+s,\phi+s)$, che corrisponde a una rotazione globale del sistema, dunque si conserva anche il momento angolare:
$$\mathcal{I} = ml^2\dot\theta\,(2+\cos(\theta-\phi)) + ml^2\dot\phi\,(1+\cos(\theta-\phi))$$

Esercizio 2.

1.
$$H(p_r,p_\theta) = \frac{p_r^2}{2(1+r^6)} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{r^4}{4} - ar\cos\theta\ .$$

2. Per $a>0$, $\theta=0$ e $r=\sqrt[3]{a}$. Per $a<0$, $\theta=\pi$ e $r=\sqrt[3]{|a|}$.
3. La matrice delle derivate seconde del potenziale è
$$K = \begin{pmatrix} 3r^2 & a\sin\theta \\ a\sin\theta & ar\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt[3]{a^2} & 0 \\ 0 & |a|\sqrt[3]{|a|} \end{pmatrix}$$
   La matrice è diagonale ed entrambi gli elementi sulla diagonale sono positivi, dunque gli equilibri trovati al punto precedente sono stabili.
4. Per $a=1$ abbiamo $k_r=3$ e $k_\theta=1$. Le masse sono $m_r=2$ e $m_\theta=1$. Dunque le frequenze sono $\omega_r=\sqrt{k_r/m_r}=\sqrt{3/2}$ e $\omega_\theta=\sqrt{k_\theta/m_\theta}=1$.

Esercizio 3.

1.
$$\begin{cases} P = -\frac{pq}{a} \\ Q = \log\left[\frac{p}{aq^{a-1}}\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} p = a(-P)^{\frac{a-1}{a}}e^{Q/a} \\ q = (-P)^{1/a}e^{-Q/a} \end{cases}$$

2.
$$K(P,Q) = \frac{1}{3}\left[\frac{2Q}{a} + \frac{a-2}{a}\log(-P) + \log\frac{a}{2}\right]^3$$

3. Conviene scegliere $a=2$ nel qual caso $K=Q^3/3$ e dunque $\dot P = -Q^2$, $\dot Q = 0$. Si ottiene $Q=Q_0$ e $P=P_0-Q_0^2t$.
4. Usando la trasformazione canonica con $a=2$ si ha $P_0=-p_0q_0/2=-1/2$ e $Q_0=\log[p_0/(2q_0)]=-\log 2$. Dunque $P(t)=-1/2-(\log 2)^2t$ e $Q(t)=-\log 2$, e
$$\begin{cases} p = 2\sqrt{-P}e^{Q/2} = \sqrt{1+2(\log 2)^2t} \\ q = \sqrt{-P}e^{-Q/2} = \sqrt{1+2(\log 2)^2t} \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. $ct_1 = -\frac{3L}{4}$, $ct_2 = \frac{L}{2}$
2. $E_2 - E_1$ di tipo tempo, $E_3 - E_2$ di tipo spazio.
3. $V_{S'} = \frac{c}{2}$
4. $v'_G = -\frac{c}{2}$, $v'_T = \frac{c}{2}$
5. $L'_G = L'_T = \frac{\sqrt{3}}{2}L$
6. $V_{S''} = \frac{4}{5}c$