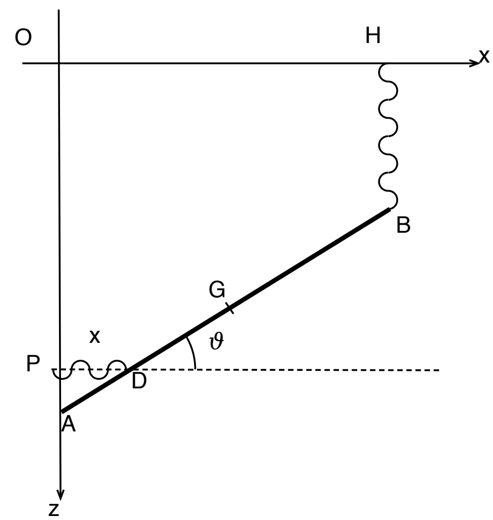
MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA - I ESONERO - 14/12/2016

In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxz di origine O e con l'asse z orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida omogenea di estremi A e B, massa M e lunghezza L (vd figura). Il punto D di tale asta dista $L/4$ dall'estremo A ed è obbligato a scorrere senza attrito su di una guida parallela all'asse x e passante per il punto P di coordinate $(0, d)$. Oltre alla forza peso l'asta è soggetta a due forze attive $\vec{F}_1 = -K\vec{PD}$ e $\vec{F}_2 = -K\vec{HB}$, dove $K > 0$ e H è la proiezione ortogonale di B sull'asse x. Scegliamo come coordinate lagrangiane per descrivere il sistema l'ascissa x del punto D e l'angolo θ che l'asta forma con la guida parallela all'asse x.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{4d}{3L} - \frac{4Mg}{9LK}$.
3. Si ponga in queste domande $K = M = g = L = 1$ e $d = 10/9$. Scelta, quindi, una posizione di equilibrio stabile si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni.



II Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica - 25/01/2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

1. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/2$ per un tempo T, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/4$ nell'origine, dove si ferma. La seconda si muove con velocità $c/3$ per un tempo $\frac{3}{2}T$, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/3$ nell'origine, dove si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un corpo di massa a riposo m si muove lungo l'asse x ed è soggetto ad un'energia potenziale $U(x) = A|x|^5$ (con $A > 0$). Sapendo che transita per l'origine con velocità v_0, si determini la massima distanza d dall'origine raggiunta.

3. Sia data la trasformazione

$$Q = 16p^4q^2$$
$$P = -\frac{1}{32}q^\beta p^{-3}$$

Si dica per quali valori reali di β la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

4. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Indicare se esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi

$$E_1 = (1, -\cos\alpha, -\sin\alpha, 1)\ , \qquad E_2 = (4, 0, 0, 1) \quad (\alpha = \pi/3)$$

avvengono nella stessa posizione, e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

5. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m, ferma nell'origine delle coordinate, viene urtata da una particella di massa a riposo $\frac{4}{5}m$ che si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v = \frac{3}{5}c$. A seguito dell'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V, assumendo assegnata m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 febbraio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

La sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro di massa, restando sempre sul piano xz, sul quale è adottato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la cui origine O coincide con il centro di massa immobile della sbarra. Il punto materiale P, di massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse w, giacente sul piano xz, perpendicolare ad AB e passante per O. Il punto P è collegato ad O da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, la cui accelerazione $\boldsymbol{g}$ è diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse z e l'ascissa ρ di P lungo l'asse w, come indicato in Fig. 1.

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $M = 6$, $m = 1$, $L = 4$, $K = 1$, $g = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

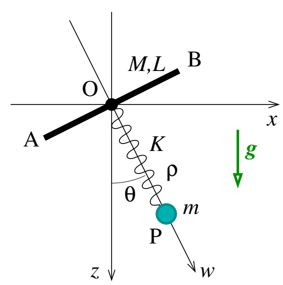


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Data la trasformazione

$$Q = p^{1/\alpha} q^{1/2}; \;\; P = -2(pq)^{1/2} \ln q$$

si dica per quali valori di α la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 giugno 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

Una guida circolare rigida, di massa M e raggio R, è vincolata a ruotare attorno al suo punto fisso O sul piano orizzontale xy, sul quale è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O. Un punto materiale P di massa m può scorrere senza attrito lungo la guida circolare. Il punto P è collegato da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica K al punto H, proiezione ortogonale di P sulla retta $x = a$, con $a > 2R$. Sia C il centro della guida circolare. Si adottino come variabili lagrangiane l'angolo θ che il diametro OA della guida circolare forma con il verso positivo dell'asse x e l'angolo ϕ che il segmento CP forma con il verso positivo dell'asse ξ, parallelo all'asse x e passante per il punto C (si veda la Fig. 1).

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $a = 3R$, $M = 2m$, $K/m = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

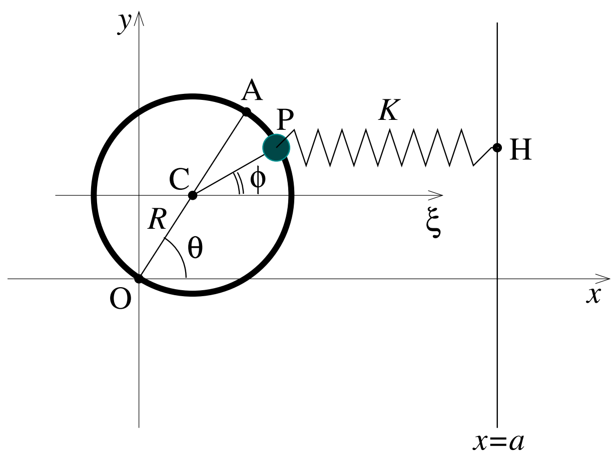


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Si determini per quale valore del parametro reale α la trasformazione

$$Q = \left(\frac{p}{2q}\right)^{\alpha}$$

$$P = -3\left(\frac{q^2 p}{2}\right)^{2\alpha}$$

è canonica e, in corrispondenza di tale valore, si trovi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

ESERCIZIO 3

Due particelle relativistiche di massa m e velocità $v_1 = \frac{12}{13}c$ e $v_2 = \frac{5}{13}c$ si muovono nel verso positivo dell'asse x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano, con la particella più veloce che segue la più lenta, di modo che ad un certo istante esse si urtano. A seguito dell'urto tra le due particelle, si forma un'unica particella di massa M e velocità u.

- Si determini u.
- Si determini il valore del rapporto M/m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 14 luglio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. Sia S il punto dell'asta che si trova a distanza $3d$ dal punto A, con $L = 4d$. Il punto S dell'asta è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z, ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine: $\underline{F_1} = -k\overline{OS}$, $k > 0$. L'estremo A è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'asse delle x: $\underline{F_2} = -k\overline{HA}$, $k > 0$, ove H è la proiezione del punto A sull'asse delle x (vedi figura). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane la coordinata z di S e l'angolo ϕ che SA forma con l'asse z.

1. Scrivere la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero al variare di k.

3. Posto in questa domanda $M = 3$, $d = 1$, $k = 2$, $g = 3$, studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio e, scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. $I_G = \frac{ML^2}{12}$ (G= baricentro). Ricordiamo che la forza peso è presente.

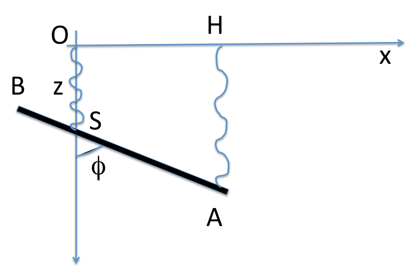


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/4$ per un tempo $2T$, poi si ferma. La seconda si muove, nello stesso verso della prima, con velocità $c/2$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e si dirige verso la prima astronave con velocità $-c/2$ fino a quando la incontra, e lì si ferma.

1. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Quando si incontrano li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. In ognuna delle due astronavi c'è una telecamera che mostra il quadrante di un orologio e ne invia l'immagine a terra mediante un segnale elettromagnetico. Al tempo T (misurato a terra) dopo la partenza delle astronavi, queste immagini vengono osservate e confrontate. Quanto tempo segnano gli orologi mostrati nelle immagini?

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 1 settembre 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove un'asta rigida, omogenea e pesante AB, di massa m e lunghezza l. L'estremo A dell'asta può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,OA$, $k > 0$. L'estremo B è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,HB$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che l'asta AB forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

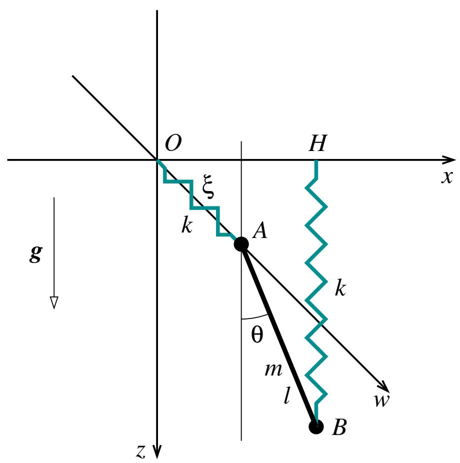


Fig. 1

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di k.

3. Ponendo ora $m = 2$, $l = 1$, $k = 2$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa è $I_G = \frac{ml^2}{12}$ (G= centro di massa di AB). Si ricordi che la forza peso è presente.

ESERCIZIO 2

Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (x, y, z, ct) i due eventi $E_1 = (1, 5, 3, 2)$ e $E_2 = (3, 5, 3, \alpha)$, con α parametro reale.

1. Per quali valori di α esiste un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei?

2. Trovare, in funzione dei valori di α ammissibili, la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di tale sistema di riferimento.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 22 novembre 2017
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una guida circolare rigida, omogenea, di centro C, massa M e raggio R. Il punto A della guida circolare è vincolato a scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,\mathrm{OA}$, $k > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto rispetto ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\mathrm{HB}$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sulla retta $x = a$ (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse passante per A e perpendicolare al piano assegnato.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 2$, $a = R = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa, coincidente con il centro C, è $I_{\mathrm{C}} = MR^2$.

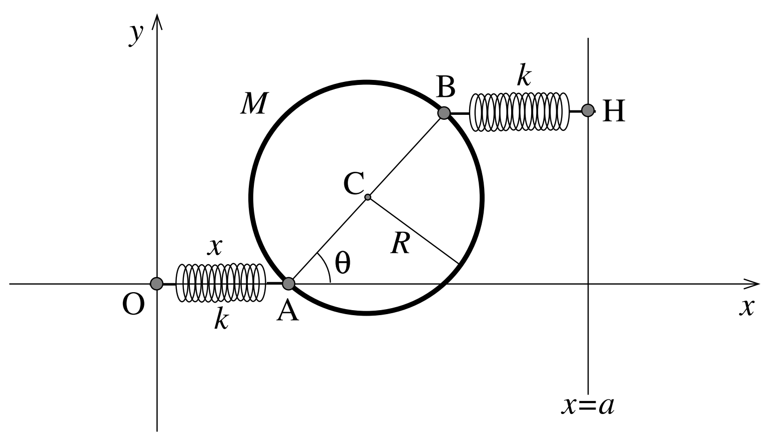


Fig. 1

Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica del 17 gennaio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = q^{\alpha} \log p$$
$$P = -q\, p^{\beta}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F(q, Q)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell?ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (1, 1, 0, 0) \qquad E_2 = (4, 1, 1, 0)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale $c\delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono all'istante $t = 0$ dall'origine O di un sistema di coordinate cartesiane fissato sul piano Oxy. L'astronauta A percorre un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{4}$, e ritorna in O percorrendo un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{4}$. La traiettoria dell'astronauta A è dunque un quadrato. L'astronauta B percorre in andata e ritorno la diagonale dello stesso quadrato, con velocità $\frac{c\sqrt{2}}{6}$. Verificare che i due astronauti impiegano lo stesso tempo T (misurato da un orologio rimasto in quiete in O) per completare i rispettivi tragitti e determinare T. Quando i due astronauti si incontrano nuovamente in O, confrontano i loro orologi, che segnano, rispettivamente, τ_A e τ_B. Determinare τ_A e τ_B e indicare quale dei due tempi è il più piccolo.

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = \gamma x^4$, dove $\gamma > 0$ è un parametro dimensionale. La massima distanza dall'origine raggiunta dalla particella è d. Determinare la velocità v_0 con la quale la particella transita per l'origine. Sotto quale condizione su d si recupera il risultato classico per v_0?

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = -\frac{3}{5}c$ e collide con una particella di massa a riposo $\frac{3}{4}m$ che viaggia sempre lungo l'asse x con velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$. In seguito all'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 6 febbraio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

ESERCIZIO 1: MECCANICA LAGRANGIANA

In un piano verticale, in cui è fissato un sistema di assi cartesiani Oxz, con l'asse z verticale discendente, si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida circolare γ, di centro O e raggio $R = L$. L'estremo B dell'asta è soggetto alla forza $\underline{F_e} = -K\,\mathrm{HB}$, $K > 0$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse x. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che OA forma con l'asse z e l'angolo ϕ che AB forma con la verticale discendente (si veda la Fig. 1). Sia $g > 0$ l'intensità dell'accelerazione di gravità. Nello svolgimento, per comodità, si ponga $Mg = fKL$, $f > 0$.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema (per mancanza di tempo, non sono richieste le equazioni del moto).
2. Si trovino le otto posizioni di equilibrio del sistema e si discuta, al variare di $f > 0$, la stabilità di quelle con $\theta, \phi \in [0, \pi]$, le altre essendo equivalenti a queste per simmetria.
3. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = R = 1$, $g = 6$ (ovvero $f = 6$), si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{12} ML^2$.

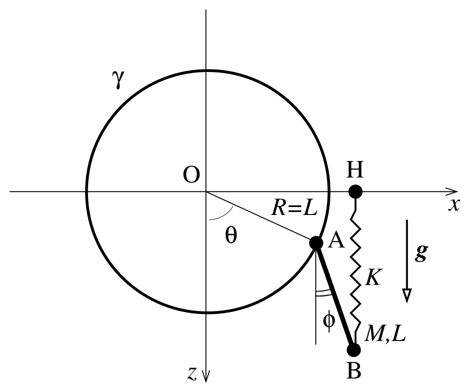


Fig. 1

ESERCIZIO 2: TRASFORMAZIONI CANONICHE

Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{3}\, q^{-1/2}\, p^{\alpha}$$
$$P = q^{3/2}\, p^{\beta}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

ESERCIZIO 3: RELATIVITÀ RISTRETTA

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (ct, x, y, z) i due eventi $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $E_2 = (4, \alpha, \alpha, 0)$.

1. Determinare per quali valori di α esistono sistemi di riferimento inerziali in cui i due eventi sono simultanei.
2. Trovare la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di uno di questi sistemi di riferimento in funzione di α.
3. Posto $\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}}$, determinare la distanza spaziale tra i due eventi nel sistema di riferimento in cui sono simultanei.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 20 Febbraio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

ESERCIZIO 1: MECCANICA LAGRANGIANA E HAMILTONIANA

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -K\,\mathrm{OG}$, $K > 0$. L'estremo B dell'asta è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -K\,\mathrm{PB}$, $K > 0$, dove P è il punto di coordinate $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di G e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si ricavi l'espressione dei momenti coniugati, p_x e p_θ, e della Hamiltoniana H.
3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
4. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = a = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{12} M L^2$.

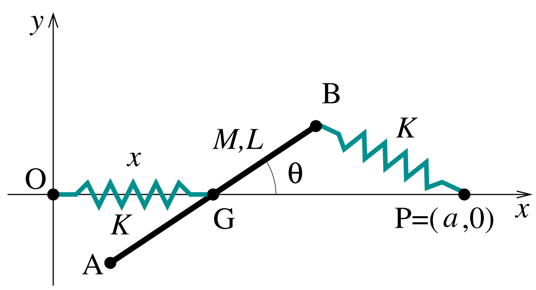


Fig. 1

ESERCIZIO 2: TRASFORMAZIONI CANONICHE.

Data la trasformazione

$$Q = e^{2q}\, p^\alpha$$
$$P = \beta\, p^2\, e^{-2q}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

ESERCIZIO 3: RELATIVITÀ RISTRETTA

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con una velocità pari a $c/2$. Dopo un intervallo tempo $T_0 = 1$ anno, dalla Terra viene inviato un messaggio radio con il quale si richiede che l'astronave torni indietro. Appena ricevuto il messaggio, l'astronave inverte la direzione del moto e si dirige verso la Terra con una velocità pari a $2c/3$.

1. Determinare, nel sistema di riferimento della Terra, quanto tempo è trascorso dalla partenza quando l'astronave riceve il messaggio, e che distanza essa ha percorso in quell'istante.
2. Quando l'astronave torna sulla Terra, gli astronauti confrontano il loro orologio con un orologio rimasto sulla Terra. Quale orologio ha segnato meno tempo, e di quanto?

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oy. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il punto B del disco, diametralmente opposto ad A, è attratto verso il punto fisso P$=(a,0)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PB}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di A e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con il verso positivo dell'asse Oy (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a/R \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $a = R = 1$, $K = 1$, $M = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}MR^2$.

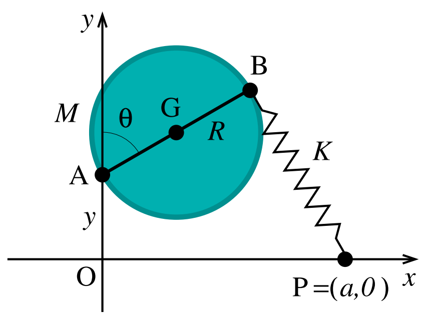


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} p^{-\frac{2}{9}}$$

$$P = 3\,p^{-\left(\frac{2\mu+3}{9}\right)} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{6}}$$

dalle variabili canoniche Q, p alle variabili q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, μ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{3}{5}c$. Quando a bordo è trascorso un tempo $4T_0$ (con $T_0 = 1$ anno), l'astronave inverte il verso del moto e torna a Terra, muovendosi con velocità $v_2 = \frac{c}{2}$. Determinare, al ritorno a Terra dell'astronave, quanto tempo è trascorso dalla sua partenza nel sistema di riferimento solidale con la Terra, e nel sistema di riferimento solidale con l'astronave.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

1. Si ha $x_G = R\sin\theta$, $y_G = y + R\cos\theta$, $x_B = 2R\sin\theta$, $y_B = y + 2R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(y^2 + 4Ry\cos\theta - 4Ra\sin\theta\right) + 4R^2 + a^2.$$

La funzione di Lagrange è $L = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{y} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(y + 2R\cos\theta\right), \qquad M\left(\frac{3}{2}R^2\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\ddot{y}\right) = 2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K(y + 2R\cos\theta), \qquad \partial_\theta U = -2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = -2R\cos\theta, \qquad (2R\sin\theta - a)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $y_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $y_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{2R}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $y_3 = -\sqrt{4R^2 - a^2}$ e $y_4 = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-1 < \frac{a}{2R} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -2 < \frac{a}{R} < 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = 2KR\left(a\sin\theta - y\cos\theta\right), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -2KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2K^2R(a - 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{R} > 2$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2K^2R(a + 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\frac{a}{R} < -2$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $-2 < \frac{a}{R} < 2$.
Riassumendo, per $\frac{a}{R} < -2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile; per $-2 < \frac{a}{R} < 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{R} > 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.

3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = -MR\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$R^2\left(K - M\omega^2\right)\left(4K - \frac{3}{2}M\omega^2\right) - a^2\left(K - \frac{1}{2}M\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 18\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.717,\ \omega_-^2 = 0.8835.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.648$ e $\omega_- = 0.9399$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha\, q^6\, p^{4/3}, \\ P &= 3\, q^\mu\, p^{-1/3}. \end{aligned}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\mu = -5$ e $\alpha = \frac{1}{14}$. Sappiamo che

$$dF_2(q,P) \;=\; p\,dq \;+\; Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Ottrniamo:

$$\begin{aligned} p &= 27\, q^{-15}\, P^{-3}, \\ Q &= \frac{81}{14}\, p^{-4}\, q^{-14}, \end{aligned}$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q,P) = -\frac{27}{14}\, q^{-14}\, p^{-3}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Prendendo come origine del tempo coordinato t e del tempo proprio dell'astronave τ l'istante in cui l'astronave parte, siano t_1, τ_1 il tempo coordinato e il tempo proprio nel momento in cui questa inverte il suo senso di marcia, e siano t_2, τ_2 il tempo coordinato e il tempo proprio al ritorno a terra. Sarà, essendo $v_1 = \frac{3}{5}c$ e $v_2 = \frac{c}{2}$,

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\, t_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}\, t_1 = \frac{4}{5} t_1 = 4T_0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 5T_0\,,$$

la posizione dell'astronave quando inverte il senso di marcia sarà

$$\bar{x} = v_1 t_1 = 3cT_0\,.$$

Nel viaggio di ritorno l'astronave impiega un tempo coordinato

$$t_2 - t_1 = \frac{\bar{x}}{v_2} = 6T_0$$

e un tempo proprio

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\, 6T_0 = 3\sqrt{3}T_0\,,$$

quindi

$$t_2 = 6T_0 + 5T_0 = 11T_0\,, \qquad \tau_2 = (3\sqrt{3} + 4)T_0\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata rigida e omogenea, ABCD, di lato L e massa M. Il vertice A della lamina è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. La lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il vertice C della lamina è attratto verso il punto fisso P$= (0, a)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,$PC, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la diagonale AC della lamina forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{a}{L} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\frac{a}{L} = 1$, $\frac{K}{M} = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{6}ML^2$.

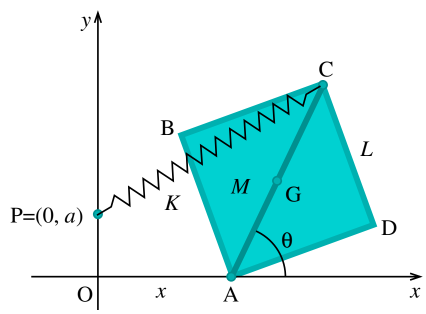


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = 2\,(36)^\gamma\, P^{2\gamma}\, e^{(\alpha - 2\beta\gamma)\, q}$$
$$p = 36\, P^2\, e^{-2\beta\, q}$$

dalle variabili canoniche P, q alle variabili Q, p, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Siano dati i due eventi

$$E_1 = (2\alpha, 1, \alpha, 3)\,, \qquad E_2 = (\alpha, 1, 1, 3)$$

1. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono contemporanei, e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

3. Nel caso $\alpha = 2$, determinare la separazione temporale tra gli eventi nel sistema di riferimento in cui questi avvengono nella stessa posizione.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm G} = x + \frac{\sqrt{2}}{2} L\cos\theta$, $y_{\rm G} = \frac{\sqrt{2}}{2} L\sin\theta$, $x_{\rm C} = x + \sqrt{2}L\cos\theta$, $y_{\rm C} = \sqrt{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{3}L^2\,\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}L\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_{\rm C}-x_{\rm P})^2 + (y_{\rm C}-y_{\rm P})^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2\sqrt{2}Lx\cos\theta - 2\sqrt{2}La\sin\theta\right) + \frac{1}{2}K\left(2L^2+a^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right),$$

$$M\left(\frac{2}{3}L^2\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{x}\right) = \sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = -\sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\sqrt{2}L\cos\theta, \qquad \left(\sqrt{2}L\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{\sqrt{2}a}{2L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $x_3 = -\sqrt{2L^2 - a^2}$ e $x_4 = \sqrt{2L^2-a^2}$. Poiché la traccia assegna $a \geq 0$, aueste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}a}{2L} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \sqrt{2}KL\left(a\sin\theta - x\cos\theta\right), \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -\sqrt{2}KL\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $\sqrt{2}K^2L(a-\sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-\sqrt{2}K^2L(a+\sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{a}{L} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $2K^2L^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{2}{3}ML^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}ML\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 2KL^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij}-\omega^2 T_{ij}|=0$ dà

$$2\left(\frac{K}{M}-\omega^2\right)\left(\frac{K}{M}-\frac{1}{3}\omega^2\right)-\left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{K}{M}-\frac{1}{2}\omega^2\right)^2=0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4-20\,\omega^2+12=0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2=2\left(1\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\qquad\Rightarrow\qquad\omega_+^2=3.265,\,\omega_-^2=0.735.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+=1.807$ e $\omega_-=0.857$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$Q=2\,e^{\alpha q}\,p^\gamma,$$
$$P=\frac{1}{6}\,e^{\beta q}\,p^{1/2}.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\alpha=-\beta=3$ e $\gamma=\frac{1}{2}$. Sappiamo che

$$dF_2(q,P)\;=\;p\,dq\;+\;Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Otteniamo:

$$p=36\,e^{6q}\,P^2,$$
$$Q=12\,P\,e^{6q},$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q,P)=6\,e^{6q}\,P^2.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\Delta E=(\alpha,0,\alpha-1,0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$\Delta E^2=\alpha^2-(\alpha-1)^2=2\alpha-1\,.$$

1. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei se $\Delta E^2<0$ ovvero $\alpha<\frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v}=(0,\beta c,0)$, tale che

   $$\Delta E_0'=\gamma(\Delta E_0-\beta\Delta E_2)=\gamma(\alpha-\beta(\alpha-1))=0$$

   ovvero

   $$\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}\,.$$

2. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione se $\Delta E^2>0$ ovvero $\alpha>\frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v}=(0,\beta c,0)$, tale che

   $$\Delta E_2'=\gamma(\Delta E_2-\beta\Delta E_0)=\gamma(\alpha-1-\beta\alpha)=0$$

   ovvero

   $$\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha}\,.$$

3. Se $\alpha = 2$, per

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

gli eventi avvengono nella stessa posizione, con separazione temporale

$$\Delta E_0' = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0\,.$$

Essendo $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, $\Delta E_0' = \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - 1/2) = \sqrt{3}$. A questo risultato si arrivava anche osservando che nel riferimento in cui $\Delta E_2' = 0$, $\Delta E_0' = \sqrt{\Delta E^2} = \sqrt{2\alpha - 1} = \sqrt{3}$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 7 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G, massa M e raggio R. Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB, rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = \frac{R}{2}$ dall'estremo A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy, passante per C, ed è soggetto alle due forze attive $\underline{F}_{\mathrm{a}} = -K\,\mathrm{H_a A}$ e $\underline{F}_{\mathrm{b}} = -K\,\mathrm{H_b B}$, con $K > 0$, dove $\mathrm{H_a}$ è la proiezione ortogonale di A sulla retta $x = -\gamma$ e $\mathrm{H_b}$ è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{\gamma}{R} \in (0, +\infty)$.

3. Ponendo ora $\gamma = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \left(M + \frac{m}{3}\right) R^2$.

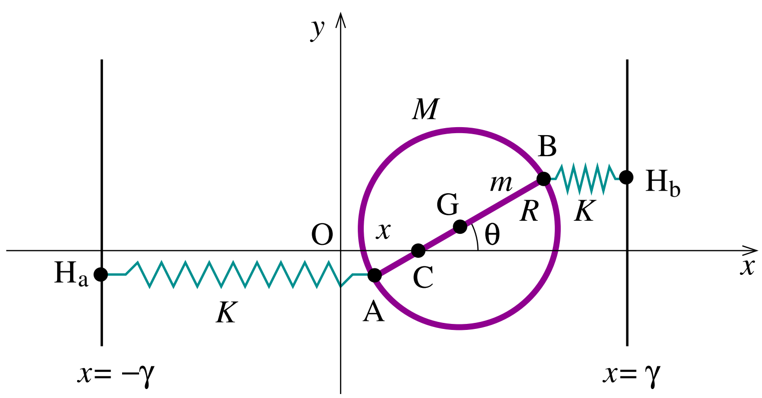


Fig. 1

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Si ha $x_{\rm G} = x + \frac{R}{2}\cos\theta$, $y_{\rm G} = \frac{R}{2}\sin\theta$, $x_{\rm A} = x - \frac{R}{2}\cos\theta$, $x_{\rm B} = x + \frac{3R}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[(M+m)\,\dot{x}^2 + \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2\,\dot{\theta}^2 - (M+m)R\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_{\rm A} - x_{\rm H_a})^2 + (x_{\rm B} - x_{\rm H_b})^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x - \frac{R}{2}\cos\theta + \gamma\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(x + \frac{3R}{2}\cos\theta - \gamma\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$(M+m)\left(\ddot{x} - \frac{R}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{R}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(2x + R\cos\theta\right),$$

$$\left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2\,\ddot{\theta} - \frac{M+m}{2}R\sin\theta\,\ddot{x} = \frac{KR}{2}\sin\theta\left(2x + 5R\cos\theta - 4\gamma\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(2x + R\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = \frac{KR}{2}\sin\theta\left(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\frac{R}{2}\cos\theta, \qquad (2x + 5R\cos\theta - 4\gamma)\sin\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = -\frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{\gamma}{R}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = -\frac{\gamma}{2}$. Poiché la traccia assegna $\gamma > 0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = 2K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{KR}{2}\left[(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta)\cos\theta + 5R\sin^2\theta\right], \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $4K^2R(\gamma - R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{\gamma}{R} > 1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-4K^2R(\gamma + R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{\gamma}{R} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{\gamma}{R} \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{\gamma}{R} > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M + m = 4, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2 = \frac{13}{3}, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{R}{2}(M+m)\sin\theta = -2\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{5}{2} K R^2 \sin^2\theta = \frac{5}{2}\sin^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KR\sin\theta = -\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2 - 4\,\omega^2\right)\left(\frac{5}{2}\sin^2\theta - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \left(1 - 2\,\omega^2\right)^2 \sin^2\theta = 0,$$

dove $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{\gamma^2}{R^2} = \frac{5}{9}$ nelle posizioni di equilibrio 3,4. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$34\,\omega^4 - 27\,\omega^2 + 5 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{27 \pm 7}{68} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{5}{17}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$ e $\omega_- = \sqrt{\frac{5}{17}} \approx 0.542$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{\gamma}\, q^{\beta} \ln p$$
$$P = q\, p^{\alpha}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_4(p, P)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (-1, 1, 1, 3) \qquad E_2 = (4, 1, 1, -1)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale $c\Delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono da terra, muovendosi lungo l'asse x in versi opposti; l'astronave di A ha una velocità di modulo $c/2$, l'astronave di B ha una velocità di modulo $c/3$. Ognuno dei due astronauti, quando il proprio orologio indica che è trascorso un tempo $\tau_0 = 1$ anno dalla partenza, inverte istantaneamente il verso del proprio moto, tornando a terra. Qual è la differenza tra i tempi di arrivo T_A e T_B dei due astronauti, misurata da un orologio rimasto in quiete a terra?

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = A\,x$, con $A > 0$. Ad un certo istante, la particella transita per l'origine con velocità $v_0 > 0$. Si determini l'ascissa massima x_M raggiunta dalla particella in funzione di v_0; si determini quindi v_0, sapendo che $A\,x_M = \frac{1}{4}mc^2$.

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo $m_1 = \frac{27}{20}m$ si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ ed urta una particella di massa $m_2 = \frac{3}{4}m$ a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Soluzioni della prova in itinere di MAR del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = 1 = \frac{\beta\alpha}{\gamma} q^\beta p^{\alpha-1} \ln p - \frac{1}{\gamma} p^{\alpha-1} q^\beta$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. la trasformazione canonica risulta quindi essere:

$$\begin{aligned} Q &= -\ln p \\ P &= q\,p \end{aligned}$$

Il differenziale $dF_4(p,P) = -q\,dp + Q\,dP$ ci dice che F_4 si ottiene integrando $-q\,dp$ a P fissato o $Q\,dP$ a p fissato, considerando $q = q(p,P)$ e $Q = Q(p,P)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} F_4(p,P) &= -\int \frac{P}{p} dp = -P \ln p \\ F_4(p,P) &= -\int \ln p\, dP = -P \ln p \end{aligned}$$

2. Trasformazioni di Lorentz. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1 E_2} = (5, 0, 0, -4)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1 E_2}|^2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Nel riferimento di partenza $c\Delta t = 5$, $\Delta z = -4$, mentre $\Delta x = \Delta y = 0$, quindi il riferimento cercato è in moto lungo l'asse z rispetto a quello di partenza, e le sue coordinate si ottengono con una trasformazione di Lorentz speciale

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned}$$

con $\vec{v} = (0,0,v)$ velocità del nuovo riferimento rispetto al vecchio, e $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Nel nuovo riferimento i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, quindi

$$\Delta z' = \gamma\left(\Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t\right) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t = -4 - \frac{v}{c} 5 = 0$$

quindi

$$v = -\frac{4}{5} c \qquad \gamma = \left(1 - \frac{16}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{3}\,.$$

La separazione temporale nel nuovo riferimento è

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta z\right) = \frac{5}{3}\left[5 - (-4/5)(-4)\right] = 3\,.$$

3. Cinematica Relativistica. Prendiamo come origine dei tempi propri e coordinati l'evento O di partenza degli astronauti da terra. Quando l'astronauta A inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_A = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2\tau_0}{\sqrt{3}}\,.$$

Quando l'astronauta B inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_B = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{3\tau_0}{2\sqrt{2}}\,.$$

Il ritorno a terra dell'astronauta A avviene al tempo coordinato (che è anche il tempo misurato da un orologio rimasto a terra) $T_A = 2t_A$, mentre il ritorno a terra dell'astronauta B avviene al tempo coordinato $T_B = 2t_B$. La differenza tra questi due tempi è

$$T_A - T_B = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\tau_0 = 0.188\,\tau_0 = 0.188 \text{ anni}\,.$$

4a. Dinamica relativistica. L'ascissa in questione è quella del punto di inversione del moto. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = A\,x_M + mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_M = \frac{mc^2}{A}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Per la condizione posta dal problema

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{3}{5}c.$$

4b. Urti. Il fattore γ_1 della particella 1 risulta essere $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$. I due quadrimpulsi risultano quindi:

$$\begin{aligned} p_1 &= (\frac{5}{3} \times \frac{27}{20}\,mc, \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} \times \frac{27}{20}\,mc, 0, 0) = (\frac{9}{4}\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0) \\ p_2 &= (\frac{3}{4}\,mc, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

e per la legge di conservazione del quadrimpulso:

$$p_1 + p_2 = (3\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0) = (\Gamma Mc, \Gamma MV, 0, 0)$$

dalla quale si ottiene:

$$\begin{aligned} \Gamma M &= 3m \\ \Gamma M \frac{V}{c} &= \frac{9}{5}m \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} \frac{V}{c} &= \frac{3}{5}, \\ \Gamma &= \frac{5}{4}, \\ M &= \frac{12}{5}m. \end{aligned}$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 29 gennaio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con asse z verticale discendente, si muove il sistema rigido formato da una guida circolare omogenea, di raggio R e massa m, e da una barra omogenea, di lunghezza $2R$ e massa m, saldata sul diametro AB della guida circolare (si veda la Fig. 1). Il punto A del sistema è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Oz. Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OA}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HG}$, dove G è il centro di massa del sistema e H è la proiezione ortogonale di G sull'asse Ox, e la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse Oz. Si indichi con $g > 0$ il valore dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di A e l'angolo θ che AB forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $g = 1$, $m = 1$, $R = 1$, $k = 4$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia sistema rigido guida+barra rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{4}{3}mR^2$.

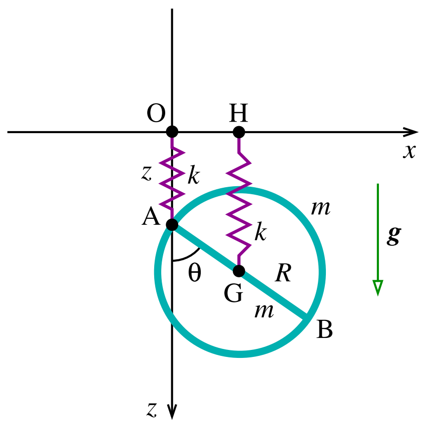


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Data la trasformazione

$$p = \frac{1}{\alpha}\ln(2\,Q\,q^{-3/2})$$
$$P = \frac{1}{3}\,(2\,Q)^{6/\alpha}\,q^{\beta-(9/\alpha)}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $c/4$. Dopo un tempo $T = 1$ anno, da terra viene inviato un segnale elettromagnetico verso l'astronave. Quando l'astronave riceve il segnale, essa inverte il verso del moto, tornando verso terra con velocità $c/2$. Nel momento in cui inverte il senso di marcia, l'astronave manda un segnale elettromagnetico verso terra.
1. Determinare l'intervallo di tempo, misurato da un orologio a terra, tra il ricevimento del segnale emesso dall'astronave, e l'arrivo dell'astronave stessa.
2. Determinare il ritardo tra l'orologio a terra e quello sull'astronave, misurato nell'istante in cui l'astronave è tornata a terra.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 29 gennaio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

1. Si ha $x_{\rm G} = R\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(2m)\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{z}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(2\dot{z}^2 + \frac{10}{3}R^2\,\dot{\theta}^2 - 4R\sin\theta\,\dot{z}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(z + R\cos\theta)^2 - 2mg(z + R\cos\theta).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot{z} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = g - \frac{k}{m}\left(z + \frac{R}{2}\cos\theta\right),$$

$$\frac{10}{3}R^2\,\ddot{\theta} - 2R\sin\theta\,\ddot{z} = \left[\frac{k}{m}\left(z + R\cos\theta\right) - 2g\right]R\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\left(2z + R\cos\theta\right) - 2mg, \qquad \partial_\theta U = R\sin\theta\left[2mg - k(z + R\cos\theta)\right].$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} z + \frac{R}{2}\cos\theta = \frac{mg}{k}, \\ \left(z + R\cos\theta - \frac{2mg}{k}\right)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $z_1 = \frac{mg}{k} - \frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $z_2 = \frac{mg}{k} + \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta_{3,4} \neq 0$, $z_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{2mg}{kR}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{2mg}{kR} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = R\cos\theta\left[2mg - k(z + R\cos\theta)\right] + kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -kR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} - \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_1, θ_1) è stabile per $\lambda > \frac{1}{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} + \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{1}{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.

3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{z}\dot{z}} = 2m \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{10}{3}mR^2, \qquad T_{\dot{z}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{z}} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = kR^2\sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -kR\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$2\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{3k}{4m} - \frac{10}{3}\omega^2\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{k}{m} - 2\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$11\,\omega^4 - 62\,\omega^2 + 36 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{31 \pm \sqrt{565}}{11} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 4.98,\;\; \omega_-^2 = 0.657.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 2.23$ e $\omega_- = 0.811$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q in funzione di p e q otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\,q^{3/2}\,e^{\alpha p} \\ P &= \frac{1}{3}\,q^{\beta}\,e^{6p} \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P] = q^{\beta+3/2-1}\,e^{(\alpha+6)p}\,\frac{1}{6}(9-\alpha\beta) = 1.$$

che implica $\alpha = -6$, $\beta = -\frac{1}{2}$. La trasformazione è quindi canonica se

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\,q^{3/2}\,e^{-6p} \\ P &= \frac{1}{3}\,q^{-1/2}\,e^{6p}. \end{aligned} \tag{2}$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6}\,\ln(3\,q^{1/2}\,P) \\ Q &= \frac{1}{6}\,\frac{q}{P}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sappiamo che $dF_2(q,P) \;=\; p\,dq \,+\, Q\,dP$ e quindi:

$$\begin{aligned} F_2(q,P) &= \int \frac{1}{6}\,\frac{q}{P}\,dP \,+\, f(q) \\ F_2(q,P) &= \int \frac{1}{6}\,\ln P dq \,+\, \int \frac{1}{12}\,\ln q\,dq \,+\, \frac{1}{6}\,q\,\ln 3 \end{aligned} \tag{4}$$

$\Rightarrow f(q) \;=\; \int \frac{1}{12}\ln q\,dq \,+\, \frac{1}{6}\,q\,\ln 3 \;\Rightarrow$

$$F_2(q,P) \;=\; \frac{1}{6}\,q\,\ln P \,+\, \int \frac{1}{12}\,\ln q\,dq \,+\, \frac{1}{6}\,q\,\ln 3.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Fissiamo l'origine degli orologi a terra e sull'astronave al momento della partenza, e sia $x = 0$ la posizione della terra. Sia A l'evento in cui l'astronave è raggiunta dal segnale elettromagnetico. Il tempo t_A e la posizione x_A di questo evento si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x_A &= c(t_A - T) \\ x_A &= \frac{c}{4}t_A\,, \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$t_A = \frac{4}{3}T\,, \quad x_A = \frac{c}{3}T\,.$$

1. Siano B l'evento del ricevimento a terra del segnale dall'astronave, e C l'evento del ritorno a terra dell'astronave. Poichè il segnale viene emesso in A,

$$\begin{aligned} t_B &= t_A + \frac{x_A}{c} = \frac{4}{3}T + \frac{1}{3}T = \frac{5}{3}T \\ t_C &= t_A + \frac{x_A}{c/2} = \frac{4}{3}T + \frac{2}{3}T = 2T \end{aligned}$$

quindi

$$t_C - t_B = \frac{1}{3}T\,.$$

2. Sia $v_1 = c/4$ la velocità nel tratto OA, $v_2 = c/2$ la velocità nel tratto AC. L'orologio sull'astronave, nell'evento A, misura il tempo proporio

$$\tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}t_A = \sqrt{1 - \frac{1}{16}}\frac{4}{3}T = \frac{\sqrt{15}}{3}T\,.$$

L'intervallo di tempo proprio sull'astronave tra A e C è

$$\tau_C - \tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}(t_C - t_A) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\left(2T - \frac{4}{3}T\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3}T = \frac{\sqrt{3}}{3}T\,,$$

quindi

$$\tau_C = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{3}T \simeq 1.87T$$

e il ritardo è

$$t_C - \tau_C = 2T - 1.87T = 0.13T\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida quadrata omogenea ABCD, di lato a e massa m. Il punto medio M del lato AB della guida quadrata è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox, e la guida quadrata è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per M (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OM}$, con $k > 0$, e $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sulla retta $y = d$ (con $d > 0$). Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di M e l'angolo θ che il lato AB della guida quadrata forma con il verso positivo dell'asse Ox.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{a}{d} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 1$, $m = 1$, $a = 4$, $d = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della guida quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{4}{3}ma^2$.

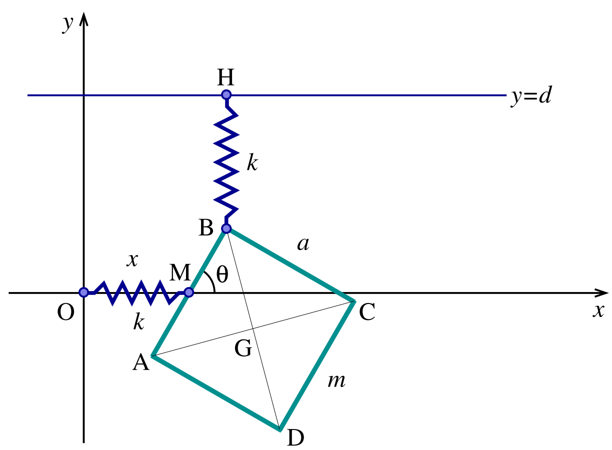


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{3}\,q^{\alpha}\left(1 - \frac{\gamma^2 p^2}{2}\right)$$
$$P = 2\,\gamma\,q^{\beta}\,p$$

dalle variabili q, p alle variabili Q, P. Dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica. (Si suggerisce, nel calcolo della funzione generatrice, di integrare le espressioni di $\frac{\partial F_2}{\partial q}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial P}$, trovandone le soluzioni generali, e imporre che siano la stessa funzione; in alternativa, eseguire il calcolo dell'integrale di linea lungo una linea scelta in modo tale da rendere semplice il calcolo).

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m_1 si muove lungo l'asse x con velocità v_1 ed urta una particella di massa m_2 a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Sapendo che $v_1 = \frac{2}{3}c$ e $\frac{m_1}{M} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, determinare V e $\frac{m_2}{M}$.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm M} = x$, $y_B = \frac{a}{2}\sin\theta$, $x_{\rm G} = x + \frac{a}{2}\sin\theta$, $y_{\rm G} = -\frac{a}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{19}{12}a^2\,\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{a}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{m}\,x,$$

$$\frac{19}{12}a^2\,\ddot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{x} = \frac{ka}{2m}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\cos\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx, \qquad \partial_\theta U = \frac{ka}{2}\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{2d}{a}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{2d}{a} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \geq 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ e $\partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$.
Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda < 2$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ si ha $\partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \geq 2$.
Riassumendo, per $0 < \lambda < 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $\lambda \geq 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = m \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{19}{12}ma^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = \frac{ma}{2}\cos\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 0.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij}-\omega^2 T_{ij}|=0$ dà

$$\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{k}{m}\cos^2\theta-\frac{19}{3}\omega^2\right)-\cos^2\theta\,\omega^4=0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$67\,\omega^4-85\,\omega^2+9=0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2=\frac{85\pm\sqrt{4813}}{134}\qquad\Rightarrow\qquad\omega_+^2=1.15,\;\;\omega_-^2=0.117.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+=1.07$ e $\omega_-=0.341$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P]=\frac{2}{3}\alpha\gamma\,q^{\alpha+\beta-1}\,(1-\frac{\gamma^2\,p^2}{2})\;+\;\frac{2}{3}\beta\gamma\,q^{\alpha+\beta-1}\gamma^2\,p^2=1.$$

che implica $\alpha+\beta=1$, $\beta=\frac{\alpha}{2}$, $\frac{2}{3}\,\alpha\,\gamma=1\Rightarrow\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{9}{4}$.
Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$p=\frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}$$
$$Q=\frac{1}{3}\,q^{2/3}-\frac{P^2}{24}.$$

Sappiamo che $dF_2(q,P)\;=\;p\,\mathrm{d}q\;+\;Q\,\mathrm{d}P$ e quindi:

$$F_2(q,P)=\int\frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}dq\;+\;f(P)=\frac{P\,q^{2/3}}{3}+f(P)$$
$$F_2(q,P)=\int\left(\frac{1}{3}\,q^{2/3}-\frac{P^2}{24}\right)dP\;+\;g(q)=\frac{P\,q^{2/3}}{3}-\frac{P^3}{72}+g(q)$$

$\Rightarrow g(q)\equiv 0$ e $f(P)=-\frac{P^3}{72}$ (a meno di costanti additive) cosicché

$$F_2(q,P)=\frac{P\,q^{2/3}}{3}-\frac{P^3}{72}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Per la conservazione dell'impulso,

$$m_1\gamma_1 v_1=M\Gamma V\,.$$

Elevando al quadrato, e sapendo che $\gamma_1^2\frac{v_1^2}{c^2}=\gamma_1^2-1$, $\Gamma^2\frac{V^2}{c^2}=\Gamma^2-1$,

$$m_1^2(\gamma_1^2-1)=M^2(\Gamma^2-1)$$

ed essendo

$$\gamma_1^2=\frac{1}{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{9}{5}\qquad\Rightarrow\qquad\gamma_1^2-1=\frac{4}{5}\,,$$
$$m_1^2=\frac{9}{32}M^2\,,$$

si ha

$$\Gamma^2-1=\frac{m_1^2(\gamma_1^2-1)}{M^2}=\frac{9}{40}\qquad\Rightarrow\qquad\Gamma=\frac{7}{2\sqrt{10}}\,,$$

e

$$V^2 = \frac{\Gamma^2 - 1}{\Gamma^2} = \frac{9}{49} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{7}\,.$$

Per la conservazione dell'energia,

$$m_1\gamma_1 + m_2 = M\Gamma\,,$$

quindi

$$\frac{m_2}{M} = \Gamma - \frac{m_1}{M}\gamma_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con z verticale discendente, si muove una guida circolare rigida e omogenea, di centro G, raggio R e massa $3m$. Sul diametro AB della guida è saldata una barra rigida e omogenea di massa m. Il punto D dell'asta, a distanza $d = \frac{1}{2}R$ da A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse Oz, e il sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per D (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OD}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse Ox, e la forza peso, con $g > 0$ intensità dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di D e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema; non è richiesto di ricavare le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 4$, $m = 1$, $R = 4$, $g = 9$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{10}{3}mR^2$.

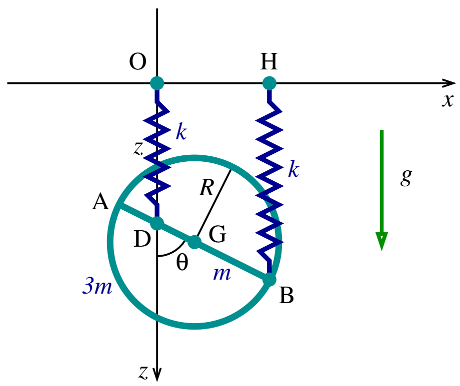


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

È data la trasformazione

$$p = \frac{q^{\alpha/2}}{2Q^{1/2}}$$

$$P = \frac{B\,q^{\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha\delta}{2}\right)}}{(4Q)^{\delta/2}}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, δ, B la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkowski (ct, x, y, z) i tre eventi $E_1 = (1, 1, 0, 0)$, $E_2 = (2, 1, 4, 0)$ e $E_3 = (5, 1, 0, 3)$.
1. Determinare la velocità $\mathbf{v_1} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 sono simultanei.
2. Determinare la velocità $\mathbf{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_1, E_3 avvengono nella stessa posizione.
3. Determinare la velocità $\mathbf{v_3} = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_2, E_3 sono simultanei.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $z_{\rm D} = z$, $z_B = z + \frac{3}{2}R\cos\theta$, $x_{\rm G} = \frac{1}{2}R\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + \frac{1}{2}R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}4m\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{z}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(4\dot{z}^2 + \frac{13}{3}R^2\,\dot{\theta}^2 - 4R\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{z}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz_D^2 + \frac{1}{2}kz_B^2 - 4mgz_G = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)^2 - 4mg\left(z + \frac{1}{2}R\cos\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$. Per completezza, si riportano qui di seguito le equazioni del moto (non richieste dalla traccia):

$$2m\left(2\ddot{z} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) + 4mg,$$

$$m\left(\frac{13}{3}R^2\,\ddot{\theta} - 2R\sin\theta\,\ddot{z}\right) = \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta - 2mgR\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) - 4mg, \qquad \partial_\theta U = 2mgR\sin\theta - \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} 4z + 3R\cos\theta - 8\lambda R = 0, \\ (6z + 9R\cos\theta - 8\lambda R)\sin\theta = 0, \end{cases}$$

dove si è introdotto il parametro adimensionale $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$ suggerito dalla traccia.
La prima posizione di equilibrio è $z_1 = \frac{8\lambda-3}{4}R$ e $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $z_2 = \frac{8\lambda+3}{4}R$ e $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$.
Si hanno poi due posizioni di equilibrio equivalenti, $z_{3,4} = \frac{8}{3}\lambda R$, $\cos\theta_{3,4} = -\frac{8}{9}\lambda$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-\frac{8}{9}\lambda \geq -1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \leq \frac{9}{8}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{1}{4}kR\cos\theta\,(8\lambda R - 6z - 9R\cos\theta) + \frac{9}{4}kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -\frac{3}{2}kR\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ e nelle posizioni 1,2 $\partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) non è stabile per nessun $\lambda \geq 0$, mentre la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\lambda > \frac{9}{8}$.
Nelle posizioni $3, 4$ il determinante della matrice Hessiana vale $\frac{9}{4}k^2R^2\sin^2\theta \geq 0$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \leq \frac{9}{8}$.
Riassumendo, per $0 < \lambda \leq \frac{9}{8}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{9}{8}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = \frac{9}{16} < \frac{9}{8}$, quindi le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{z}\dot{z}} = 4m, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{13}{3}mR^2, \qquad T_{\dot{z}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{z}} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{9}{4} kR^2 \sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -\frac{3}{2} kR \sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2\Omega^2 - 4\omega^2\right)\left(\frac{9}{4}\sin^2\theta\,\Omega^2 - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \sin^2\theta\left(\frac{3}{2}\Omega^2 - 2\omega^2\right)^2 = 0,$$

dove $\Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$688\,\omega^4 - 524\,\Omega^2\,\omega^2 + 81\,\Omega^4 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{262 \pm \sqrt{12916}}{688}\,\Omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 \approx 0.5460\,\Omega^2,\;\; \omega_-^2 \approx 0.2156\,\Omega^2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 0.739\,\Omega$ e $\omega_- \approx 0.464\,\Omega$. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\Omega = 2$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. Esprimendo Q, P in funzione di q, p otteniamo:

$$Q = \frac{1}{4} q^\alpha p^{-2}$$
$$P = B q^{1/3} p^\delta$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q, P] = \frac{B}{4}(\alpha\delta + \frac{2}{3}) q^{(\alpha - \frac{2}{3})} p^{(\delta - 3)} = 1.$$

che implica $\alpha = \frac{2}{3}$, $\delta = 3$, $B = \frac{3}{2}$.
2. Per ottenere $F_3(p, Q)$ bisogna ricavare q e P in funzione di p e Q, in corrispondenza dei valori trovati per α, δ, B:

$$q = 8Q^{3/2}p^3$$
$$P = 3Q^{1/2}p^4$$

Sappiamo che $\mathrm{d}F_3 = -q\,\mathrm{d}p - P\,\mathrm{d}Q$ e quindi, scegliendo per esempio la spezzata $(0, 0) \longrightarrow (p, 0) \longrightarrow (p, Q)$ come cammino d'integrazione, si ottiene

$$F_3(p, Q) = -2Q^{3/2}p^4.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Le separazioni tra gli eventi sono

$$\vec{E}_{12} = (1, 0, 4, 0) \qquad \text{genere spazio (spacelike)},$$
$$\vec{E}_{13} = (4, 0, 0, 3) \qquad \text{genere tempo (timelike)},$$
$$\vec{E}_{23} = (3, 0, -4, -3) \quad \text{genere spazio (spacelike)}.$$

1. Il riferimento (ct', x', y', z') in cui E_1, E_2 sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_1 = (0, v_1, 0)$, tale che

$$c\Delta t' = \gamma_1\left(c\Delta t - \frac{v_1}{c}\Delta y\right) = \gamma_1\left(1 - \frac{4v_1}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{c}{4}\,.$$

2. Il riferimento (ct'', x'', y'', z'') in cui E_1, E_3 avvengono nella stessa posizione è in moto con velocità $\vec{v}_2 = (0, 0, v_2)$, tale che

$$\Delta z'' = \gamma_2(\Delta z - v_2\Delta t) = \gamma_2\left(3 - \frac{4v_2}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{3}{4}c\,.$$

3. Un possibile riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui E_2, E_3 sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_3 = (0, v_3, 0)$, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_1 \left(c\Delta t - \frac{v_3}{c} \Delta y \right) = \gamma_1 \left(3 + \frac{4v_1}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -\frac{3}{4} c \,.$$

Un'altra possibile soluzione prevede che il moto avvenga sul piano yz, dal punto $(0,0)$, al punto $(-4,-3)$. Ruotando gli assi sul piano (y,z) e chiamando η l'asse che passa per $(0,0)$ e $(-4,-3)$, abbiamo $\Delta\eta = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$. Allora il riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui E_2, E_3 sono simultanei è in moto con velocità la cui unica componente non nulla è v_η, lungo l'asse η, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_\eta \left(c\Delta t - \frac{v_\eta}{c} \Delta \eta \right) = \gamma_\eta \left(3 - \frac{5v_\eta}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\eta = \frac{3}{5} c \,.$$

Riproiettando sul piano xy, si trova che il sistema è in moto con velocità $\vec{v}_3{}' = (0, v_y, v_z)$, tale che

$$v_y = v_\eta \frac{(-4)}{5} = -\frac{12}{25} c \,, \qquad v_z = v_\eta \frac{(-3)}{5} = -\frac{9}{25} c \,,$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 luglio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata ABCD rigida e omogenea, di lato L e massa m. Il punto medio M del lato AB è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox e la lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per M (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OM}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HN}$, con N punto medio del lato CD e H proiezione ortogonale di N sulla retta $y = a$, con $a > 0$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di M e l'angolo θ che il segmento MN forma forma con il verso positivo dell'asse Ox.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{a}{L} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 4$, $m = 4$, $L = 4$, $a = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{6}mL^2$.

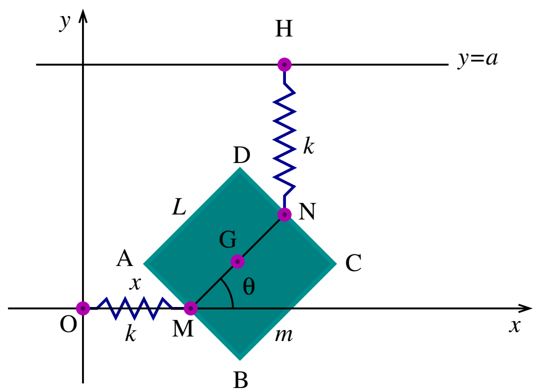


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{3}\right)^{1/3} p^{-2/3}$$
$$P = B\,p^{(\delta - 2\gamma/3)} \left(\frac{Q}{3}\right)^{\gamma/3}$$

dalle variabili p, Q alle variabili q, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali γ, δ, B la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due particelle di masse a riposo $m_1 = m_2 = m$ si muovono nel piano $x - y$, la prima con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ diretta lungo l'asse delle x, la seconda con velocità $v_2 = \frac{3}{5}c$ diretta lungo l'asse delle y. Le due particelle urtano producendo un'unica particella di massa M e velocità $\vec{V} = (V_1, V_2)$. Determinare $\lambda = \frac{M}{m}$, V_1 e V_2.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 luglio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm M} = x$, $y_N = L\sin\theta$, $x_{\rm G} = x + \frac{L}{2}\cos\theta$, $y_{\rm G} = \frac{L}{2}\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot x_{\rm G}^2 + \dot y_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \frac{5}{12}L^2\,\dot\theta^2 - L\sin\theta\,\dot\theta\,\dot x\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(L\sin\theta - a\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$m\left(\ddot x - \frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot\theta - \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot\theta^2\right) = -k\,x,$$

$$m\left(\frac{5}{12}L^2\,\ddot\theta - \frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot x\right) = -kL\left(L\sin\theta - a\right)\cos\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx, \qquad \partial_\theta U = kL\left(L\sin\theta - a\right)\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ (L\sin\theta - a)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x_{3,4} = 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{a}{L} \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \lambda \le 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = kL^2\cos^2\theta - kL\left(L\sin\theta - a\right)\sin\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ e $\partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$.
Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda > 1$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ si ha $\partial^2_{\theta\theta}U = kL^2\cos^2\theta$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \lambda \le 1$.
Riassumendo, per $\lambda > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $0 < \lambda \le 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot x\dot x} = m, \qquad T_{\dot\theta\dot\theta} = \frac{5}{12}mL^2, \qquad T_{\dot x\dot\theta} = T_{\dot\theta\dot x} = -\frac{1}{2}mL\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = k, \qquad U_{\theta\theta} = kL^2\cos^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 0.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(\Omega^2 - \omega^2\right)\left(12\,\Omega^2\cos^2\theta - 5\omega^2\right) - 3\sin^2\theta\,\omega^4 = 0,$$

dove $\Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$17\,\omega^4 - 56\,\Omega^2\,\omega^2 + 36\,\Omega^4 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{28 \pm \sqrt{172}}{17}\,\Omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.4185\,\Omega^2,\ \ \omega_-^2 = 0.8756\,\Omega^2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 1.555\,\Omega$ e $\omega_- \approx 0.9357\,\Omega$. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\Omega = 1$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. Esprimendo Q, P in funzione di q, p otteniamo:

$$Q = 3\,q^3 p^2$$
$$P = B\,q^\gamma p^\delta$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q, P] = 3B\,(3\delta - 2\gamma)\,q^{(\gamma+2)}p^{(\delta+1)} = 1.$$

che implica $\gamma = -2$, $\delta = -1$, $B = \frac{1}{3}$.
2. Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P, in corrispondenza dei valori trovati per γ, δ, B:

$$p = \frac{1}{3}q^{-2}\,P^{-1}$$
$$Q = \frac{1}{3}\,q^{-1}P^{-2}$$

Sappiamo che $\mathrm{d}F_2 = p\,\mathrm{d}q + Q\,\mathrm{d}P$ e quindi integrando $p\,\mathrm{d}q$ e $Q\,\mathrm{d}P$ e confrontando il risultato si ottiene

$$F_2(q, P) = -\frac{1}{3}q^{-1}P^{-1}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
I fattori γ_1, γ_2 delle particelle iniziali sono

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$
$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}\,.$$

I loro quadrimomenti sono $p_1 = m\gamma_1(c, v_1, 0)$ e $p_2 = m\gamma_2(c, 0, v_2)$, mentre il quadrimomento della particella finale è $P = M\Gamma(c, V_1, V_2)$ dove

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (V^2 = V_1^2 + V_2^2)\,.$$

Per la legge di conservazione del quadrimomento

$$m(\gamma_1 + \gamma_2) = M\Gamma$$
$$m\gamma_1 v_1 = M\Gamma V_1$$
$$m\gamma_2 v_2 = M\Gamma V_2\,.$$

Utilizzando la proprietà $\gamma_1^2 v_1^2 = \gamma_1^2 - 1$ (e lo stesso per le altre particelle),

$$m^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2m^2 = M^2(\Gamma^2 - 1)$$

da cui insieme alla conservazione dell'energia si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= \lambda^2(\Gamma^2 - 1) - 2 \\ (\gamma_1 + \gamma_2)^2 &= \lambda^2 \Gamma^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lambda = \sqrt{\frac{37}{6}} \quad ; \quad \Gamma = \frac{35}{12}\sqrt{\frac{6}{37}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{v_1\gamma_1}{\lambda\Gamma} = \frac{16}{35} \\ V_2 &= \frac{v_2\gamma_2}{\lambda\Gamma} = \frac{9}{35}\,. \end{aligned}$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 settembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con z verticale discendente, si muove un corpo rigido formato da due barre omogenee, AB e B$'$C, di massa M e lunghezza L, saldate nell'estremo comune B=B$'$, in modo da formare un angolo retto (si veda la Fig. 1). L'estremo A della prima barra è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oz. Il sistema è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per A. Sul sistema agiscono la forza elastica $\underline{F}_e = -K\,\mathrm{HB}$, con $K > 0$, dove H è la proiezione ortogonale di B sull'asse Ox, e la forza di gravità. Si indichi con g il valore dell'accelerazione di gravità e si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di A e l'angolo θ che il segmento AB forma forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema (non è richiesto di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
3. Ponendo ora $K = 1$, $M = 1$, $L = 2$, $g = 7\sqrt{2}$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia di una barra omogenea di massa M e lunghezza L rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}ML^2$. Per calcolare l'energia cinetica del sistema, si calcoli separatamente l'energia cinetica delle due barre, utilizzando il teorema di König, e poi si sommino i due contributi.

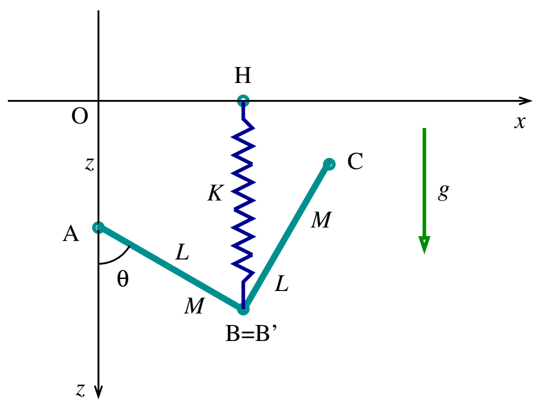


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$p = 5^{\frac{1}{\beta}}\, Q^{\frac{1}{\beta}}\, q^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$P = \gamma\, 5^{\frac{7}{\beta}}\, Q^{\frac{7}{\beta}}\, q^{5-\frac{7\alpha}{\beta}}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_4(p, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{1}{3}c$. Nel momento in cui parte, essa manda un segnale luminoso diretto lungo l'asse x. Una seconda astronave si trova in una stazione spaziale a una distanza di 1.5 anni luce dalla terra lungo l'asse x e, nel momento in cui riceve il segnale luminoso, si muove con velocità $v_2 = \frac{1}{6}c$ verso la prima astronave.
1. A che distanza dalla terra le due astronavi si incontrano?
2. Qual è la durata del viaggio della prima astronave, misurata da un orologio solidale con essa? Qual è la durata del viaggio della seconda astronave, misurata da un orologio solidale con essa?

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 settembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $z_{\rm B} = z + L\cos\theta$ e, detti G e G$'$ i centri di massa delle due barre, $x_{\rm G} = \frac{1}{2}L\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + \frac{1}{2}L\cos\theta$, $x_{\rm G'} = L\sin\theta + \frac{1}{2}L\cos\theta$, $z_{\rm G'} = z + L\cos\theta - \frac{1}{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{z}_{\rm G}^2 + \dot{x}_{\rm G'}^2 + \dot{z}_{\rm G'}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_{\rm G'}\,\dot\theta^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left[2\dot z^2 - L(3\sin\theta + \cos\theta)\,\dot\theta\,\dot z + \frac{5}{3}L^2\dot\theta^2\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K(z + L\cos\theta)^2 - Mg\left(2z + \frac{3}{2}L\cos\theta - \frac{1}{2}L\sin\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = K(z + L\cos\theta) - 2Mg, \qquad \partial_\theta U = -KL(z + L\cos\theta)\sin\theta + \frac{1}{2}MgL(3\sin\theta + \cos\theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Dalla prima equazione si ha

$$z + L\cos\theta = \frac{2Mg}{K}$$

e sostituendo nella seconda si trova

$$\sin\theta = \cos\theta.$$

Esistono quindi due posizioni di equilibrio, la prima

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2Mg}{K} - \frac{L\sqrt{2}}{2}, \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

la seconda

$$\begin{cases} z_2 = \frac{2Mg}{K} + \frac{L\sqrt{2}}{2}, \\ \theta_2 = \frac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = -KL(z + L\cos\theta)\cos\theta + KL^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}MgL(3\cos\theta - \sin\theta), \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -KL\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{zz}U > 0$, la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia positivo il determinante della matrice Hessiana

$$-K^2L(z + L\cos\theta)\cos\theta + \frac{1}{2}MgKL(3\cos\theta - \sin\theta) = -\frac{1}{2}MgKL(\cos\theta + \sin\theta).$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_1, θ_1) è instabile e la posizione di equilibrio (z_2, θ_2) è stabile.
3. Nella posizione di equilibrio stabile, per i valori assegnati dei parametri, $z_2 = 10\sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot z\dot z} = 2M, \qquad T_{\dot\theta\dot\theta} = \frac{5}{3}ML^2, \qquad T_{\dot z\dot\theta} = T_{\dot\theta\dot z} = -\frac{1}{2}ML(3\sin\theta + \cos\theta).$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio è

$$U_{zz} = K, \qquad U_{\theta\theta} = KL^2 \sin^2\theta - MgL(\cos\theta + \sin\theta), \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -KL\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà l'equazione biquadratica

$$4\,\omega^4 - 44\,\omega^2 + 21 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{22 \pm 20}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{21}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{1}{2}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 3.240$ e $\omega_- \approx 0.7071$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

1. Invertendo le relazioni date, si trova $Q = \frac{1}{5} q^\alpha p^\beta$ e $P = \gamma q^5 p^7$, da cui

$$[Q, P]_{q,p} = \frac{\gamma}{5}(7\alpha - 5\beta) q^{\alpha+4} p^{\beta+6}$$

   Imponendo che la parentesi di Poisson abbia il valore canonico si trova $\alpha = -4$, $\beta = -6$ e $\gamma = \frac{5}{2}$.

2. Si ha $dF_4 = -q dp + Q dP$, con

$$q = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/5} P^{1/5} p^{-7/5} \qquad Q = 5^{-1/5} 2^{-4/5} P^{-4/5} p^{-2/5}.$$

   Una primitiva della forma differenziale dF_4 è

$$F_4(p, P) = \left(\frac{5}{2}\right)^{4/5} P^{1/5} p^{-2/5}\,.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.

1. Prendiamo come origine dell'asse x la terra e come origine dei tempi, nel riferimento della terra, l'istante di partenza della prima astronave. Il tempo che il segnale luminoso, inviato dalla prima astronave alla partenza, impiega a raggiungere la seconda astronave è $t_0 = d/c$. Le leggi orarie del moto delle due astronavi sono

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 t && \text{(per } t > 0\text{);} \\ x_2 &= d - v_2(t - t_0) = d\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) - v_2 t && \text{(per } t > t_0\text{)}\,. \end{aligned}$$

   Esse si incontrano quando $x_1 = x_2$, ovvero

$$t = t^* = \frac{d}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) = \frac{7}{3}\frac{d}{c} = \frac{7}{2} a\,,$$

   (a=anno), ad una distanza dalla terra

$$x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*) = \frac{d v_1}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) = \frac{7}{9} d = \frac{7}{6} al\,,$$

   (al=anno luce).

2. I tempi misurati dai due orologi durante li viaggio delle sue astronavi sono

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t^* \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^* = \frac{7}{3}\sqrt{2} a\,, \\ \tau_2 &= (t^* - t_0)\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{35}}{6}(t^* - t_0) = \frac{\sqrt{35}}{3} a\,. \end{aligned}$$