Meccanica Razionale (3° Compito di esonero 31/5/94) Prof. Carlo Marchioro

1) Trovare per quali valori dei parametri α e β la seguente trasformazione da (q,p) a (Q,P) è canonica:

$$Q = p \exp\{-q\}$$
$$P = -p^{\alpha} \exp\{\beta q\}$$

Per tali valori trovare la funzione generatrice della trasformazione in q,Q.

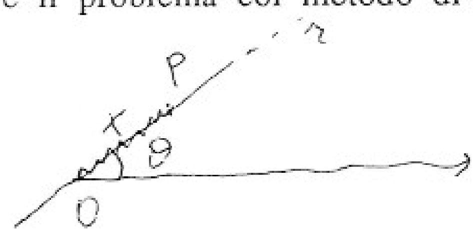
2) Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = \frac{-y^{\alpha}}{x^{\beta}+y^{\beta}} \quad ; \quad \dot{y} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}+y^{\beta}} \qquad (x,y) \in \Lambda \subset R^2$$

trovare per quale valori di α , $\beta > 0$ esso è hamiltoniano.

3) In un piano orizzontale una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L è libera di ruotare attorno al suo centro O fisso. Un punto materiale P di massa m è libero di scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea r solidale alla sbarra. Il punto è soggetto alla forza di richiamo F = - k OP , k>0. Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con un asse fisso e l'ascissa x di P sulla retta r.

a) Scrivere la Lagrangiana e Hamiltoniana del sistema.
b) Studiare il problema col metodo di Hamilton-Jacobi.



Facoltativo
Sia k=0 nel problema 3. Dimostrare che $\theta \to$ costante quando il tempo tende all'infinito.

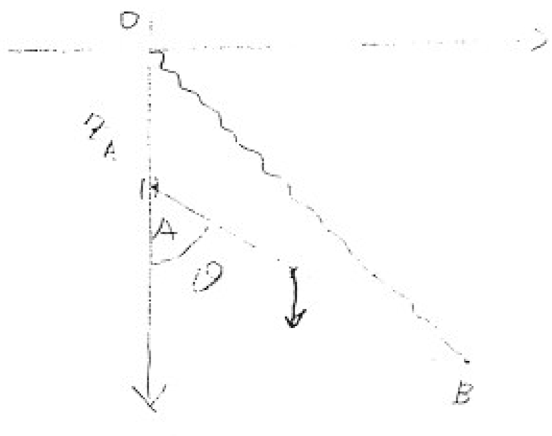
Compito di esonero di Meccanica Razionale del 12/5/94
(Prof.Carlo Marichioro)

In un piano verticale π è posta una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo un asse verticale z, mentre l'estremo B è soggetto ad una forza elastica F = - k OB , k>0 , ove O è un punto di z.
Scelte come variabili lagrangiane la quota di A e l'angolo che l'asta forma con l'asse z, si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema, discuterne il numero e la stabilità.

2) Scrivere le equazione del moto .

3) Scelta una posizione di equilibrio stabile, studiare le piccole oscillazione attorno a questa.



Meccanica Razionale : compito di esonero del 12/4/94
(Prof.C.Marchioro)

Un punto materiale di massa unitaria e di ascissa x si muove in una dimensione sotto l'azione di un campo di forze di energia potenziale

$$V(x) = x^2 (1 - a \exp\{ b x^2 \})$$

dove a e b sono due parametri reali.
Si risponda alle seguenti domande:

1) Sia $a \neq 1$, studiare la stabilità dell'origine.

2) Sia $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_o$, studiare il periodo del moto quando $b < 0$ e $v_o \to \infty$.

3) Sia $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_o$, $a > 0$, $b > 0$, discutere se esiste un valore di v_o per cui il punto va all'infinito.

Facoltativo.

Dato il sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{x} = f(y)$$

$$\dot{y} = g(x)$$

dimostrare che per ogni scelta delle funzioni $f,g \in C^2$ l'origine non è mai asintoticamente stabile.

Meccanica Razionale (~~mate~~matematici) 2/7/1991

C.Marchioro

Si risponda ai seguenti quesiti:

a) Un punto materiale P di ascissa x e massa m si muove lungo una retta soggetto ad una forza di energia potenziale

$V(x) = - x^2 + \lambda x^4 \quad ; \lambda > 0$

Discutere il moto e l'eventuale periodo in funzione dei dati iniziali.

b) Un disco omogeneo di massa M , raggio R è libero di ruotare in un piano orizzontale senza attrito attorno al suo centro fisso O. Sul bordo del disco vi è una guida circolare lungo la quale è libero di scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Il punto materiale è soggetto a due forze elastiche $\underline{F} = - k\,HP$, $k>0$, ove H è un punto del disco sul bordo esterno., e $\underline{G} = - k\,P'P$, essendo P' la proiezione di P su un asse fisso passante per il centro del disco. Scegliamo come parametri lagrangiani atti ad individuare la generica posizione del sistema, l'angolo φ che OH forma con tale retta fissa, e l'angolo ϑ che OP forma con la stessa retta .
Scrivere le equazioni del moto. Verificare se esiste almeno una posizione di equilibrio stabile e, in caso affermativo, discutere le piccole oscillazioni attorno ad essa.

Compito di esonero di Meccanica Razionale
(Prof. Marchioro, 14/12/90)

1) Si consideri l'equazione di un moto unidimensionale

$$m\ddot{x} = -Kx + \lambda x^3 - \beta \dot{x}$$

dove $K, \lambda > 0$.

a) $\beta = 0$. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

b) Discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio nei casi $\beta > 0$ e $\beta < 0$.

c) $\beta = 0$. Si consideri il moto di dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v > 0$. Esiste v tale che $\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$? Se sì, trovare l'estremo inferiore e dire se è un minimo.

d) facoltativo. Rispondere al quesito c per $\beta > 0$.

2) Trovare i valori del parametro p per i quali il campo di forze

$$F_x = -x^3 + p(y^2 + 2xy)$$
$$F_y = -y^3 + p^2(x^2 + 2xy)$$

è conservativo e trovarne il potenziale.

Secondo compito di esonero di Meccanica Razionale

Prof. Marchioro A.A. 90/91

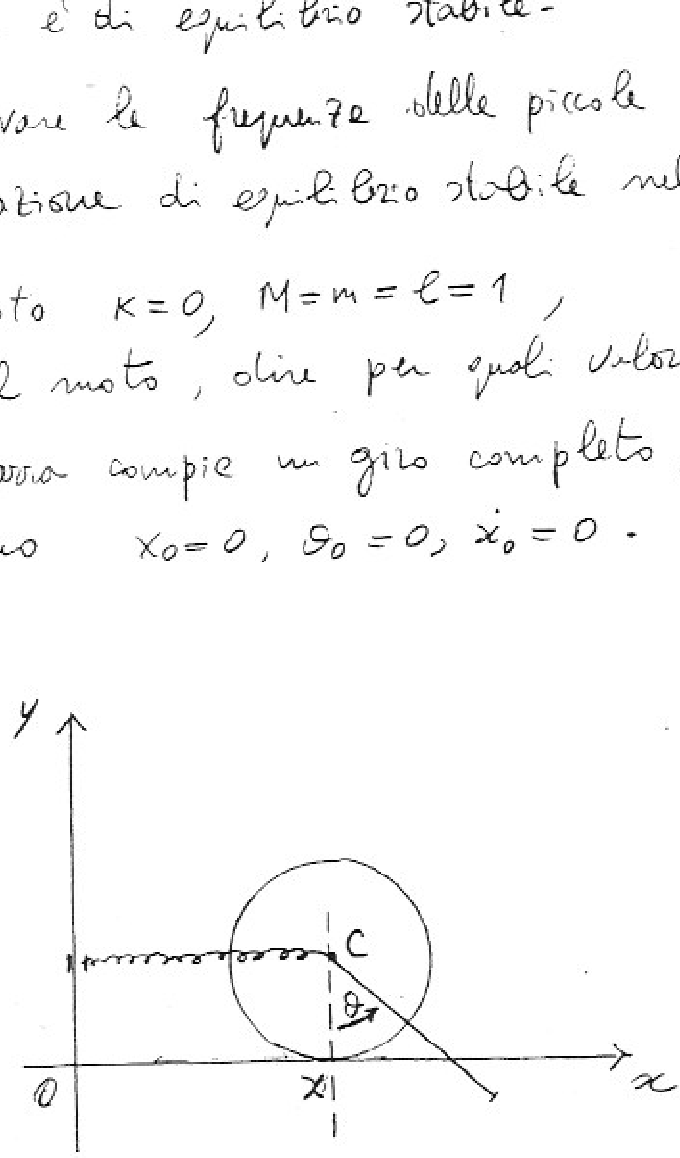
Un disco omogeneo di raggio R e massa M si muove in un piano verticale rotolando sull'asse x senza strisciare e senza sollevarsi. Al centro del disco e' incernierata una sbarra di lunghezza l e massa m. Sul centro agisce inoltre una forza elastica di costante K avente origine sul punto dell'asse y di quota R.

1) Trovare la Lagrangiana e scrivere le equazioni di Lagrange.

2) Trovare le configurazioni di equilibrio e provare che una di esse è di equilibrio stabile.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile nel caso $m = M = l = K = 1$.

4) Posto $K=0$, $M=m=l=1$, usando gli integrali primi del moto, dire per quali valori del dato iniziale $\dot{\vartheta}_0$ la sbarra compie un giro completo, se gli altri dati iniziali sono $x_0=0$, $\vartheta_0=0$, $\dot{x}_0=0$.



MECCANICA RAZIONALE (Corso di laurea in fisica) Carlo Marchioro

9/2/89

In un piano verticale è posto un disco rigido omogeneo pesante di centro C raggio R e massa M libero di ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O posto sul suo bordo. Sul disco è posta una sbarra pesante omogenea di massa m e lunghezza $L=\sqrt{3}\,R$.
Gli estremi A e B scorrono senza attrito lungo il bordo del disco.
Scegliamo come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ che OC e CH formano con la verticale discendente, ove H è il punto di mezzo della sbarra.

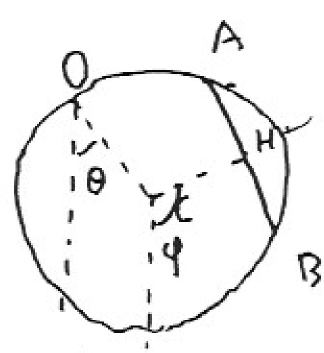
1) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

3) Discutere le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Trascurando ora la forza peso discutere due integrali primi del moto.

$\overline{AB} = \sqrt{3}\, R$



MECCANICA RAZIONALE   Compito d'esame del 6/12/88 (C.Marchioro)

In un piano verticale è posto un disco omogeneo di centro C, di massa M e raggio R e rotola senza strisciare lungo una giuda orizzontale x. Lungo il bordo del disco è libero di scorrere senza attrito un punto pesante P di massa m, soggetto (oltre alla forza peso) ad una forza $\underline{F}$: $\underline{F} = -k\,HP$ ($k > 0$) ove H è la poiezione di P su un asse verticale passante per l'origine (vedi figura).

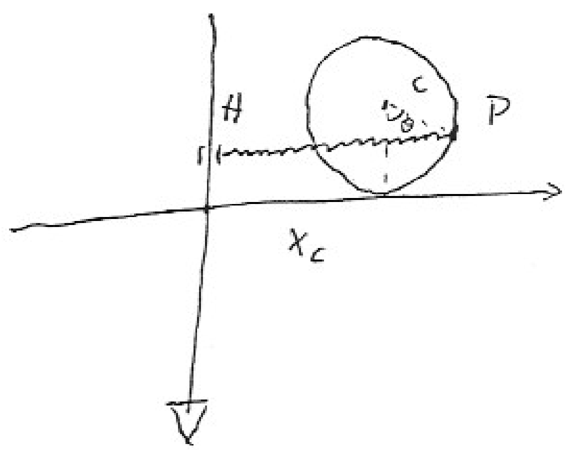
Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa x_C del centro C e l'angolo θ che CP forma con la verticale discendente.

Si risponda alle seguenti domande:

1) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

3) Discutere le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Prova scritta di Meccanica Razionale

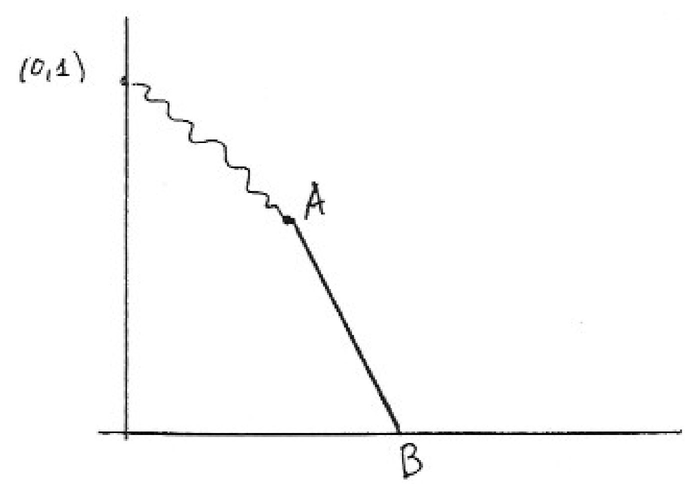
27-Set-1988

Proff. Marchioro , Tirozzi

1. Si consideri un'asta omogenea di lunghezza 2l e massa m vincolata a muoversi in un piano verticale.
L'estremo B di tale asta e' vincolato a muoversi sull'asse delle x del piano mentre l'altro estremo A e' libero di muoversi nel piano e su di esso agisce una forza elastica con centro nel punto (0,1) del piano costante di richiamo k e lunghezza di riposo nulla.
Sul sistema agisce la forza peso.

a) Trovare le posizioni di equilibrio di tale sistema e discuterne la stabilita'.

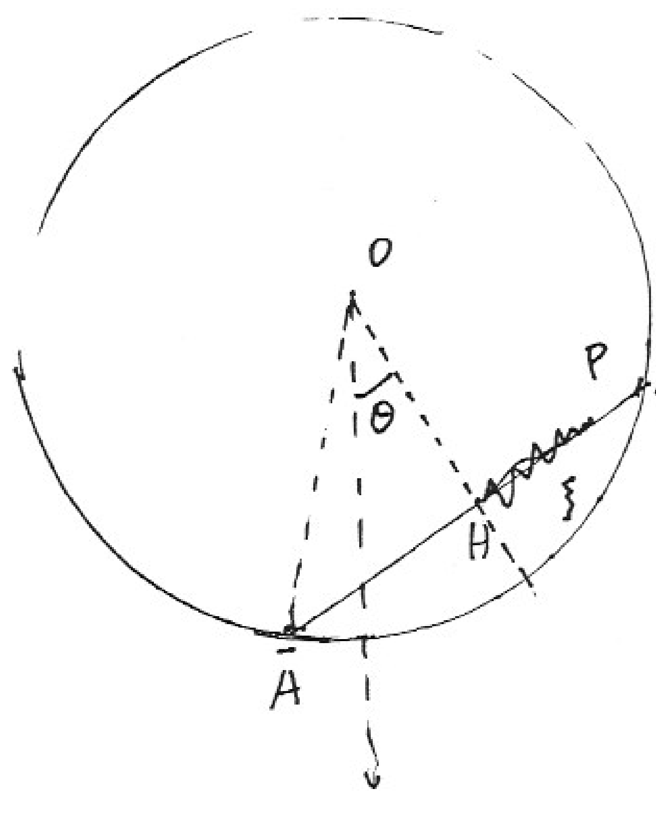
b) Discutere le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Compito di Meccanica Razionale 11/7/1988 per studenti di fisica (Prof.C.Marchioro).

Una sbarra omogenea pesante di massa M e lunghezza L di estremi A , B si muove in un piano verticale. I due estremi sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di raggio $R = L$ e centro O . Solidalmente alla sbarra è posta una guida liscia su cui si muove un punto P pesante di massa m soggetto ad una forza di richiamo $\underline{F} = -k\,HP$ ove H è il punto di mezzo della
sbarra.
Prediamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che OH forma con la verticale discendente e l'ascissa ξ di P lungo la sbarra.
Si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
2) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.
3) Studiare le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.
4) Trascuriamo ora la forza peso. Scrivere due integrali primi del moto.
Date le condizioni iniziali $\theta(0)=0$ $\xi(0)=0$ $\dot\theta(0)=\dot\theta_0$ $\dot\xi(0)=0$ trovare il valori di $\dot\theta_0$ per cui la sbarra compie un giro completo.



MECCANICA RAZIONALE (fisici) Appello di Giugno 1988

Una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L è obbligata a muoversi in un piano verticale. L'estremo A è obbligato a scorrere lungo una guida circolare di centro O e raggio R. L'asta è soggetta ,oltre alla forza peso, ad una forza elastica $F = - k\, HA$ ($k > 0$) ove H è la proiezione del punto A su un asse verticale discendente passante per O.

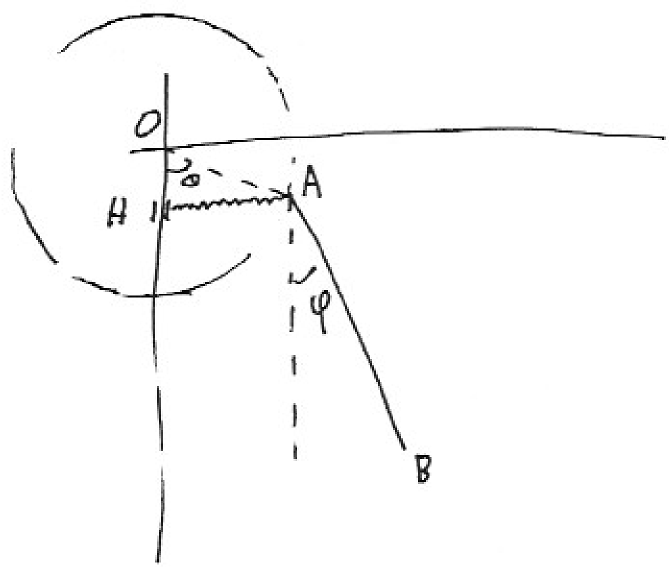
Prendiamo come variabili lagrangiane gli angoli θ e φ che OA e AB formano rispettivamente con la verticale discendente.

Si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare le posizioni di equilibrio; discuterne il numero e la stabilità.

2) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

3) Sc rivere le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



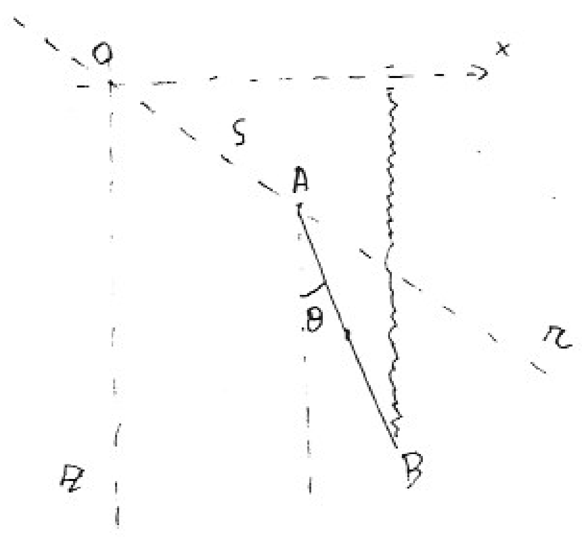
Meccanica Razionale (Studenti di fisica) 8/2/1988

In un piano verticale è posta una guida liscia r formante con l'asse verticale discendente z un angolo di 45°. Una asta omogenea pesante di massa M e lunghezza L si muove in questo piano ed una sua estremità A è obbligata a scorrere senza attrito lungo la guida , mentre l'altra estremità B è soggetta alla forza: $\underline{F} = -k\ HB$ ($k > 0$) ove H è la proiezione di B su un asse orizzontale x passante per l'intersezione di r con z (vedi figura). Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa s di A su r e l'angolo θ che l'asta forma con la verticale discendente. Si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare le posizioni di equilibrio; discuterne il numero e la stabilità.

2) Trovare le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

3) Individuata una posizione di equilibrio stabile, calcolare le piccole oscillazioni attorno a questa.



$\overline{AB} = L$

M, g

MECCANICA RAZIONALE. Prova di esonero del 23/1/1988.

Prof. C.Marchioro

1) Un punto materiale relativistico di massa a riposo m_0 si muove in una dimensione e si trova all'istante iniziale nell'origine con velocità v_0. Esso si muove nel campo di forze

$$F(x) = -2x e^{-x^2} + 2x^3 e^{-x^2}$$

Trovare la velocità iniziale minima per cui $v_0 > v_m$ implica

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

2) Due particelle relativistiche di massa a riposo uguale m urtano fra di loro essendo una ferma e l'altra avendo una velocità v_1 diretta lunga l'asse x. Esse si trasformano in due particelle uguali di massa a riposo M l'una ferma, l'altra con una velocità v_2 diretta come l'asse x. Trovare M e v_2 in funzione di m sapendo che $V_1 = c/2$ ove c è la velocità della luce.

3) Un giroscopio di momenti principali d'inerzia A,B,C, $(A = B \neq C)$ è obbligato a ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O . Sia P un punto del suo asse giroscopico ed H la sua proiezione su un asse z fisso. Il giroscopio sia soggetto ad una forza elastica $\underline{F} = -k\, HP$ $(k > 0)$. Nell'ipotesi giroscopica (rapida rotazione attorno all'asse giroscopico per cui il momento della quantità di moto è diretto come l'asse giroscopico) rispondere alle seguenti domande:

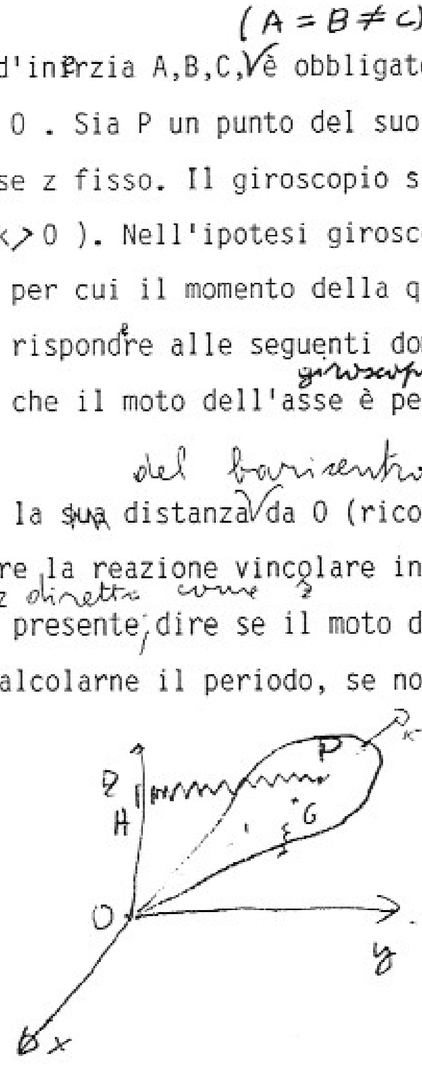
a) trascurando la forza peso dimostrare che il moto dell'asse giroscopico è periodico e calcolarne il periodo.

b) Sia M la massa del giroscopio e ξ la distanza del baricentro da O (ricordo che esso è posto sull'asse giroscopico). Calcolare la reazione vincolare in O.

c) Ammettiamo ora che la forza peso sia presente e diretta come z, dire se il moto dell'asse giroscopico sia ancora periodico. Se sì calcolarne il periodo, se no dimostrarlo.

$(\underline{g} \parallel$ asse $z)$

Facoltativo.
Che succede se g non è diretto come z.



MECCANICA RAZIONALE 2° Compito d'esonero 12/12/1987

Prof.Marchioro

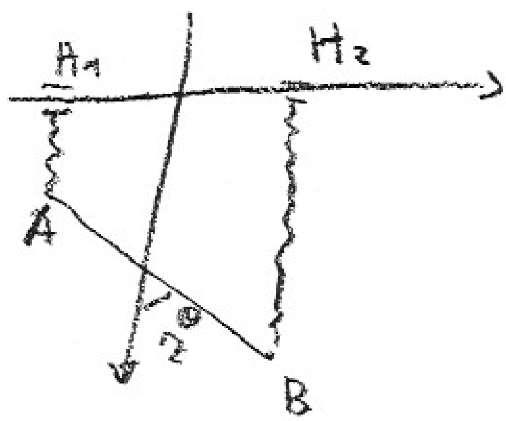
1.

di lunghezza L e massa M

Una sbarretta rigida pesante omogenea di estremità A e B e punto di mezzo C, è libera di ruotare senza attrito attorno a C. A sua volta C è libero di scorrere senza attrito lungo un asse verticale z. Alla estremità B della sbarra è fissato a questa un punto materiale di massa m . Siano H_1 e H_2 le proiezioni di A e B su un asse orizzontale; la sbarra sia soggetta ,oltre alla forza peso, a due forze di richiamo: $F_1 = -k_1\, H_1A$, $F_2 = -k_2\, H_2B$, $k_1, k_2 > 0$. Scegliamo come variabili lagrangiane la quota z di C e l'angolo ϑ che CB forma con la verticale discendente.

1) Scrivere le posizioni di equilibrio, discuterne il numero. ~~e la stabilità~~ (e la stabilità)

2) Supponendo $k_1 = k_2 = k \ll mg/L$ scrivere le piccole oscillazioni attorno la posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze nodali.



2.

Trovare i valori di α e β per i quali la trasformazione

$$Q = \frac{1}{q}\,(p-1)^{\alpha} \qquad\qquad P = -\frac{2}{3}\,q^{\beta}\,(p-1)^{\frac{1}{2}}$$

è canonica. In questo caso trovare la funzione generatrice $F(q,Q)$.

Meccanica Razionale (per fisici) (Prof. Carlo Marchioro)

prova di esonero del 14/11/1987

Un disco omogeneo pesante di raggio R e massa M rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale ed è posto in un piano verticale. Sulla circonferenza esterna del disco è posta una guida liscia lungo la quale sono obbligati a scorrere senza attrito gli estremi A e B di una asta omogenea pesante di massa m e lunghezza $l = R$. Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa x del centro O del disco e l'angolo θ che la semiretta OG forma con l'asse x , ove G è il baricentro dell'asta.

Si risponda alle seguenti domande:

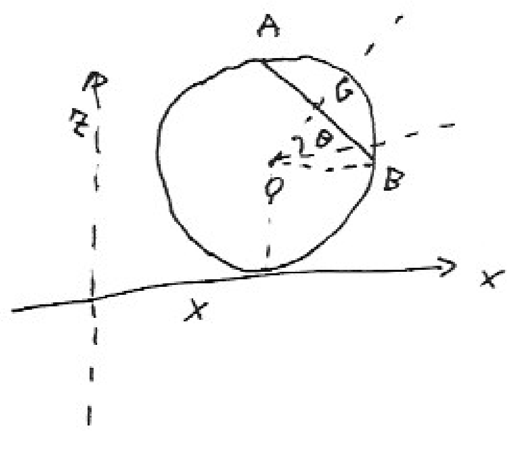
1) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2) Trovare le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

FACOLTATIVO 3) Ritrovare le equazioni del moto con i metodi generale della meccanica (equazioni cardinali, conservazione dell'energia).

4) Usando due integrali primi del moto ,date le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$ si trovi il valore minimo di $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_m$ (o meglio il suo estremo inferiore) per cui l'asta fa un giro completo.

5) Con le condizioni iniziali del punto 4) si trovi la reazione vincolare nel punto di contatto disco, guida quando $\theta = \pi/2$ per $\dot{\theta}_0 > \dot{\theta}_m$



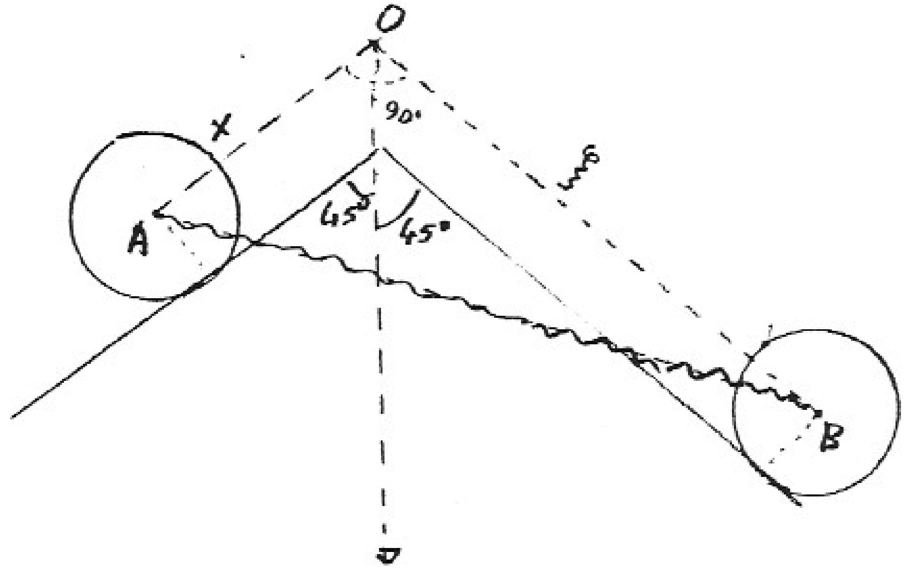
Compito di Meccanica Razionale (per fisici). 9/2/1987

Prof. C.Marchioro

In un piano verticale sono poste due guide rettilinee formanti rispettivamente un angolo di +45° e −45° con la verticale . Lungo tali guide rotolano senza strisciare due dischi omogenei pesanti di massa M e raggio R e di centro rispettivamente A e B . Essi sono soggetti, oltre alla forza peso ed alle eventuali reazioni vincolari, ad una forza attrattiva di intensità $|\underline{F}| = k\ |AB|^{3/2}$.

Si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
2) Scrivere l'equazioni del moto con il metodo di Lagrange.
3) Studiare le piccole oscillazioni.



Compito di MECCANICA RAZIONALE per studenti di fisica 3/12/86

(C.Marchiore)

In un piano verticale π, si muove una asta pesante AB di lunghezza L e densità lineare $\mu(s)= a\, s$ $(a>0)$ ove s è la distanza del generico punto P dell'asta da A. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale x. Inoltre tale punto è soggetto alla forza: $\underline{F} = -k\,|OA|^2\, OA$ $(k>0)$ ove O è l'origine degli assi.

Scegliamo come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente.

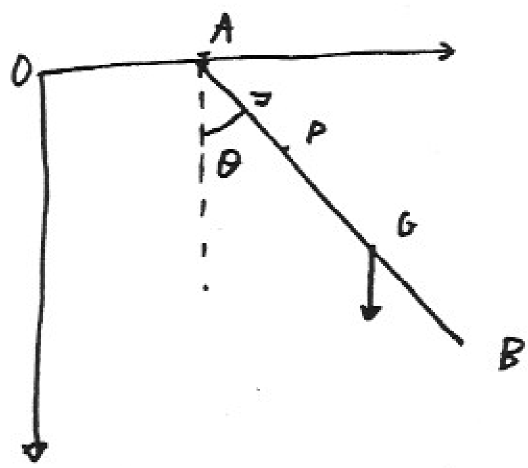
Si risponda alle seguenti domande:

1) Trovare il potenziale corrispondente alla forza $\underline{F}$ e scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Discutere se esistono le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

4) Consideriamo ora il caso in cui $k=0$. Scrivere due integrali primi del moto. Usandoli, date le condizioni iniziali $x=0$, $\dot{x}=0$, $\theta=1/2$, $\dot{\theta}=0$, trovare x, $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ quando $\theta=0$ per la prima volta.



MECCANICA RAZIONALE per FISICI (Prof. Marchioro) 7/7/86

In un piano verticale π un disco omogeneo pesante di centro C, di massa M e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O della sua circonferenza. Su detta circonferenza è libero di muoversi senza attrito un punto materiale pesante P di massa m. Tale punto è soggetto anche ad una forza elastica proporzionale alla sua distanza dal punto O : $\underline{F} = -k\,OP$, $k>0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane gli angoli θ e φ che formano OC ed OP con la verticale discendente. Poniamo M=m.

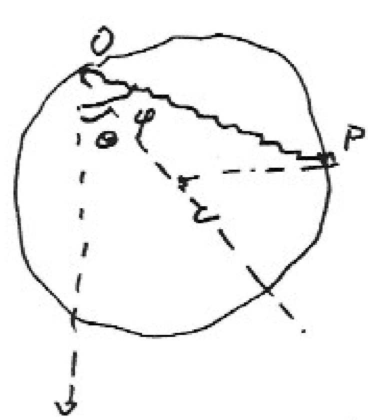
Si rispondano alle seguenti domande:

1) Discutere le posizioni di equilibrio quando k è molto grande o molto piccolo rispetto ad una combinazione opportuna degli altri parametri in gioco.

2) Scrivere le equazioni del moto col metodo di Lagrange.

3) Trovare per quale valori di k la posizione $\theta=0$, $\varphi=0$ è di equilibrio stabile. In questo caso studiare le piccole oscillazioni e trovare in particolare le frequenze ~~proprie~~ proprie.

4) Si trascuri ora la forza peso. Discutere eventuali integrali primi del moto ed usandoli, date le condizioni iniziali $\theta=0$, $\varphi=\pi/4$, $\dot\theta=0$, $\dot\varphi=0$, trovare il valore di $\dot\theta$ quando $\overline{OP}=0$



Ricordo che

$\overline{OC} = \overline{CP} = R$

$O\hat{C}P = \pi - 2(\varphi-\theta)$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Meccanica Razionale per studenti di fisica.
24/9/1986 Prof. Carlo Marchioro

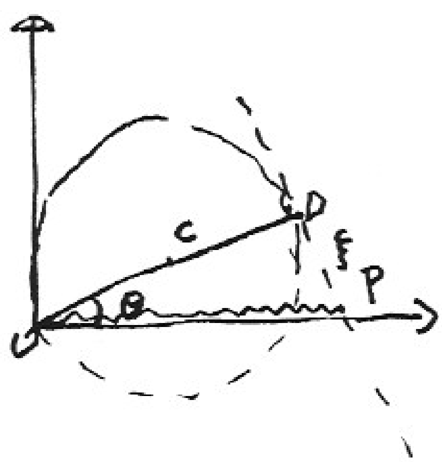
In un piano orizzontale π un disco omogeneo di centro C , raggio R e massa m è libero di ruotare senza attrito attorno ad un punto O della sua circonferenza. All'altra estremità del diametro D è vincolata solidalmente al disco una guida di massa trascurabile; su tale guida è libero di scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Tale punto è attratto all'origine O da una forza $\underline{F} = -k\, OP$.

Scelte come variabili lagrangiane l'angolo θ che l'asse OC forma con l'asse x e l'ascissa ξ di P sulla guida, con origine in D, si risponda alle seguenti domande:

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e trovare le equazioni del moto.

2) Scrivere due integrali primi del moto sia studiando la forma della lagrangiana, sia dall'esame delle forze in gioco.

3) Date le condizioni iniziali $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\xi = R$, $\dot{\xi} = 0$, trovare il valore di $\dot{\theta}$ quando $\xi = 0$.



MECCANICA RAZIONALE per Fisici. (25/7/1986)

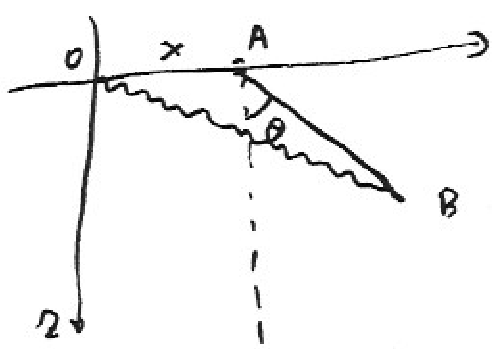
In un piano verticale π una asta omogenea, pesante di lunghezza L e massa M si muove avendo l'estremo A vincolate a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox. Essa è soggetta, oltre alla forza peso ad una forza elastica applicata al punto B: $F = -k\,OB$ $(k > 0)$. Prese come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e l'ascissa x del punto A, si risponda alle seguenti domande:

1) trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero.

2) scrivere l'equazione del moto col metodo di Lagrange.

3) trovare per quale valore di k la posizione $\theta = 0$, $x = 0$ è di equilibrio stabile.

3) In questo caso risolvere il problema nel limite delle piccole oscillazioni.



Meccanica Razionale per studenti di Fisica
(Prof.Marchioro) 17/6/1986

In un piano verticale π una sbarra omogenea, pesante, di massa M e lunghezza R di estremi A e B, ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito lungo una retta verticale r. Sia O un punto di tale retta, la sbarra è soggetta ad una forza $\underline{F} = -k\, OA$. Scegliamo come variabili lagrangiane la quota del punto A (z_A) e l'angolo che la sbarra forma con la verticale discendente. Si risponda alle seguenti domande:

1) trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

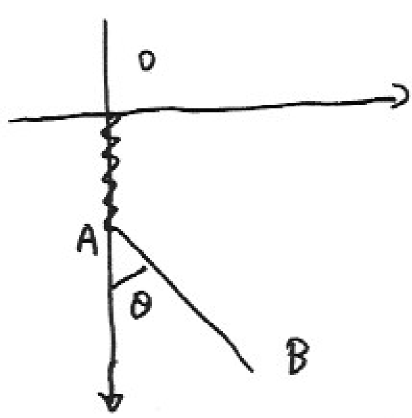
2) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

3) Calcolare le piccole oscillazioni atterno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Rispondere a scelta ad una delle seguenti sottodomande:
   4a) Scrivere in generale l'equazione di Hamilton-Jacobi e risolverla per le piccole oscillazioni.
   4b) Date le condizioni iniziali $z=0$, $\theta = \pi/2$, $\dot{z} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ calcolare la reazione vincolare quando $\theta = 0$ nella sua componente orizzontale.

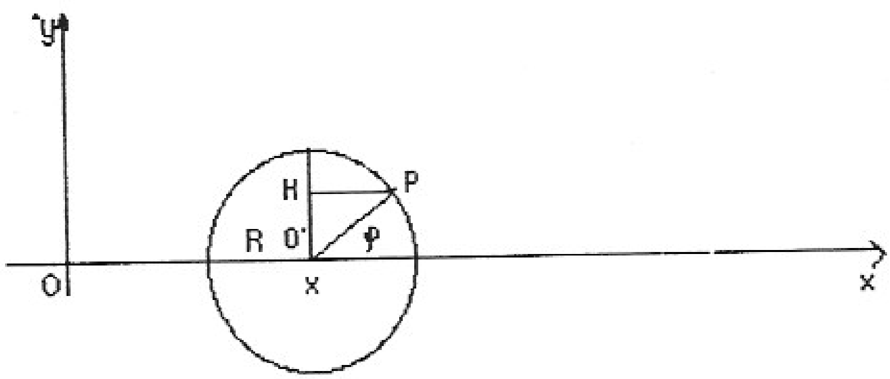
5) Assumiamo ora che il piano ruoti uniformemente con velocità angolare ω attorno alla retta verticale r. Si calcoli le posizioni di equilibrio, se ne discuta il numero, e se ne discuta la stabilità (in funzione di ω)

$\overline{AB} = L$



Esonero di Meccanica del 12/4/1986 (Prof.Marchioro)

Si consideri un disco di raggio R ,massa M e centro **O'** vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse $\hat{x}$ di un sistema di coordinate $\hat{x}\hat{y}$ verticale.Sul bordo del disco si muove senza attrito un punto materiale **P** pesante di massa m.Chiamiamo **H** la proiezione di **P** sull'asse verticale passante per **O'**.**P** sia soggetto oltre alla forza peso ad una forza elastica
F = -k**HP** ,k>0.Assumiamo come coordinate lagrangiane atte a descrivere il moto la posizione x del centro del disco O' e l'angolo φ formato da **O'P** con l'asse $\hat{x}$.



Si chiede:
1) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilita'.
2)Scrivere l'equazioni lagrangiane ed hamiltoniane e trovare le quantita' conservate.
3)Sia $\varphi(0)=x(0)=\dot{x}(0)=0$.Trovare il minimo valore di $\dot{\varphi}(0)$ tale che il punto **P** compia un giro completo.In questo caso calcolarne il tempo.
4) Si introduca un coefficiente di attrito α sul bordo del disco e si trascuri la forza peso e quella della molla.Supponendo il centro del disco vincolato nell'origine e $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ discutere se il punto **P** si arrestera' ed eventualmente calcolarne il tempo.

CORSO DI MECCAN[illegible]A RAZIONALE PER STUDENTI IN FISICA

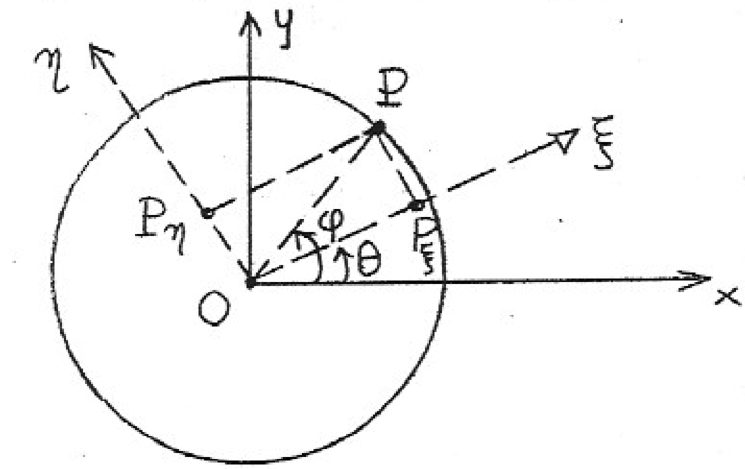
III COMPITO DI [illegible]NERO - 30/4/70.

In un piane erizzentale un disce emegenee di massa M e raggie R è libere di ruetare senza attrite atterne ad un asse verticale ppassante per il sue centre O. Sul berde del disce è vincelate a scerrere senza attrite un punte materiale P di massa M.

Sia $O\xi\eta$ un riferimente selidale al disce e siane P_ξ, P_η rispettivamente le preiezieni di P su tali assi.

Suppeniame era che agiscane sul punte P due ferze elastiche:

$$\underline{F}_1 = -k_1 P_\xi P \quad , \quad \underline{F}_2 = -k_2 P_\eta P$$



Tali forze sono realizzate tran due molle con un estremo soli al punto P mentre l'o estremo può scor su due guide solidali al disco e coincidenti rispettivamente c l'asse ξ e l'asse

Scelti ceme parametri atti ad individuare la generica cenfigurazione del sistema, l'angele θ che $O\xi$ ferma cen un asse fisse Ox, e l'angele φ che OP ferma cpn Ox, entrambi centati pesitivamente in sense antierarie, si rispenda ai seguenti quesiti:

1) Scrivere le equazieni di mete del sistema facende use di due integra primi del mete.

2) Integrare tali equazieni cen le cendizieni iniziali:

$$\theta_0 = 0 \; ; \; \varphi_0 = 0 \; ; \; \dot{\theta}_0 = \omega \; ; \; \dot{\varphi}_0 = -\omega/2$$

nell'ipotesi $k_1 = k_2 = k$.

3) Senza fare calceli, dire quali degli integrali primi di cui al n.1 sene ancera validi, in ciascune dei seguenti tre casi;

(a) se c'è attrite nel centatte disce-asse.

(b) se c'è attrite nel centatte punte- disce.

(c) se $k_1 k_2$ sono funziene del tempe: $k_1 = k(t)$, $k_2 = k_2(t)$