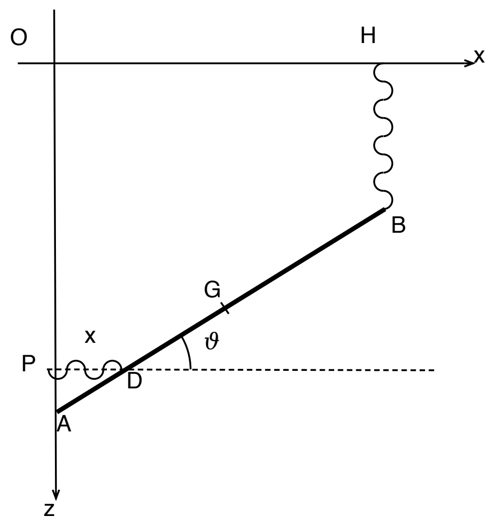
MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA - I ESONERO - 14/12/2016

In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxz di origine O e con l'asse z orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida omogenea di estremi A e B, massa M e lunghezza L (vd figura). Il punto D di tale asta dista $L/4$ dall'estremo A ed è obbligato a scorrere senza attrito su di una guida parallela all'asse x e passante per il punto P di coordinate $(0, d)$. Oltre alla forza peso l'asta è soggetta a due forze attive $\vec{F}_1 = -K\vec{PD}$ e $\vec{F}_2 = -K\vec{HB}$, dove $K > 0$ e H è la proiezione ortogonale di B sull'asse x. Scegliamo come coordinate lagrangiane per descrivere il sistema l'ascissa x del punto D e l'angolo θ che l'asta forma con la guida parallela all'asse x.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{4d}{3L} - \frac{4Mg}{9LK}$.
3. Si ponga in queste domande $K = M = g = L = 1$ e $d = 10/9$. Scelta, quindi, una posizione di equilibrio stabile si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni.



II Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica - 25/01/2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

1. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/2$ per un tempo T, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/4$ nell'origine, dove si ferma. La seconda si muove con velocità $c/3$ per un tempo $\frac{3}{2}T$, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/3$ nell'origine, dove si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un corpo di massa a riposo m si muove lungo l'asse x ed è soggetto ad un'energia potenziale $U(x) = A|x|^5$ (con $A > 0$). Sapendo che transita per l'origine con velocità v_0, si determini la massima distanza d dall'origine raggiunta.

3. Sia data la trasformazione

$$Q = 16p^4q^2$$
$$P = -\frac{1}{32}q^\beta p^{-3}$$

   Si dica per quali valori reali di β la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

4. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Indicare se esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi

$$E_1 = (1, -\cos\alpha, -\sin\alpha, 1)\ , \qquad E_2 = (4, 0, 0, 1) \quad (\alpha = \pi/3)$$

   avvengono nella stessa posizione, e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

5. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m, ferma nell'origine delle coordinate, viene urtata da una particella di massa a riposo $\frac{4}{5}m$ che si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v = \frac{3}{5}c$. A seguito dell'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V, assumendo assegnata m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 febbraio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

La sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro di massa, restando sempre sul piano xz, sul quale è adottato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la cui origine O coincide con il centro di massa immobile della sbarra. Il punto materiale P, di massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse w, giacente sul piano xz, perpendicolare ad AB e passante per O. Il punto P è collegato ad O da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, la cui accelerazione $\boldsymbol{g}$ è diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse z e l'ascissa ρ di P lungo l'asse w, come indicato in Fig. 1.

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $M = 6$, $m = 1$, $L = 4$, $K = 1$, $g = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

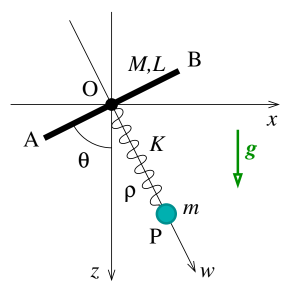


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Data la trasformazione

$$Q = p^{1/\alpha} q^{1/2}; \;\; P = -2(pq)^{1/2} \ln q$$

si dica per quali valori di α la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 giugno 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

Una guida circolare rigida, di massa M e raggio R, è vincolata a ruotare attorno al suo punto fisso O sul piano orizzontale xy, sul quale è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O. Un punto materiale P di massa m può scorrere senza attrito lungo la guida circolare. Il punto P è collegato da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica K al punto H, proiezione ortogonale di P sulla retta $x = a$, con $a > 2R$. Sia C il centro della guida circolare. Si adottino come variabili lagrangiane l'angolo θ che il diametro OA della guida circolare forma con il verso positivo dell'asse x e l'angolo ϕ che il segmento CP forma con il verso positivo dell'asse ξ, parallelo all'asse x e passante per il punto C (si veda la Fig. 1).

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $a = 3R$, $M = 2m$, $K/m = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

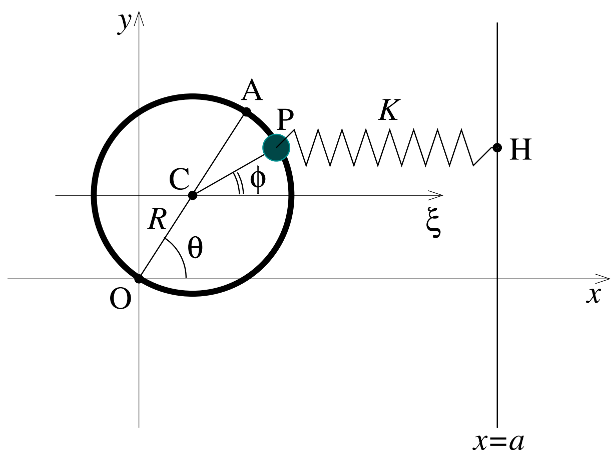


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Si determini per quale valore del parametro reale α la trasformazione

$$Q = \left(\frac{p}{2q}\right)^{\alpha}$$
$$P = -3\left(\frac{q^2 p}{2}\right)^{2\alpha}$$

è canonica e, in corrispondenza di tale valore, si trovi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

ESERCIZIO 3

Due particelle relativistiche di massa m e velocità $v_1 = \frac{12}{13}c$ e $v_2 = \frac{5}{13}c$ si muovono nel verso positivo dell'asse x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano, con la particella più veloce che segue la più lenta, di modo che ad un certo istante esse si urtano. A seguito dell'urto tra le due particelle, si forma un'unica particella di massa M e velocità u.

- Si determini u.
- Si determini il valore del rapporto M/m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 14 luglio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. Sia S il punto dell'asta che si trova a distanza $3d$ dal punto A, con $L = 4d$. Il punto S dell'asta è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z, ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine: $\underline{F_1} = -k\overline{OS}$, $k > 0$. L'estremo A è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'asse delle x: $\underline{F_2} = -k\overline{HA}$, $k > 0$, ove H è la proiezione del punto A sull'asse delle x (vedi figura). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane la coordinata z di S e l'angolo ϕ che SA forma con l'asse z.

1. Scrivere la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero al variare di k.

3. Posto in questa domanda $M = 3$, $d = 1$, $k = 2$, $g = 3$, studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio e, scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. $I_G = \frac{ML^2}{12}$ (G= baricentro). Ricordiamo che la forza peso è presente.

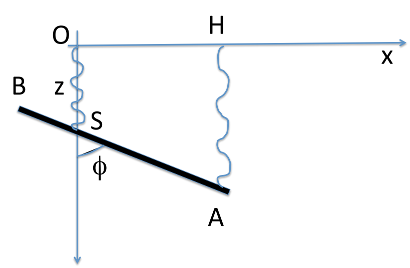


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/4$ per un tempo $2T$, poi si ferma. La seconda si muove, nello stesso verso della prima, con velocità $c/2$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e si dirige verso la prima astronave con velocità $-c/2$ fino a quando la incontra, e lì si ferma.

1. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Quando si incontrano li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. In ognuna delle due astronavi c'è una telecamera che mostra il quadrante di un orologio e ne invia l'immagine a terra mediante un segnale elettromagnetico. Al tempo T (misurato a terra) dopo la partenza delle astronavi, queste immagini vengono osservate e confrontate. Quanto tempo segnano gli orologi mostrati nelle immagini?

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 1 settembre 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

ESERCIZIO 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove un'asta rigida, omogenea e pesante AB, di massa m e lunghezza l. L'estremo A dell'asta può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,OA$, $k > 0$. L'estremo B è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,HB$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che l'asta AB forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

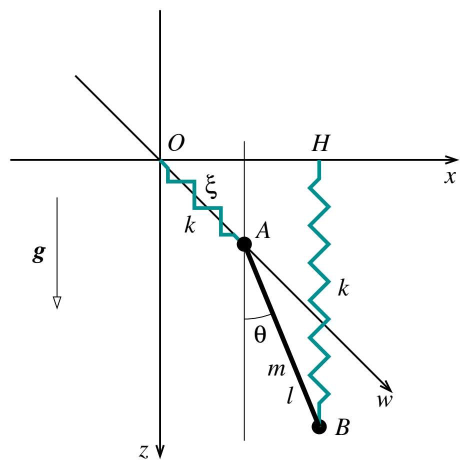


Fig. 1

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di k.
3. Ponendo ora $m = 2$, $l = 1$, $k = 2$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa è $I_G = \frac{ml^2}{12}$ (G= centro di massa di AB). Si ricordi che la forza peso è presente.

ESERCIZIO 2

Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (x, y, z, ct) i due eventi $E_1 = (1, 5, 3, 2)$ e $E_2 = (3, 5, 3, \alpha)$, con α parametro reale.

1. Per quali valori di α esiste un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei?
2. Trovare, in funzione dei valori di α ammissibili, la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di tale sistema di riferimento.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 22 novembre 2017
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una guida circolare rigida, omogenea, di centro C, massa M e raggio R. Il punto A della guida circolare è vincolato a scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,\mathrm{OA}$, $k > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto rispetto ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\mathrm{HB}$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sulla retta $x = a$ (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse passante per A e perpendicolare al piano assegnato.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 2$, $a = R = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa, coincidente con il centro C, è $I_{\mathrm{C}} = MR^2$.

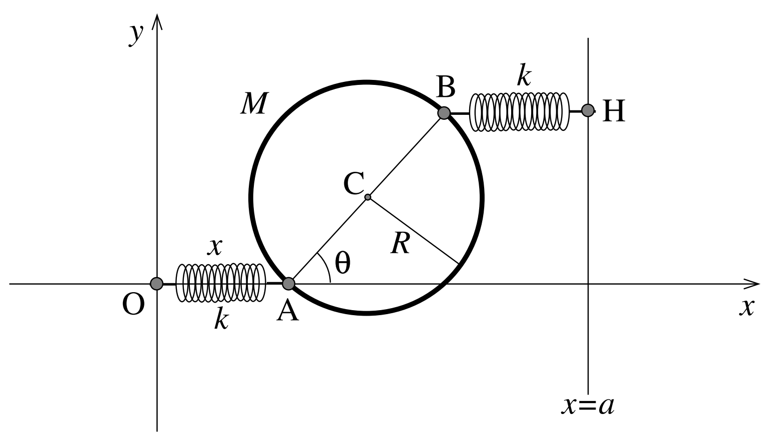


Fig. 1

Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica del 17 gennaio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = q^{\alpha} \log p$$
$$P = -q\, p^{\beta}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F(q, Q)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell?ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (1, 1, 0, 0) \qquad E_2 = (4, 1, 1, 0)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Determinare la separazione temporale $c\delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono all'istante $t = 0$ dall'origine O di un sistema di coordinate cartesiane fissato sul piano Oxy. L'astronauta A percorre un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{4}$, e ritorna in O percorrendo un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{4}$. La traiettoria dell'astronauta A è dunque un quadrato. L'astronauta B percorre in andata e ritorno la diagonale dello stesso quadrato, con velocità $\frac{c\sqrt{2}}{6}$. Verificare che i due astronauti impiegano lo stesso tempo T (misurato da un orologio rimasto in quiete in O) per completare i rispettivi tragitti e determinare T. Quando i due astronauti si incontrano nuovamente in O, confrontano i loro orologi, che segnano, rispettivamente, τ_A e τ_B. Determinare τ_A e τ_B e indicare quale dei due tempi è il più piccolo.

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = \gamma x^4$, dove $\gamma > 0$ è un parametro dimensionale. La massima distanza dall'origine raggiunta dalla particella è d. Determinare la velocità v_0 con la quale la particella transita per l'origine. Sotto quale condizione su d si recupera il risultato classico per v_0?

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = -\frac{3}{5}c$ e collide con una particella di massa a riposo $\frac{3}{4}m$ che viaggia sempre lungo l'asse x con velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$. In seguito all'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 6 febbraio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

ESERCIZIO 1: MECCANICA LAGRANGIANA

In un piano verticale, in cui è fissato un sistema di assi cartesiani Oxz, con l'asse z verticale discendente, si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida circolare γ, di centro O e raggio $R = L$. L'estremo B dell'asta è soggetto alla forza $\underline{F_e} = -K\,\mathrm{HB}$, $K > 0$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse x. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che OA forma con l'asse z e l'angolo ϕ che AB forma con la verticale discendente (si veda la Fig. 1). Sia $g > 0$ l'intensità dell'accelerazione di gravità. Nello svolgimento, per comodità, si ponga $Mg = fKL$, $f > 0$.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema (per mancanza di tempo, non sono richieste le equazioni del moto).
2. Si trovino le otto posizioni di equilibrio del sistema e si discuta, al variare di $f > 0$, la stabilità di quelle con $\theta, \phi \in [0, \pi]$, le altre essendo equivalenti a queste per simmetria.
3. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = R = 1$, $g = 6$ (ovvero $f = 6$), si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{12}ML^2$.

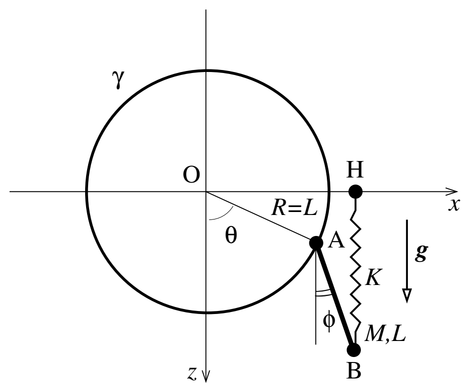


Fig. 1

ESERCIZIO 2: TRASFORMAZIONI CANONICHE

Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{3}\, q^{-1/2}\, p^{\alpha}$$
$$P = q^{3/2}\, p^{\beta}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

ESERCIZIO 3: RELATIVITÀ RISTRETTA

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (ct, x, y, z) i due eventi $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $E_2 = (4, \alpha, \alpha, 0)$.

1. Determinare per quali valori di α esistono sistemi di riferimento inerziali in cui i due eventi sono simultanei.
2. Trovare la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di uno di questi sistemi di riferimento in funzione di α.
3. Posto $\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}}$, determinare la distanza spaziale tra i due eventi nel sistema di riferimento in cui sono simultanei.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 20 Febbraio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

ESERCIZIO 1: MECCANICA LAGRANGIANA E HAMILTONIANA

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -K\,\mathrm{OG}$, $K > 0$. L'estremo B dell'asta è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -K\,\mathrm{PB}$, $K > 0$, dove P è il punto di coordinate $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di G e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si ricavi l'espressione dei momenti coniugati, p_x e p_θ, e della Hamiltoniana H.
3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
4. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = a = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{12}ML^2$.

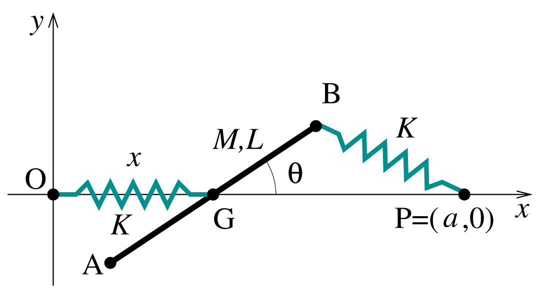


Fig. 1

ESERCIZIO 2: TRASFORMAZIONI CANONICHE.

Data la trasformazione

$$Q = e^{2q}\,p^\alpha$$
$$P = \beta\,p^2\,e^{-2q}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

ESERCIZIO 3: RELATIVITÀ RISTRETTA

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con una velocità pari a $c/2$. Dopo un intervallo tempo $T_0 = 1$ anno, dalla Terra viene inviato un messaggio radio con il quale si richiede che l'astronave torni indietro. Appena ricevuto il messaggio, l'astronave inverte la direzione del moto e si dirige verso la Terra con una velocità pari a $2c/3$.

1. Determinare, nel sistema di riferimento della Terra, quanto tempo è trascorso dalla partenza quando l'astronave riceve il messaggio, e che distanza essa ha percorso in quell'istante.
2. Quando l'astronave torna sulla Terra, gli astronauti confrontano il loro orologio con un orologio rimasto sulla Terra. Quale orologio ha segnato meno tempo, e di quanto?

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oy. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il punto B del disco, diametralmente opposto ad A, è attratto verso il punto fisso P= $(a, 0)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PB}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di A e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con il verso positivo dell'asse Oy (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a/R \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $a = R = 1$, $K = 1$, $M = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}MR^2$.

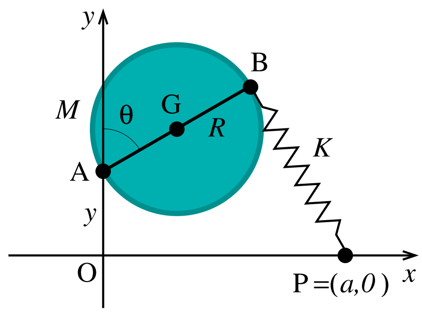


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} p^{-\frac{2}{9}}$$

$$P = 3\,p^{-\left(\frac{2\mu+3}{9}\right)} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{6}}$$

dalle variabili canoniche Q, p alle variabili q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, μ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{3}{5}c$. Quando a bordo è trascorso un tempo $4T_0$ (con $T_0 = 1$ anno), l'astronave inverte il verso del moto e torna a Terra, muovendosi con velocità $v_2 = \frac{c}{2}$. Determinare, al ritorno a Terra dell'astronave, quanto tempo è trascorso dalla sua partenza nel sistema di riferimento solidale con la Terra, e nel sistema di riferimento solidale con l'astronave.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = R\sin\theta$, $y_G = y + R\cos\theta$, $x_B = 2R\sin\theta$, $y_B = y + 2R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(y^2 + 4Ry\cos\theta - 4Ra\sin\theta\right) + 4R^2 + a^2.$$

La funzione di Lagrange è $L = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{y} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(y + 2R\cos\theta\right), \qquad M\left(\frac{3}{2}R^2\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\ddot{y}\right) = 2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K(y + 2R\cos\theta), \qquad \partial_\theta U = -2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = -2R\cos\theta, \qquad (2R\sin\theta - a)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $y_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $y_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{2R}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $y_3 = -\sqrt{4R^2 - a^2}$ e $y_4 = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-1 < \frac{a}{2R} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -2 < \frac{a}{R} < 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = 2KR\left(a\sin\theta - y\cos\theta\right), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -2KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2K^2R(a - 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{R} > 2$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2K^2R(a + 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\frac{a}{R} < -2$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $-2 < \frac{a}{R} < 2$.
Riassumendo, per $\frac{a}{R} < -2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile; per $-2 < \frac{a}{R} < 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{R} > 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = -MR\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$R^2\left(K - M\omega^2\right)\left(4K - \frac{3}{2}M\omega^2\right) - a^2\left(K - \frac{1}{2}M\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 18\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.717,\ \omega_-^2 = 0.8835.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.648$ e $\omega_- = 0.9399$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$Q = \alpha\, q^6\, p^{4/3},$$
$$P = 3\, q^\mu\, p^{-1/3}.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\mu = -5$ e $\alpha = \frac{1}{14}$. Sappiamo che

$$dF_2(q, P) \;=\; p\,dq \;+\; Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Ottrniamo:

$$p = 27\, q^{-15}\, P^{-3},$$
$$Q = \frac{81}{14}\, p^{-4}\, q^{-14},$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q, P) = -\frac{27}{14}\, q^{-14}\, p^{-3}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Prendendo come origine del tempo coordinato t e del tempo proprio dell'astronave τ l'istante in cui l'astronave parte, siano t_1, τ_1 il tempo coordinato e il tempo proprio nel momento in cui questa inverte il suo senso di marcia, e siano t_2, τ_2 il tempo coordinato e il tempo proprio al ritorno a terra. Sarà, essendo $v_1 = \frac{3}{5}c$ e $v_2 = \frac{c}{2}$,

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\, t_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}\, t_1 = \frac{4}{5} t_1 = 4T_0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 5T_0\,,$$

la posizione dell'astronave quando inverte il senso di marcia sarà

$$\bar{x} = v_1 t_1 = 3cT_0\,.$$

Nel viaggio di ritorno l'astronave impiega un tempo coordinato

$$t_2 - t_1 = \frac{\bar{x}}{v_2} = 6T_0$$

e un tempo proprio

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\, 6T_0 = 3\sqrt{3}T_0\,,$$

quindi

$$t_2 = 6T_0 + 5T_0 = 11T_0\,, \qquad \tau_2 = (3\sqrt{3} + 4)T_0\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata rigida e omogenea, ABCD, di lato L e massa M. Il vertice A della lamina è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. La lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il vertice C della lamina è attratto verso il punto fisso P$= (0, a)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,$PC, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la diagonale AC della lamina forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{a}{L} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\frac{a}{L} = 1$, $\frac{K}{M} = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \frac{1}{6} M L^2$.

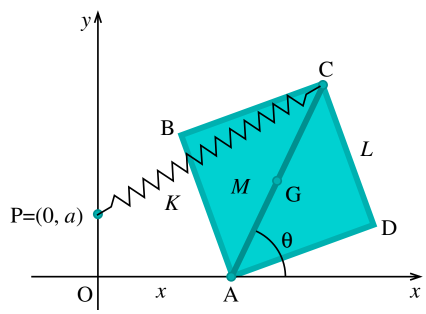


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = 2\,(36)^{\gamma}\, P^{2\gamma}\, e^{(\alpha-2\beta\gamma)\,q}$$
$$p = 36\, P^2\, e^{-2\beta\, q}$$

dalle variabili canoniche P, q alle variabili Q, p, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Siano dati i due eventi

$$E_1 = (2\alpha, 1, \alpha, 3)\,, \qquad E_2 = (\alpha, 1, 1, 3)$$

1. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono contemporanei, e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

3. Nel caso $\alpha = 2$, determinare la separazione temporale tra gli eventi nel sistema di riferimento in cui questi avvengono nella stessa posizione.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = x + \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta$, $y_G = \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta$, $x_C = x + \sqrt{2}L\cos\theta$, $y_C = \sqrt{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{3}L^2\,\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}L\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2\sqrt{2}Lx\cos\theta - 2\sqrt{2}La\sin\theta\right) + \frac{1}{2}K\left(2L^2 + a^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right),$$

$$M\left(\frac{2}{3}L^2\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{x}\right) = \sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = -\sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\sqrt{2}L\cos\theta, \qquad \left(\sqrt{2}L\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{\sqrt{2}a}{2L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $x_3 = -\sqrt{2L^2 - a^2}$ e $x_4 = \sqrt{2L^2 - a^2}$. Poiché la traccia assegna $a \geq 0$, aueste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}a}{2L} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \sqrt{2}KL\left(a\sin\theta - x\cos\theta\right), \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -\sqrt{2}KL\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $\sqrt{2}K^2L(a - \sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-\sqrt{2}K^2L(a + \sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{a}{L} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $2K^2L^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{2}{3}ML^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}ML\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 2KL^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$2\left(\frac{K}{M} - \omega^2\right)\left(\frac{K}{M} - \frac{1}{3}\omega^2\right) - \left(\frac{a}{L}\right)^2 \left(\frac{K}{M} - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 20\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega^2_\pm = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2_+ = 3.265,\ \omega^2_- = 0.735.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.807$ e $\omega_- = 0.857$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$Q = 2\,e^{\alpha q}\,p^\gamma,$$
$$P = \frac{1}{6}\,e^{\beta q}\,p^{1/2}.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\alpha = -\beta = 3$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Sappiamo che

$$dF_2(q,P) \;=\; p\,dq \;+\; Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Otteniamo:

$$p = 36\,e^{6q}\,P^2,$$
$$Q = 12\,P\,e^{6q},$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q,P) = 6\,e^{6q}\,P^2.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\Delta E = (\alpha, 0, \alpha - 1, 0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$\Delta E^2 = \alpha^2 - (\alpha - 1)^2 = 2\alpha - 1\,.$$

1. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei se $\Delta E^2 < 0$ ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E'_0 = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0$$

   ovvero

   $$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\,.$$

2. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione se $\Delta E^2 > 0$ ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E'_2 = \gamma(\Delta E_2 - \beta \Delta E_0) = \gamma(\alpha - 1 - \beta\alpha) = 0$$

   ovvero

   $$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,.$$

3. Se $\alpha = 2$, per

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

gli eventi avvengono nella stessa posizione, con separazione temporale

$$\Delta E'_0 = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0\,.$$

Essendo $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, $\Delta E'_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - 1/2) = \sqrt{3}$. A questo risultato si arrivava anche osservando che nel riferimento in cui $\Delta E'_2 = 0$, $\Delta E'_0 = \sqrt{\Delta E^2} = \sqrt{2\alpha - 1} = \sqrt{3}$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 7 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G, massa M e raggio R. Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB, rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = \frac{R}{2}$ dall'estremo A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy, passante per C, ed è soggetto alle due forze attive $\underline{F}_{\rm a} = -K\,{\rm H_a A}$ e $\underline{F}_{\rm b} = -K\,{\rm H_b B}$, con $K > 0$, dove $\rm H_a$ è la proiezione ortogonale di A sulla retta $x = -\gamma$ e $\rm H_b$ è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{\gamma}{R} \in (0, +\infty)$.

3. Ponendo ora $\gamma = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \left(M + \frac{m}{3}\right) R^2$.

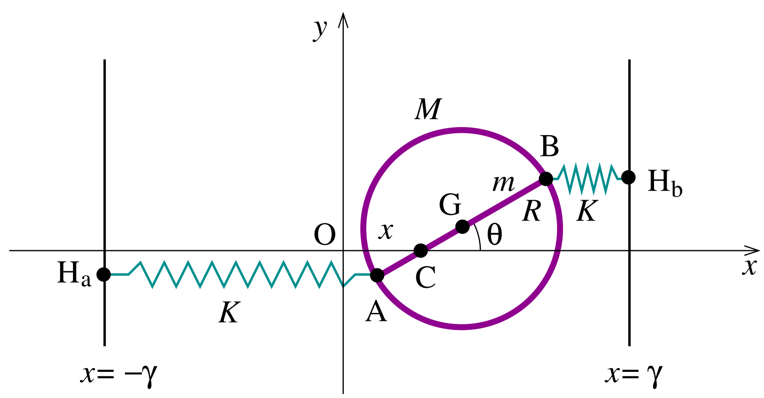


Fig. 1

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Si ha $x_{\rm G}=x+\frac{R}{2}\cos\theta$, $y_{\rm G}=\frac{R}{2}\sin\theta$, $x_{\rm A}=x-\frac{R}{2}\cos\theta$, $x_{\rm B}=x+\frac{3R}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T=\frac{1}{2}(M+m)\left(\dot x_{\rm G}^2+\dot y_{\rm G}^2\right)+\frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot\theta^2=\frac{1}{2}\left[(M+m)\,\dot x^2+\left(\frac{5}{4}M+\frac{7}{12}m\right)R^2\,\dot\theta^2-(M+m)R\sin\theta\,\dot x\,\dot\theta\right].$$

L'energia potenziale è

$$U=\frac{1}{2}K\left[(x_{\rm A}-x_{\rm H_a})^2+(x_{\rm B}-x_{\rm H_b})^2\right]=\frac{1}{2}K\left(x-\frac{R}{2}\cos\theta+\gamma\right)^2+\frac{1}{2}K\left(x+\frac{3R}{2}\cos\theta-\gamma\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L}=T-U$ e le equazioni del moto sono

$$(M+m)\left(\ddot x-\frac{R}{2}\sin\theta\,\ddot\theta-\frac{R}{2}\cos\theta\,\dot\theta^2\right)=-K\left(2x+R\cos\theta\right),$$

$$\left(\frac{5}{4}M+\frac{7}{12}m\right)R^2\,\ddot\theta-\frac{M+m}{2}R\sin\theta\,\ddot x=\frac{KR}{2}\sin\theta\left(2x+5R\cos\theta-4\gamma\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U=K\left(2x+R\cos\theta\right),\qquad \partial_\theta U=\frac{KR}{2}\sin\theta\left(4\gamma-2x-5R\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x=-\frac{R}{2}\cos\theta,\qquad (2x+5R\cos\theta-4\gamma)\sin\theta=0$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1=0$, $\theta_1=0$ e $x_1=-\frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2=0$, $\theta_2=\pi$ e $x_2=\frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta\neq 0$, $\cos\theta_{3,4}=\frac{\gamma}{R}$, $\sin\theta_3>0$ e $\sin\theta_4<0$, e $x_{3,4}=-\frac{\gamma}{2}$. Poiché la traccia assegna $\gamma>0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0<\frac{\gamma}{R}\leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U=2K,\quad \partial^2_{\theta\theta}U=\frac{KR}{2}\left[(4\gamma-2x-5R\cos\theta)\cos\theta+5R\sin^2\theta\right],\quad \partial^2_{x\theta}U=\partial^2_{\theta x}U=-KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $4K^2R(\gamma-R)$ e poiché $\partial_{xx}U>0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1,θ_1) è stabile per $\frac{\gamma}{R}>1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-4K^2R(\gamma+R)$ e poiché $\partial_{xx}U>0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2,θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{\gamma}{R}\geq 0$.
Nelle posizioni $3,4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0<\frac{\gamma}{R}\leq 1$.
Riassumendo, per $0\leq\frac{\gamma}{R}\leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{\gamma}{R}>1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot x\dot x}=M+m=4,\qquad T_{\dot\theta\dot\theta}=\left(\frac{5}{4}M+\frac{7}{12}m\right)R^2=\frac{13}{3},\qquad T_{\dot x\dot\theta}=T_{\dot\theta\dot x}=-\frac{R}{2}(M+m)\sin\theta=-2\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{5}{2}KR^2\sin^2\theta = \frac{5}{2}\sin^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KR\sin\theta = -\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2 - 4\,\omega^2\right)\left(\frac{5}{2}\sin^2\theta - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \left(1 - 2\,\omega^2\right)^2\sin^2\theta = 0,$$

dove $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{\gamma^2}{R^2} = \frac{5}{9}$ nelle posizioni di equilibrio 3,4. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$34\,\omega^4 - 27\,\omega^2 + 5 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{27 \pm 7}{68} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{5}{17}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$ e $\omega_- = \sqrt{\frac{5}{17}} \approx 0.542$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{\gamma}\, q^{\beta} \ln p$$
$$P = q\, p^{\alpha}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_4(p, P)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (-1, 1, 1, 3) \qquad E_2 = (4, 1, 1, -1)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale $c\Delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono da terra, muovendosi lungo l'asse x in versi opposti; l'astronave di A ha una velocità di modulo $c/2$, l'astronave di B ha una velocità di modulo $c/3$. Ognuno dei due astronauti, quando il proprio orologio indica che è trascorso un tempo $\tau_0 = 1$ anno dalla partenza, inverte istantaneamente il verso del proprio moto, tornando a terra. Qual è la differenza tra i tempi di arrivo T_A e T_B dei due astronauti, misurata da un orologio rimasto in quiete a terra?

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = A\,x$, con $A > 0$. Ad un certo istante, la particella transita per l'origine con velocità $v_0 > 0$. Si determini l'ascissa massima x_M raggiunta dalla particella in funzione di v_0; si determini quindi v_0, sapendo che $A\,x_M = \frac{1}{4}mc^2$.

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo $m_1 = \frac{27}{20}m$ si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ ed urta una particella di massa $m_2 = \frac{3}{4}m$ a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Soluzioni della prova in itinere di MAR del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = 1 = \frac{\beta\alpha}{\gamma} q^\beta p^{\alpha-1} \ln p - \frac{1}{\gamma} p^{\alpha-1} q^\beta$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. la trasformazione canonica risulta quindi essere:

$$Q = -\ln p$$
$$P = q\,p$$

Il differenziale $dF_4(p,P) = -q\,dp + Q\,dP$ ci dice che F_4 si ottiene integrando $-q\,dp$ a P fissato o $Q\,dP$ a p fissato, considerando $q = q(p,P)$ e $Q = Q(p,P)$. Si ottiene:

$$F_4(p,P) = -\int \frac{P}{p} dp = -P \ln p$$
$$F_4(p,P) = -\int \ln p\, dP = -P \ln p$$

2. Trasformazioni di Lorentz. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1 E_2} = (5, 0, 0, -4)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1 E_2}|^2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Nel riferimento di partenza $c\Delta t = 5$, $\Delta z = -4$, mentre $\Delta x = \Delta y = 0$, quindi il riferimento cercato è in moto lungo l'asse z rispetto a quello di partenza, e le sue coordinate si ottengono con una trasformazione di Lorentz speciale

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right)$$
$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = \gamma(z - vt)$$

con $\vec{v} = (0,0,v)$ velocità del nuovo riferimento rispetto al vecchio, e $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Nel nuovo riferimento i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, quindi

$$\Delta z' = \gamma\left(\Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t\right) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t = -4 - \frac{v}{c} 5 = 0$$

quindi

$$v = -\frac{4}{5} c \qquad \gamma = \left(1 - \frac{16}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{3}\,.$$

La separazione temporale nel nuovo riferimento è

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta z\right) = \frac{5}{3}\,[5 - (-4/5)(-4)] = 3\,.$$

3. Cinematica Relativistica. Prendiamo come origine dei tempi propri e coordinati l'evento O di partenza degli astronauti da terra. Quando l'astronauta A inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_A = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2\tau_0}{\sqrt{3}}\,.$$

Quando l'astronauta B inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_B = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{3\tau_0}{2\sqrt{2}}\,.$$

Il ritorno a terra dell'astronauta A avviene al tempo coordinato (che è anche il tempo misurato da un orologio rimasto a terra) $T_A = 2t_A$, mentre il ritorno a terra dell'astronauta B avviene al tempo coordinato $T_B = 2t_B$. La differenza tra questi due tempi è

$$T_A - T_B = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\tau_0 = 0.188\,\tau_0 = 0.188 \text{ anni}\,.$$

4a. Dinamica relativistica. L'ascissa in questione è quella del punto di inversione del moto. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = A\,x_M + mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_M = \frac{mc^2}{A}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Per la condizione posta dal problema

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{3}{5}c.$$

4b. Urti. Il fattore γ_1 della particella 1 risulta essere $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$. I due quadrimpulsi risultano quindi:

$$p_1 = (\frac{5}{3}\times\frac{27}{20}\,mc, \frac{4}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{27}{20}\,mc, 0, 0) = (\frac{9}{4}\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0)$$
$$p_2 = (\frac{3}{4}\,mc, 0, 0, 0)$$

e per la legge di conservazione del quadrimpulso:

$$p_1 + p_2 = (3\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0) = (\Gamma Mc, \Gamma MV, 0, 0)$$

dalla quale si ottiene:

$$\Gamma M = 3m$$
$$\Gamma M\frac{V}{c} = \frac{9}{5}m$$

e di conseguenza:

$$\frac{V}{c} = \frac{3}{5},$$
$$\Gamma = \frac{5}{4},$$
$$M = \frac{12}{5}m.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 29 gennaio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con asse z verticale discendente, si muove il sistema rigido formato da una guida circolare omogenea, di raggio R e massa m, e da una barra omogenea, di lunghezza $2R$ e massa m, saldata sul diametro AB della guida circolare (si veda la Fig. 1). Il punto A del sistema è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Oz. Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OA}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HG}$, dove G è il centro di massa del sistema e H è la proiezione ortogonale di G sull'asse Ox, e la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse Oz. Si indichi con $g > 0$ il valore dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di A e l'angolo θ che AB forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $g = 1$, $m = 1$, $R = 1$, $k = 4$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia sistema rigido guida+barra rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{4}{3}mR^2$.

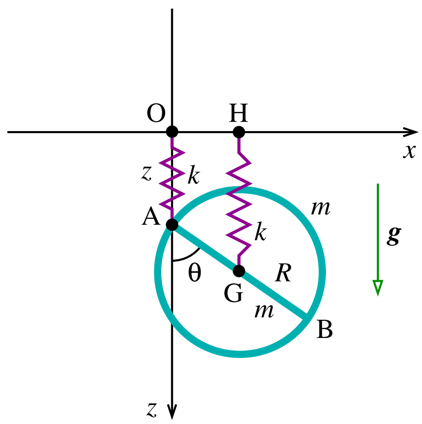


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Data la trasformazione

$$p = \frac{1}{\alpha}\ln(2\,Q\,q^{-3/2})$$
$$P = \frac{1}{3}\,(2\,Q)^{6/\alpha}\,q^{\beta-(9/\alpha)}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $c/4$. Dopo un tempo $T = 1$ anno, da terra viene inviato un segnale elettromagnetico verso l'astronave. Quando l'astronave riceve il segnale, essa inverte il verso del moto, tornando verso terra con velocità $c/2$. Nel momento in cui inverte il senso di marcia, l'astronave manda un segnale elettromagnetico verso terra.
1. Determinare l'intervallo di tempo, misurato da un orologio a terra, tra il ricevimento del segnale emesso dall'astronave, e l'arrivo dell'astronave stessa.
2. Determinare il ritardo tra l'orologio a terra e quello sull'astronave, misurato nell'istante in cui l'astronave è tornata a terra.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 29 gennaio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm G} = R\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(2m)\left(\dot x_{\rm G}^2 + \dot z_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(2\dot z^2 + \frac{10}{3}R^2\,\dot\theta^2 - 4R\sin\theta\,\dot z\,\dot\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(z+R\cos\theta)^2 - 2mg(z+R\cos\theta).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot z - R\sin\theta\,\ddot\theta - R\cos\theta\,\dot\theta^2 = g - \frac{k}{m}\left(z + \frac{R}{2}\cos\theta\right),$$

$$\frac{10}{3}R^2\,\ddot\theta - 2R\sin\theta\,\ddot z = \left[\frac{k}{m}\left(z+R\cos\theta\right) - 2g\right]R\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\left(2z + R\cos\theta\right) - 2mg, \qquad \partial_\theta U = R\sin\theta\left[2mg - k(z+R\cos\theta)\right].$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} z + \frac{R}{2}\cos\theta = \frac{mg}{k}, \\ \left(z + R\cos\theta - \frac{2mg}{k}\right)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $z_1 = \frac{mg}{k} - \frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $z_2 = \frac{mg}{k} + \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta_{3,4} \neq 0$, $z_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{2mg}{kR}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 \le \frac{2mg}{kR} \le 1 \qquad\Rightarrow\qquad 0 \le \lambda \le \frac{1}{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = R\cos\theta\left[2mg - k(z+R\cos\theta)\right] + kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -kR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} - \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_1, θ_1) è stabile per $\lambda > \frac{1}{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} + \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda \ge 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \le \lambda \le \frac{1}{2}$.
Riassumendo, per $0 \le \lambda < \frac{1}{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{1}{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot z\dot z} = 2m \qquad T_{\dot\theta\dot\theta} = \frac{10}{3}mR^2, \qquad T_{\dot z\dot\theta} = T_{\dot\theta\dot z} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = kR^2\sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -kR\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$2\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{3k}{4m} - \frac{10}{3}\omega^2\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{k}{m} - 2\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$11\,\omega^4 - 62\,\omega^2 + 36 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{31 \pm \sqrt{565}}{11} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 4.98,\;\; \omega_-^2 = 0.657.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 2.23$ e $\omega_- = 0.811$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q in funzione di p e q otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\, q^{3/2}\, e^{\alpha p} \\ P &= \frac{1}{3}\, q^{\beta}\, e^{6p} \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q, P] = q^{\beta+3/2-1}\, e^{(\alpha+6)p}\, \frac{1}{6}(9 - \alpha\beta) = 1.$$

che implica $\alpha = -6$, $\beta = -\frac{1}{2}$. La trasformazione è quindi canonica se

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\, q^{3/2}\, e^{-6p} \\ P &= \frac{1}{3}\, q^{-1/2}\, e^{6p}. \end{aligned} \tag{2}$$

Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6}\, \ln(3\, q^{1/2}\, P) \\ Q &= \frac{1}{6}\, \frac{q}{P}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sappiamo che $dF_2(q, P) \;=\; p\, dq \;+\; Q\, dP$ e quindi:

$$\begin{aligned} F_2(q, P) &= \int \frac{1}{6}\, \frac{q}{P}\, dP \;+\; f(q) \\ F_2(q, P) &= \int \frac{1}{6}\, \ln P dq \;+\; \int \frac{1}{12}\, \ln q\, dq \;+\; \frac{1}{6}\, q\, \ln 3 \end{aligned} \tag{4}$$

$\Rightarrow f(q) \;=\; \int \frac{1}{12}\, \ln q\, dq \;+\; \frac{1}{6}\, q\, \ln 3 \;\;\Rightarrow$

$$F_2(q, P) \;=\; \frac{1}{6}\, q\, \ln P \;+\; \int \frac{1}{12}\, \ln q\, dq \;+\; \frac{1}{6}\, q\, \ln 3.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Fissiamo l'origine degli orologi a terra e sull'astronave al momento della partenza, e sia $x = 0$ la posizione della terra. Sia A l'evento in cui l'astronave è raggiunta dal segnale elettromagnetico. Il tempo t_A e la posizione x_A di questo evento si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x_A &= c(t_A - T) \\ x_A &= \frac{c}{4} t_A\,, \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$t_A = \frac{4}{3}T\,, \quad x_A = \frac{c}{3}T\,.$$

1. Siano B l'evento del ricevimento a terra del segnale dall'astronave, e C l'evento del ritorno a terra dell'astronave. Poichè il segnale viene emesso in A,

$$t_B = t_A + \frac{x_A}{c} = \frac{4}{3}T + \frac{1}{3}T = \frac{5}{3}T$$
$$t_C = t_A + \frac{x_A}{c/2} = \frac{4}{3}T + \frac{2}{3}T = 2T$$

quindi

$$t_C - t_B = \frac{1}{3}T\,.$$

2. Sia $v_1 = c/4$ la velocità nel tratto OA, $v_2 = c/2$ la velocità nel tratto AC. L'orologio sull'astronave, nell'evento A, misura il tempo proporio

$$\tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}t_A = \sqrt{1 - \frac{1}{16}}\frac{4}{3}T = \frac{\sqrt{15}}{3}T\,.$$

L'intervallo di tempo proprio sull'astronave tra A e C è

$$\tau_C - \tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}(t_C - t_A) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\left(2T - \frac{4}{3}T\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3}T = \frac{\sqrt{3}}{3}T\,,$$

quindi

$$\tau_C = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{3}T \simeq 1.87T$$

e il ritardo è

$$t_C - \tau_C = 2T - 1.87T = 0.13T\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida quadrata omogenea ABCD, di lato a e massa m. Il punto medio M del lato AB della guida quadrata è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox, e la guida quadrata è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per M (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OM}$, con $k > 0$, e $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sulla retta $y = d$ (con $d > 0$). Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di M e l'angolo θ che il lato AB della guida quadrata forma con il verso positivo dell'asse Ox.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{a}{d} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 1$, $m = 1$, $a = 4$, $d = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della guida quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{4}{3}ma^2$.

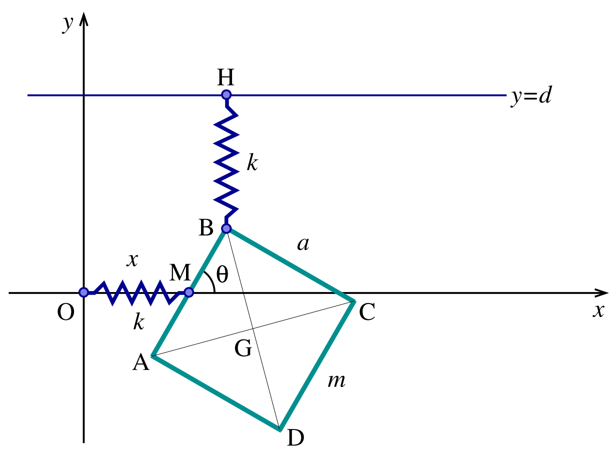


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{3}\,q^\alpha\,\left(1 - \frac{\gamma^2 p^2}{2}\right)$$
$$P = 2\,\gamma\,q^\beta\,p$$

dalle variabili q, p alle variabili Q, P. Dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica. (Si suggerisce, nel calcolo della funzione generatrice, di integrare le espressioni di $\frac{\partial F_2}{\partial q}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial P}$, trovandone le soluzioni generali, e imporre che siano la stessa funzione; in alternativa, eseguire il calcolo dell'integrale di linea lungo una linea scelta in modo tale da rendere semplice il calcolo).

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m_1 si muove lungo l'asse x con velocità v_1 ed urta una particella di massa m_2 a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Sapendo che $v_1 = \frac{2}{3}c$ e $\frac{m_1}{M} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, determinare V e $\frac{m_2}{M}$.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm M} = x$, $y_B = \frac{a}{2}\sin\theta$, $x_{\rm G} = x + \frac{a}{2}\sin\theta$, $y_{\rm G} = -\frac{a}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{19}{12}a^2\,\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{a}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{m}\,x,$$

$$\frac{19}{12}a^2\,\ddot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{x} = \frac{ka}{2m}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\cos\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx, \qquad \partial_\theta U = \frac{ka}{2}\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{2d}{a}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{2d}{a} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \geq 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ e $\partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$.
Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda < 2$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ si ha $\partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \geq 2$.
Riassumendo, per $0 < \lambda < 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $\lambda \geq 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = m \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{19}{12}ma^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = \frac{ma}{2}\cos\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 0.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m}\cos^2\theta - \frac{19}{3}\omega^2\right) - \cos^2\theta\,\omega^4 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$67\,\omega^4 - 85\,\omega^2 + 9 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{85 \pm \sqrt{4813}}{134} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 1.15,\;\; \omega_-^2 = 0.117.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.07$ e $\omega_- = 0.341$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P] = \frac{2}{3}\alpha\gamma\, q^{\alpha+\beta-1}\,(1 - \frac{\gamma^2 p^2}{2}) + \frac{2}{3}\beta\gamma\, q^{\alpha+\beta-1}\gamma^2\, p^2 = 1.$$

che implica $\alpha+\beta = 1$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{2}{3}\,\alpha\,\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{9}{4}$.
Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$p = \frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}$$
$$Q = \frac{1}{3}\,q^{2/3} - \frac{P^2}{24}.$$

Sappiamo che $dF_2(q,P) = p\,\mathrm{d}q + Q\,\mathrm{d}P$ e quindi:

$$F_2(q,P) = \int \frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}dq + f(P) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} + f(P)$$
$$F_2(q,P) = \int \left(\frac{1}{3}\,q^{2/3} - \frac{P^2}{24}\right) dP + g(q) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} - \frac{P^3}{72} + g(q)$$

$\Rightarrow g(q) \equiv 0$ e $f(P) = -\frac{P^3}{72}$ (a meno di costanti additive) cosicché

$$F_2(q,P) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} - \frac{P^3}{72}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Per la conservazione dell'impulso,

$$m_1\gamma_1 v_1 = M\Gamma V\,.$$

Elevando al quadrato, e sapendo che $\gamma_1^2\frac{v_1^2}{c^2} = \gamma_1^2 - 1$, $\Gamma^2\frac{V^2}{c^2} = \Gamma^2 - 1$,

$$m_1^2(\gamma_1^2 - 1) = M^2(\Gamma^2 - 1)$$

ed essendo

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^2 - 1 = \frac{4}{5}\,,$$
$$m_1^2 = \frac{9}{32}M^2\,,$$

si ha

$$\Gamma^2 - 1 = \frac{m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{M^2} = \frac{9}{40} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{7}{2\sqrt{10}}\,,$$

e

$$V^2 = \frac{\Gamma^2 - 1}{\Gamma^2} = \frac{9}{49} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{7}\,.$$

Per la conservazione dell'energia,

$$m_1 \gamma_1 + m_2 = M\Gamma\,,$$

quindi

$$\frac{m_2}{M} = \Gamma - \frac{m_1}{M}\gamma_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con z verticale discendente, si muove una guida circolare rigida e omogenea, di centro G, raggio R e massa $3m$. Sul diametro AB della guida è saldata una barra rigida e omogenea di massa m. Il punto D dell'asta, a distanza $d = \frac{1}{2}R$ da A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse Oz, e il sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per D (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OD}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse Ox, e la forza peso, con $g > 0$ intensità dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di D e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema; non è richiesto di ricavare le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 4$, $m = 1$, $R = 4$, $g = 9$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{10}{3}mR^2$.

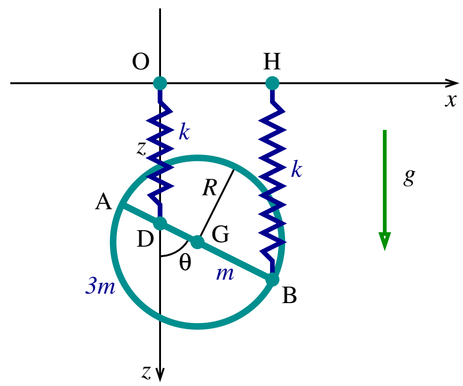


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

È data la trasformazione

$$p = \frac{q^{\alpha/2}}{2Q^{1/2}}$$
$$P = \frac{B\,q^{\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha\delta}{2}\right)}}{(4Q)^{\delta/2}}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, δ, B la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkowski (ct, x, y, z) i tre eventi $E_1 = (1, 1, 0, 0)$, $E_2 = (2, 1, 4, 0)$ e $E_3 = (5, 1, 0, 3)$.
1. Determinare la velocità $\mathbf{v_1} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 sono simultanei.
2. Determinare la velocità $\mathbf{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_1, E_3 avvengono nella stessa posizione.
3. Determinare la velocità $\mathbf{v_3} = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi E_2, E_3 sono simultanei.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $z_{\rm D} = z$, $z_B = z + \frac{3}{2}R\cos\theta$, $x_{\rm G} = \frac{1}{2}R\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + \frac{1}{2}R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}4m\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{z}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(4\dot{z}^2 + \frac{13}{3}R^2\,\dot{\theta}^2 - 4R\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{z}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz_D^2 + \frac{1}{2}kz_B^2 - 4mgz_G = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)^2 - 4mg\left(z + \frac{1}{2}R\cos\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$. Per completezza, si riportano qui di seguito le equazioni del moto (non richieste dalla traccia):

$$2m\left(2\ddot{z} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) + 4mg,$$

$$m\left(\frac{13}{3}R^2\,\ddot{\theta} - 2R\sin\theta\,\ddot{z}\right) = \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta - 2mgR\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) - 4mg, \qquad \partial_\theta U = 2mgR\sin\theta - \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} 4z + 3R\cos\theta - 8\lambda R = 0, \\ (6z + 9R\cos\theta - 8\lambda R)\sin\theta = 0, \end{cases}$$

dove si è introdotto il parametro adimensionale $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$ suggerito dalla traccia.
La prima posizione di equilibrio è $z_1 = \frac{8\lambda - 3}{4}R$ e $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $z_2 = \frac{8\lambda + 3}{4}R$ e $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$.
Si hanno poi due posizioni di equilibrio equivalenti, $z_{3,4} = \frac{8}{3}\lambda R$, $\cos\theta_{3,4} = -\frac{8}{9}\lambda$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-\frac{8}{9}\lambda \geq -1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \leq \frac{9}{8}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{1}{4}kR\cos\theta\,(8\lambda R - 6z - 9R\cos\theta) + \frac{9}{4}kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -\frac{3}{2}kR\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ e nelle posizioni 1,2 $\partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) non è stabile per nessun $\lambda \geq 0$, mentre la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\lambda > \frac{9}{8}$.
Nelle posizioni $3, 4$ il determinante della matrice Hessiana vale $\frac{9}{4}k^2R^2\sin^2\theta \geq 0$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \leq \frac{9}{8}$.
Riassumendo, per $0 < \lambda \leq \frac{9}{8}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{9}{8}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = \frac{9}{16} < \frac{9}{8}$, quindi le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{z}\dot{z}} = 4m, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{13}{3}mR^2, \qquad T_{\dot{z}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{z}} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{9}{4}kR^2\sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -\frac{3}{2}kR\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2\Omega^2 - 4\omega^2\right)\left(\frac{9}{4}\sin^2\theta\,\Omega^2 - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \sin^2\theta\left(\frac{3}{2}\Omega^2 - 2\omega^2\right)^2 = 0,$$

dove $\Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$688\,\omega^4 - 524\,\Omega^2\,\omega^2 + 81\,\Omega^4 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{262 \pm \sqrt{12916}}{688}\,\Omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 \approx 0.5460\,\Omega^2,\;\; \omega_-^2 \approx 0.2156\,\Omega^2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 0.739\,\Omega$ e $\omega_- \approx 0.464\,\Omega$. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\Omega = 2$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. Esprimendo Q, P in funzione di q, p otteniamo:

$$Q = \frac{1}{4}q^\alpha p^{-2}$$
$$P = Bq^{1/3}p^\delta$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{q,p}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P] = \frac{B}{4}(\alpha\delta + \frac{2}{3})q^{(\alpha-\frac{2}{3})}p^{(\delta-3)} = 1.$$

che implica $\alpha = \frac{2}{3}$, $\delta = 3$, $B = \frac{3}{2}$.
2. Per ottenere $F_3(p,Q)$ bisogna ricavare q e P in funzione di p e Q, in corrispondenza dei valori trovati per α, δ, B:

$$q = 8Q^{3/2}p^3$$
$$P = 3Q^{1/2}p^4$$

Sappiamo che $\mathrm{d}F_3 = -q\,\mathrm{d}p - P\,\mathrm{d}Q$ e quindi, scegliendo per esempio la spezzata $(0,0) \longrightarrow (p,0) \longrightarrow (p,Q)$ come cammino d'integrazione, si ottiene

$$F_3(p,Q) = -2Q^{3/2}p^4.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Le separazioni tra gli eventi sono

$$\begin{aligned} \vec{E}_{12} &= (1,0,4,0) && \text{genere spazio (spacelike)},\\ \vec{E}_{13} &= (4,0,0,3) && \text{genere tempo (timelike)},\\ \vec{E}_{23} &= (3,0,-4,-3) && \text{genere spazio (spacelike)}. \end{aligned}$$

1. Il riferimento (ct', x', y', z') in cui E_1, E_2 sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_1 = (0, v_1, 0)$, tale che

$$c\Delta t' = \gamma_1\left(c\Delta t - \frac{v_1}{c}\Delta y\right) = \gamma_1\left(1 - \frac{4v_1}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{c}{4}\,.$$

2. Il riferimento (ct'', x'', y'', z'') in cui E_1, E_3 avvengono nella stessa posizione è in moto con velocità $\vec{v}_2 = (0,0,v_2)$, tale che

$$\Delta z'' = \gamma_2(\Delta z - v_2\Delta t) = \gamma_2\left(3 - \frac{4v_2}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{3}{4}c\,.$$

3. Un possibile riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui E_2, E_3 sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_3 = (0, v_3, 0)$, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_1 \left(c\Delta t - \frac{v_3}{c} \Delta y \right) = \gamma_1 \left(3 + \frac{4v_1}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -\frac{3}{4} c \,.$$

Un'altra possibile soluzione prevede che il moto avvenga sul piano yz, dal punto $(0, 0)$, al punto $(-4, -3)$. Ruotando gli assi sul piano (y, z) e chiamando η l'asse che passa per $(0, 0)$ e $(-4, -3)$, abbiamo $\Delta\eta = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$. Allora il riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui E_2, E_3 sono simultanei è in moto con velocità la cui unica componente non nulla è v_η, lungo l'asse η, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_\eta \left(c\Delta t - \frac{v_\eta}{c} \Delta\eta \right) = \gamma_\eta \left(3 - \frac{5v_\eta}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\eta = \frac{3}{5} c \,.$$

Riproiettando sul piano xy, si trova che il sistema è in moto con velocità $\vec{v}_3\,' = (0, v_y, v_z)$, tale che

$$v_y = v_\eta \, \frac{(-4)}{5} = -\frac{12}{25} c \,, \qquad v_z = v_\eta \, \frac{(-3)}{5} = -\frac{9}{25} c \,,$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 luglio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata ABCD rigida e omogenea, di lato L e massa m. Il punto medio M del lato AB è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox e la lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per M (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OM}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HN}$, con N punto medio del lato CD e H proiezione ortogonale di N sulla retta $y = a$, con $a > 0$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di M e l'angolo θ che il segmento MN forma forma con il verso positivo dell'asse Ox.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{a}{L} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 4$, $m = 4$, $L = 4$, $a = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{6}mL^2$.

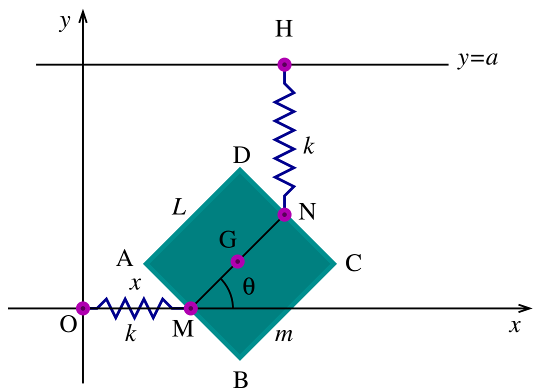


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{3}\right)^{1/3} p^{-2/3}$$
$$P = B\, p^{(\delta-2\gamma/3)} \left(\frac{Q}{3}\right)^{\gamma/3}$$

dalle variabili p, Q alle variabili q, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali γ, δ, B la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due particelle di masse a riposo $m_1 = m_2 = m$ si muovono nel piano $x - y$, la prima con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ diretta lungo l'asse delle x, la seconda con velocità $v_2 = \frac{3}{5}c$ diretta lungo l'asse delle y. Le due particelle urtano producendo un'unica particella di massa M e velocità $\vec{V} = (V_1, V_2)$. Determinare $\lambda = \frac{M}{m}$, V_1 e V_2.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 luglio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\mathrm{M}} = x$, $y_N = L\sin\theta$, $x_{\mathrm{G}} = x + \frac{L}{2}\cos\theta$, $y_{\mathrm{G}} = \frac{L}{2}\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\mathrm{G}}^2 + \dot{y}_{\mathrm{G}}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{5}{12}L^2\,\dot{\theta}^2 - L\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{x}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(L\sin\theta - a\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$m\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -k\,x,$$

$$m\left(\frac{5}{12}L^2\,\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot{x}\right) = -kL\left(L\sin\theta - a\right)\cos\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx, \qquad \partial_\theta U = kL\left(L\sin\theta - a\right)\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(L\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x_{3,4} = 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{a}{L} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \lambda \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = kL^2\cos^2\theta - kL\left(L\sin\theta - a\right)\sin\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ e $\partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$.
Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda > 1$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ si ha $\partial^2_{\theta\theta}U = kL^2\cos^2\theta$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \lambda \leq 1$.
Riassumendo, per $\lambda > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $0 < \lambda \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = m, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{5}{12}mL^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{1}{2}mL\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = k, \qquad U_{\theta\theta} = kL^2\cos^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 0.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(\Omega^2 - \omega^2\right)\left(12\,\Omega^2 \cos^2\theta - 5\omega^2\right) - 3\sin^2\theta\,\omega^4 = 0,$$

dove $\Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$17\,\omega^4 - 56\,\Omega^2\,\omega^2 + 36\,\Omega^4 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{28 \pm \sqrt{172}}{17}\,\Omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.4185\,\Omega^2,\;\; \omega_-^2 = 0.8756\,\Omega^2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 1.555\,\Omega$ e $\omega_- \approx 0.9357\,\Omega$. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\Omega = 1$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. Esprimendo Q, P in funzione di q, p otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= 3\,q^3 p^2 \\ P &= B\,q^\gamma p^\delta \end{aligned}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q, P] = 3B\,(3\delta - 2\gamma)\,q^{(\gamma+2)} p^{(\delta+1)} = 1.$$

che implica $\gamma = -2$, $\delta = -1$, $B = \frac{1}{3}$.
2. Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P, in corrispondenza dei valori trovati per γ, δ, B:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} q^{-2}\,P^{-1} \\ Q &= \frac{1}{3}\,q^{-1} P^{-2} \end{aligned}$$

Sappiamo che $dF_2 = p\,dq + Q\,dP$ e quindi integrando $p\,dq$ e $Q\,dP$ e confrontando il risultato si ottiene

$$F_2(q, P) = -\frac{1}{3} q^{-1} P^{-1}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
I fattori γ_1, γ_2 delle particelle iniziali sono

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{3} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}\,. \end{aligned}$$

I loro quadrimomenti sono $p_1 = m\gamma_1(c, v_1, 0)$ e $p_2 = m\gamma_2(c, 0, v_2)$, mentre il quadrimomento della particella finale è $P = M\Gamma(c, V_1, V_2)$ dove

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (V^2 = V_1^2 + V_2^2)\,.$$

Per la legge di conservazione del quadrimomento

$$\begin{aligned} m(\gamma_1 + \gamma_2) &= M\Gamma \\ m\gamma_1 v_1 &= M\Gamma V_1 \\ m\gamma_2 v_2 &= M\Gamma V_2\,. \end{aligned}$$

Utilizzando la proprietà $\gamma_1^2 v_1^2 = \gamma_1^2 - 1$ (e lo stesso per le altre particelle),

$$m^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2m^2 = M^2(\Gamma^2 - 1)$$

da cui insieme alla conservazione dell'energia si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= \lambda^2(\Gamma^2 - 1) - 2 \\ (\gamma_1 + \gamma_2)^2 &= \lambda^2\Gamma^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lambda = \sqrt{\frac{37}{6}} \quad ; \quad \Gamma = \frac{35}{12}\sqrt{\frac{6}{37}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{v_1\gamma_1}{\lambda\Gamma} = \frac{16}{35} \\ V_2 &= \frac{v_2\gamma_2}{\lambda\Gamma} = \frac{9}{35}\,. \end{aligned}$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 settembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con z verticale discendente, si muove un corpo rigido formato da due barre omogenee, AB e B$'$C, di massa M e lunghezza L, saldate nell'estremo comune B=B$'$, in modo da formare un angolo retto (si veda la Fig. 1). L'estremo A della prima barra è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oz. Il sistema è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per A. Sul sistema agiscono la forza elastica $\underline{F}_e = -K\,\text{HB}$, con $K > 0$, dove H è la proiezione ortogonale di B sull'asse Ox, e la forza di gravità. Si indichi con g il valore dell'accelerazione di gravità e si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di A e l'angolo θ che il segmento AB forma forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema (non è richiesto di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
3. Ponendo ora $K = 1$, $M = 1$, $L = 2$, $g = 7\sqrt{2}$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia di una barra omogenea di massa M e lunghezza L rispetto al suo centro di massa G è $I_{\text{G}} = \frac{1}{12}ML^2$. Per calcolare l'energia cinetica del sistema, si calcoli separatamente l'energia cinetica delle due barre, utilizzando il teorema di König, e poi si sommino i due contributi.

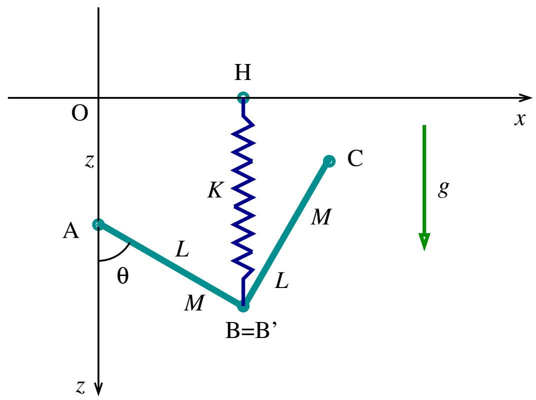


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$p = 5^{\frac{1}{\beta}}\, Q^{\frac{1}{\beta}}\, q^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$P = \gamma\, 5^{\frac{7}{\beta}}\, Q^{\frac{7}{\beta}}\, q^{5-\frac{7\alpha}{\beta}}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P.
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_4(p, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{1}{3}c$. Nel momento in cui parte, essa manda un segnale luminoso diretto lungo l'asse x. Una seconda astronave si trova in una stazione spaziale a una distanza di 1.5 anni luce dalla terra lungo l'asse x e, nel momento in cui riceve il segnale luminoso, si muove con velocità $v_2 = \frac{1}{6}c$ verso la prima astronave.
1. A che distanza dalla terra le due astronavi si incontrano?
2. Qual è la durata del viaggio della prima astronave, misurata da un orologio solidale con essa? Qual è la durata del viaggio della seconda astronave, misurata da un orologio solidale con essa?

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 settembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $z_{\rm B} = z + L\cos\theta$ e, detti G e G$'$ i centri di massa delle due barre, $x_{\rm G} = \frac{1}{2}L\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + \frac{1}{2}L\cos\theta$, $x_{\rm G'} = L\sin\theta + \frac{1}{2}L\cos\theta$, $z_{\rm G'} = z + L\cos\theta - \frac{1}{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{z}_{\rm G}^2 + \dot{x}_{\rm G'}^2 + \dot{z}_{\rm G'}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\rm G'}\,\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left[2\dot{z}^2 - L(3\sin\theta + \cos\theta)\,\dot{\theta}\,\dot{z} + \frac{5}{3}L^2\dot{\theta}^2\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K(z + L\cos\theta)^2 - Mg\left(2z + \frac{3}{2}L\cos\theta - \frac{1}{2}L\sin\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = K(z + L\cos\theta) - 2Mg, \qquad \partial_\theta U = -KL(z + L\cos\theta)\sin\theta + \frac{1}{2}MgL(3\sin\theta + \cos\theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Dalla prima equazione si ha

$$z + L\cos\theta = \frac{2Mg}{K}$$

e sostituendo nella seconda si trova

$$\sin\theta = \cos\theta.$$

Esistono quindi due posizioni di equilibrio, la prima

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2Mg}{K} - \frac{L\sqrt{2}}{2}, \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

la seconda

$$\begin{cases} z_2 = \frac{2Mg}{K} + \frac{L\sqrt{2}}{2}, \\ \theta_2 = \frac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = -KL(z + L\cos\theta)\cos\theta + KL^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}MgL(3\cos\theta - \sin\theta), \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -KL\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{zz}U > 0$, la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia positivo il determinante della matrice Hessiana

$$-K^2L(z + L\cos\theta)\cos\theta + \frac{1}{2}MgKL(3\cos\theta - \sin\theta) = -\frac{1}{2}MgKL(\cos\theta + \sin\theta).$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_1, θ_1) è instabile e la posizione di equilibrio (z_2, θ_2) è stabile.
3. Nella posizione di equilibrio stabile, per i valori assegnati dei parametri, $z_2 = 10\sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{z}\dot{z}} = 2M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{5}{3}ML^2, \qquad T_{\dot{z}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{z}} = -\frac{1}{2}ML(3\sin\theta + \cos\theta).$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio è

$$U_{zz} = K, \qquad U_{\theta\theta} = KL^2 \sin^2\theta - MgL(\cos\theta + \sin\theta), \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -KL\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà l'equazione biquadratica

$$4\,\omega^4 - 44\,\omega^2 + 21 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{22 \pm 20}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{21}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{1}{2}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 3.240$ e $\omega_- \approx 0.7071$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

1. Invertendo le relazioni date, si trova $Q = \frac{1}{5}q^\alpha p^\beta$ e $P = \gamma q^5 p^7$, da cui

$$[Q, P]_{q,p} = \frac{\gamma}{5}(7\alpha - 5\beta)q^{\alpha+4}p^{\beta+6}$$

   Imponendo che la parentesi di Poisson abbia il valore canonico si trova $\alpha = -4$, $\beta = -6$ e $\gamma = \frac{5}{2}$.

2. Si ha $dF_4 = -qdp + QdP$, con

$$q = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/5} P^{1/5}p^{-7/5} \qquad Q = 5^{-1/5}2^{-4/5}P^{-4/5}p^{-2/5}.$$

   Una primitiva della forma differenziale dF_4 è

$$F_4(p, P) = \left(\frac{5}{2}\right)^{4/5} P^{1/5}p^{-2/5}\,.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.

1. Prendiamo come origine dell'asse x la terra e come origine dei tempi, nel riferimento della terra, l'istante di partenza della prima astronave. Il tempo che il segnale luminoso, inviato dalla prima astronave alla partenza, impiega a raggiungere la seconda astronave è $t_0 = d/c$. Le leggi orarie del moto delle due astronavi sono

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 t && \text{(per } t > 0\text{);} \\ x_2 &= d - v_2(t - t_0) = d\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) - v_2 t && \text{(per } t > t_0\text{)}\,. \end{aligned}$$

   Esse si incontrano quando $x_1 = x_2$, ovvero

$$t = t^* = \frac{d}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) = \frac{7}{3}\frac{d}{c} = \frac{7}{2}a\,,$$

   (a=anno), ad una distanza dalla terra

$$x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*) = \frac{dv_1}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) = \frac{7}{9}d = \frac{7}{6}al\,,$$

   (al=anno luce).

2. I tempi misurati dai due orologi durante li viaggio delle sue astronavi sono

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t^*\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^* = \frac{7}{3}\sqrt{2}a\,, \\ \tau_2 &= (t^* - t_0)\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{35}}{6}(t^* - t_0) = \frac{\sqrt{35}}{3}a\,. \end{aligned}$$

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 novembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto
Compito A

MECCANICA LAGRANGIANA

In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una guida circolare rigida e omogenea, di massa M, centro G e raggio R. Il punto A della guida circolare può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -K\,\text{OA}$, $K > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -K\,\text{HB}$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per A. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che il diametro AB della guida circolare forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

1. Si scriva la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro adimensionale $\frac{KR}{Mg}$.
3. Ponendo ora $M = 2$, $R = 1$, $K = 1$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa è $I_G = MR^2$.

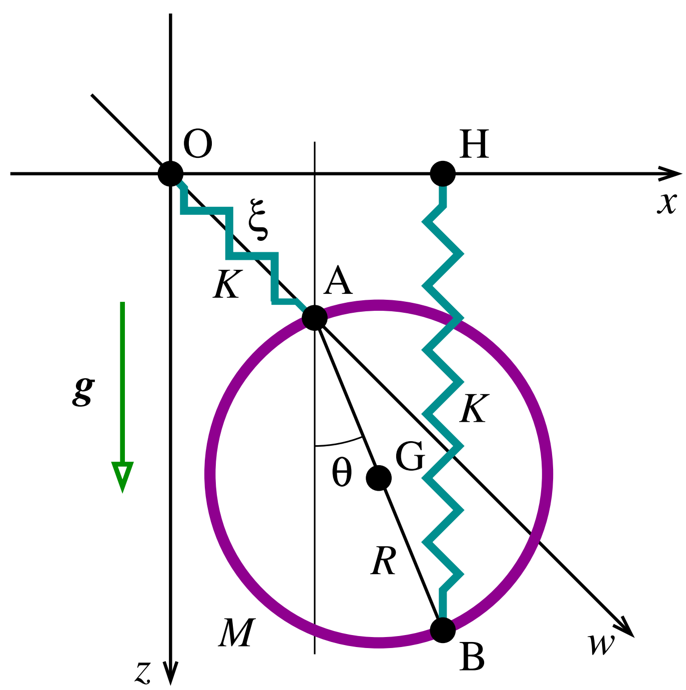


Fig. 1

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

1. Il centro di massa ha coordinate $x_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 2R\sin\theta)$ e $z_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 2R\cos\theta)$. Inoltre $z_B = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 4R\cos\theta)$. La velocità del centro di massa è $\dot{x}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\dot{\xi} + 2R\cos\theta\,\dot{\theta})$, $\dot{z}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\dot{\xi} - 2R\sin\theta\,\dot{\theta})$.
L'energia cinetica è
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}^2 + 2R^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\,R\,(\cos\theta - \sin\theta)\,\dot{\xi}\dot{\theta}\right].$$
L'energia potenziale è
$$U = -Mgz_G + \frac{1}{2}K(\xi^2 + z_B^2) = -\frac{1}{2}Mg(\sqrt{2}\,\xi + 2R\cos\theta) + \frac{1}{2}K\left(\frac{3}{2}\xi^2 + 4R^2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\,R\xi\cos\theta\right).$$
La funzione di Lagrange del sistema è $\mathcal{L} = T - U$.

2. Per determinare le posizioni d'equilibrio si calcolano
$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\sqrt{2}\,Mg}{2} + \frac{3}{2}K\xi + \sqrt{2}\,KR\cos\theta, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(MgR - 4KR^2\cos\theta - \sqrt{2}\,KR\xi\right)\sin\theta$$
Le posizioni d'equilibrio sono quindi:
$$1. \qquad \sin\theta_1 = 0 \to \theta_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} - 1\right).$$
$$2. \qquad \sin\theta_2 = 0 \to \theta_2 = \pi, \quad \xi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} + 1\right).$$
$$3. \qquad \cos\theta_3 = \frac{Mg}{8KR} \to \theta_3 = \arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{2}\,Mg}{4K}.$$
$$4. \qquad \cos\theta_4 = \frac{Mg}{8KR} \to \theta_4 = -\arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_4 = \frac{\sqrt{2}\,Mg}{4K}.$$
Le ultime due sono equivalenti per simmetria ed esistono solo se $\frac{Mg}{8KR} \le 1$, cioè per $\frac{KR}{Mg} \ge \frac{1}{8}$. Per determinare la stabilità delle posizioni d'equilibrio, si calcolano
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{3}{2}K, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (MgR - \sqrt{2}\,KR\xi)\cos\theta + 4KR^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta), \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\theta} = -\sqrt{2}\,KR\sin\theta.$$
Si verifica allora che la posizione 1 è stabile per $\frac{KR}{Mg} < \frac{1}{8}$, la posizione 2 è sempre instabile, le posizioni 3 e 4 sono stabili quando esistono, cioè per $\frac{KR}{Mg} \ge \frac{1}{8}$.

3. Per i valori assegnati dei parametri si ha $\frac{KR}{Mg} = \frac{1}{16} < \frac{1}{8}$, per cui la posizione d'equilibrio stabile è la posizione numero 1. Indicando con un pedice 1 l'espressione calcolata in corrispondenza di (ξ_1, θ_1), si ha
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_1 = \frac{3}{2}, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_1 = \frac{8}{3}, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\theta}\right)_1 = 0.$$
e
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\xi}^2}\right)_1 = M = 2, \qquad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2}\right)_1 = 2MR^2 = 4, \qquad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}\partial\dot{\xi}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\xi}\partial\dot{\theta}}\right)_1 = \frac{\sqrt{2}\,MR}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\bigg|_1 = \sqrt{2}.$$
Le frequenze dei modi normali sono quindi determinate dall'equazione
$$\left(\frac{3}{2} - 2\omega^2\right)\left(\frac{8}{3} - 4\omega^2\right) - 2\omega^4 = 0,$$
ovvero $9\omega^4 - 17\omega^2 + 6 = 0$. Le soluzioni sono $\omega_+ = 1.19$ e $\omega_- = 0.685$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 gennaio 2020

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = 3 \ln \left(\frac{p}{q^\alpha} \right)$$
$$P = q^\gamma \left(\frac{1}{p} + \beta\, p \right)$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_1(q, Q)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel sistema di riferimento dato,

$$E_1 = (-2, 2, 0, 1) \qquad E_2 = (1, 2, 2, 1)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale (moltiplicata per c) tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo sistema di riferimento.

3. Cinematica relativistica. Una stazione orbitante si muove lungo un'orbita circolare con velocità costante $v_1 = \frac{3}{5}c$, completando ogni orbita in un periodo T (tempi e velocità sono riferiti ad un osservatore inerziale posto al centro dell'orbita). Dopo aver sincronizzato il suo orologio con quello a bordo della stazione, un astronauta si allontana con velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$ lungo una traiettoria rettilinea tangente all'orbita. Dopo un tempo T, l'astronauta inverte il moto e rientra nella stazione percorrendo a ritroso il medesimo tragitto con velocità $v_2' = \frac{1}{2}v_2 = \frac{2}{5}c$, di modo che al suo rientro la stazione ha percorso esattamente tre orbite. Indicati con τ_1 e τ_2 il tempo trascorso, così come misurato, rispettivamente, dall'orologio a bordo della stazione orbitante e dall'orologio dell'astronauta, si determinino τ_1 e τ_2 in funzione di T. Quale dei due orologi segna il tempo minore?

4. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m, inizialmente in quiete, viene messa in moto dalla forza $F(t) = \frac{b}{2\sqrt{t}}$ (per $t > 0$) diretta lungo l'asse x, con $b > 0$ costante dimensionale. Si determinino la legge oraria della velocità $v(t)$ e il limite della velocità v_∞ per $t \to \infty$.

5. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo M, in quiete, decade in tre particelle identiche di massa m che si muovono su uno stesso piano, lungo tre direzioni formanti angoli di 120°, con velocità uguale in modulo, v. Dopo aver verificato che, nelle condizioni date, la conservazione della quantità di moto è garantita per ogni v, determinare v in funzione del rapporto $\lambda = \frac{m}{M}$. Per quale valore di λ si ha $v = \frac{4}{5}c$?

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 gennaio 2020

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = 3\,\frac{q^\alpha}{p}\left(-\alpha\frac{p}{q^{\alpha+1}}\right)q^\gamma\left(-\frac{1}{p^2}+\beta\right) - 3\gamma\frac{q^\alpha}{p}\frac{1}{q^\alpha}\,q^{\gamma-1}\left(\frac{1}{p}+\beta\,p\right) = 1$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\gamma = 1$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned} p &= q\,e^{Q/3} \\ P &= e^{-Q/3} - \frac{1}{6}\,q^2\,e^{Q/3} \end{aligned}$$

Integrando il differenziale $dF_1(q,Q) = p\,dq - P\,dQ$ si ottiene:

$$F_1(q,Q) = \frac{q^2}{2}\,e^{Q/3} + 3\,e^{-Q/3}$$

2. Trasformazioni di Lorentz. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1E_2} = (3,0,2,0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1E_2}|^2 = 9 - 4 = 5$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Nel riferimento di partenza $\Delta x = \Delta z = 0$, $\Delta y = 2$, $c\Delta t = 3$, quindi il riferimento cercato è in moto lungo l'asse y rispetto a quello di partenza, e le sue coordinate si ottengono con una trasformazione di Lorentz speciale

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \end{aligned}$$

con $\vec{v} = (0,v,0)$ velocità del nuovo riferimento rispetto al vecchio, e $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Nel nuovo riferimento i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, quindi

$$\Delta y' = \gamma(\Delta y - v\Delta t) = 0$$

e

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2}{3}c\,.$$

Di conseguenza,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\,.$$

La separazione temporale (moltiplicata per c) nel nuovo sistema di riferimento è

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta y\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(3 - \frac{2}{3}\,2\right) = \sqrt{5}\,.$$

3. Cinematica Relativistica. Prendiamo come origine dei tempi propri e coordinati l'evento O di partenza dell'astronauta dalla stazione orbitante. Quando è trascorso un tempo coordinato pari a $3T$, l'orologio sulla stazione orbitante segna un tempo

$$\tau_1 = 3T\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{12}{5}T = 2.40\,T.$$

L'astronauta percorre la sua traiettoria di allontanamento a velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$ in un intervallo di tempo coordinato pari a T e la traiettoria di rientro in un intervallo di tempo coordinato pari a $2T$ con velocità $v_2' = \frac{2}{5}c$, di modo che al rientro il suo orologio segna un tempo

$$\tau_2 = T\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}} + 2T\sqrt{1-\frac{(v_2')^2}{c^2}} = \frac{3+2\sqrt{21}}{5}T = 2.43\,T.$$

Quindi $\tau_1 < \tau_2$.

4. Dinamica relativistica. Dall'equazione del moto relativistica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F(t),$$

con condizione iniziale $v(t=0)=0$, si trova

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = I(t),$$

dove $I(t) = \int_0^t F(t')\,\mathrm{d}t' = b\sqrt{t}$ è l'impulso trasferito dalla forza in un tempo t. Ricavando v si trova, per $t>0$,

$$v(t) = \frac{I(t)}{\sqrt{m^2c^2+[I(t)]^2}}\,c = \frac{b\sqrt{t}}{\sqrt{m^2c^2+b^2t}}\,c.$$

Allora

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = c.$$

5. Urti. Essendo le tre particelle di massa m in moto su uno stesso piano, lungo traiettorie che formano angoli di $120°$, con velocità di modulo v, la conservazione della quantità di moto è soddisfatta automaticamente per ogni v. Dalla conservazione dell'energia si trova

$$M = \frac{3m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-9\lambda^2}$$

con $\lambda \leq \frac{1}{3}$. Imponendo che $v = \frac{4}{5}c$ si trova

$$\lambda = \frac{1}{5}.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 gennaio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale Π, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. L'estremo A della sbarra è vincolato nell'origine del sistema di riferimento, e la sbarra è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse perpendicolare al piano Π e passante per O. Su Π si muove anche un punto materiale P di massa m, che può scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con la retta $x = a$ ($a \geq 0$). L'estremo B della sbarra è collegato al punto P ed al punto H (proiezione ortogonale di B sull'asse y) da due molle di costante elastica $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la Fig. 1). Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di P e l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse x.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema (non è richiesto di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \geq 0$.
3. Ponendo ora $K = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $L = 2$, $a = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia di una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}ML^2$. L'energia cinetica del sistema è la somma dell'energia cinetica della sbarra AB e dell'energia cinetica del punto materiale P.

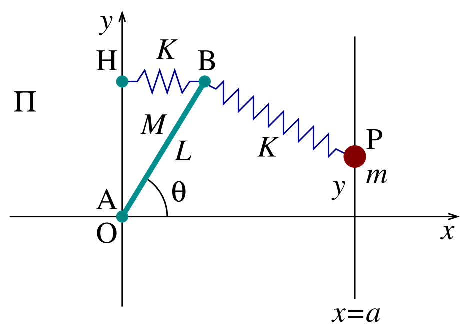


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$q = \arccos\left(\left(\frac{p}{2Q}\right)^{1/\nu}\right)$$

$$P = -\frac{p^4}{\left(\frac{p}{2Q}\right)^{\alpha/\nu}} + \delta\sqrt{1 - \left(\frac{p}{2Q}\right)^{2/\nu}}$$

dalle variabili p, Q alle variabili q, P (si supponga $q \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $0 < \left(\frac{p}{2Q}\right)^{1/\nu} \leq 1$).
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, δ, ν la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_1(q, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkowski due (x_0, x_1, x_2, x_3) (con $x^0 = ct$) i due eventi $E_1 = (1, 1/2, 0, 0)$, $E_2 = (-1, 0, -\sqrt{3}/2, 0)$.
1. Determinare se esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, oppure se esiste un riferimento inerziale in cui essi sono simultanei.
2. Determinare la trasformazione di Lorentz tra il riferimento (x_0, x_1, x_2, x_3) ed il riferimento inerziale indivituato nel punto 1. [Suggerimento: la trasformazione di Lorentz cercata è la composizione di una rotazione $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ ed una trasformazione di Lorentz speciale $(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \to (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$.]

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 gennaio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Il centro di massa G della sbarra ha coordinate $x_{\rm G} = \frac{1}{2}L\cos\theta$ e $y_{\rm G} = \frac{1}{2}L\sin\theta$. Inoltre, si ha $x_{\rm B} = L\cos\theta$, $y_{\rm B} = L\sin\theta$, $x_{\rm P} = a$ e $y_{\rm P} = y$. Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{y}_{\rm P}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\dot{y}^2\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K|\underline{BP}|^2 + \frac{1}{2}K|\underline{BH}|^2 = \frac{1}{2}K\left[(a - L\cos\theta)^2 + (y - L\sin\theta)^2 + L^2\cos^2\theta\right].$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_y U = K(y - L\sin\theta), \qquad \partial_\theta U = KL(a\sin\theta - y\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Dalla prima equazione si ha

$$y = L\sin\theta$$

e sostituendo nella seconda si trova

$$(a - 2L\cos\theta)\sin\theta = 0.$$

Sono quindi possibili quattro posizioni di equilibrio: la prima e la seconda, con $\sin\theta = 0$,

$$\begin{cases} y_{1,2} = 0, \\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi, \end{cases}$$

esistono sempre, la terza e la quarta, con $\sin\theta \neq 0$ (equivalenti per simmetria),

$$\begin{cases} y_{3,4} = L\sin\theta_{3,4}, \\ \cos\theta_{3,4} = \frac{a}{2L}, \end{cases}$$

esistono solo per $0 \leq a \leq 2L$. Conveniamo di indicare con θ_3 l'angolo per cui $\sin\theta_3 \geq 0$ e con θ_4 l'angolo per cui $\sin\theta_4 \leq 0$. Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = KL(a\cos\theta + y\sin\theta + L\sin^2\theta - L\cos^2\theta), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -KL\cos\theta.$$

Poiché $\partial^2_{yy}U > 0$, la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia positivo il determinante della matrice Hessiana

$$K^2L(a\cos\theta + y\sin\theta + L\sin^2\theta - L\cos^2\theta) - K^2L^2\cos^2\theta.$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $a > 2L$, la posizione (y_2, θ_2) è instabile per tutti gli $a \geq 0$, le posizioni (y_3, θ_3) e (y_4, θ_4) sono stabili quando esistono.
3. Per i valori assegnati dei parametri, le posizioni stabili sono (y_3, θ_3) e (y_4, θ_4), con $y_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}L$ e $\cos\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = m = 1, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{1}{3}ML^2 = 4, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = 0.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio è

$$U_{yy} = K = 1, \qquad U_{\theta\theta} = 7, \qquad U_{y\theta} = U_{\theta y} = -KL\cos\theta = -1.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà l'equazione biquadratica

$$(1-\omega^2)(7-4\omega^2) - 1 = 4\,\omega^4 - 11\,\omega^2 + 6 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,'

$$\omega_+^2 = \frac{3}{4} \quad \omega_-^2 = 2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 1.414$ e $\omega_- \approx 0.866$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. La trasformazione si può riscrivere nella seguente forma:

$$Q = \frac{p}{2(\cos q)^\nu}$$

$$P = \delta \sin q - \frac{p^4}{(\cos q)^\alpha}$$

2. Imponendo che la parentesi di Poisson $\{Q, P\}_{(q,p)} = 1$ si ottiene:

$$-\frac{2\,p^4\,\nu\,\sin q}{(\cos q)^{\alpha+\nu+1}} - \frac{\delta}{2}(\cos q)^{1-\nu} + \frac{\alpha\,p^4\,\sin q}{2\,(\cos q)^{\alpha+\nu+1}} = 1$$

da cui si deduce $\nu = 1$, $\delta = -2$, $\alpha = 4$.
3. Si ha $\mathrm{d}F_1 = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q$, con

$$p = 2\,Q\,\cos q$$
$$P = -2\,\sin q - 16Q^4$$

Una primitiva della forma differenziale $\mathrm{d}F_1$ è

$$F_1(q, Q) = 2\,Q\,\sin q\, + \frac{16}{5}Q^5.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\underline{E_1E_2} = (\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

1. L'intervallo spazio-temporale tra i due eventi è

$$|\underline{E_1E_2}|^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

quindi i due eventi sono a separazione temporale ed esiste un riferimento inerziale in cui essi avvengono nella stessa posizione.
2. La trasformazione di Lorentz cercata è la composizione di una rotazione $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ tale che, nel nuovo riferimento, la componente spaziale di $\underline{E_1E_2}$ sia diretta lungo un asse (ad esempio l'asse x'_1) e di una trasformazione di Lorents speciale $(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \to (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$ diretta lungo l'asse x'_1. Poichè $\Delta x_0 = 2$, $\Delta x_1 = 1/2$, $\Delta x_2 = \sqrt{3}/2$ e $\Delta x_3 = 0$, la rotazione (di un angolo α) sarà attorno all'asse x_3:

$$\begin{aligned}
x'_0 &= x_0 \\
x'_1 &= \cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_2 \\
x'_2 &= -\sin\alpha x_1 + \cos\alpha x_2 \\
x'_3 &= x_3\,,
\end{aligned}$$

quindi se $\alpha = \pi/3$

$$\begin{aligned}
\Delta x'_0 &= \Delta x_0 = 2 \\
\Delta x'_1 &= \cos\alpha\Delta x_1 + \sin\alpha\Delta x_2 = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 1 \\
\Delta x'_2 &= -\sin\alpha\Delta x_1 + \cos\alpha\Delta x_2 = -\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = 0 \\
\Delta x'_3 &= \Delta x_3 = 0\,.
\end{aligned}$$

La trasformazione di Lorentz speciale, con velocità v lungo l'asse x_1', sarà

$$
\begin{aligned}
x_0'' &= \gamma(x_0' - \frac{v}{c}x_1') \\
x_1'' &= \gamma(x_1' - \frac{v}{c}x_0') \\
x_2'' &= x_2' \\
x_3'' &= x_3' \, ,
\end{aligned}
$$

con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. I due eventi avvengono nella stessa posizone se

$$\Delta x_1'' = \gamma(\Delta x_1' - \frac{v}{c}\Delta x_0') = 0$$

ovvero

$$\Delta x_1' - \frac{v}{c}\Delta x_0' = 1 - \frac{v}{c}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{2} \, .$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 febbraio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana. In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina rigida e omogenea, a forma di corona circolare, di raggio esterno R, raggio interno r, e massa M. Il punto A sul bordo esterno della lamina è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. La lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il punto C della lamina, situato sul bordo interno, lungo il diametro AD, è attratto verso il punto fisso P$=(0, a)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PC}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AD della lamina forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{a}{R+r} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $a = 3$, $r = 2$, $R = 4$, $K = 1$, $M = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$.

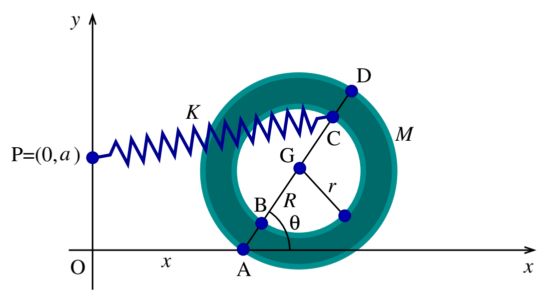


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = \beta\left(1 + \frac{q^2}{(4P)^2}\right)^{\delta/2} + \frac{q^{(\gamma+3)}}{(4P)^3}$$

$$p = \ln\left(\frac{q}{4P} + \sqrt{\frac{q^2}{(4P)^2} + 1}\right)$$

dalle variabili canoniche q, P alle variabili Q, p si svolgano i seguenti punti:

1. mostrare che il rapporto $\frac{P}{q}$ è funzione di p solo attraverso la funzione sinh.
2. dire per quali valori dei parametri reali β, γ, δ la trasformazione è canonica.
3. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_4(p, P)$ della trasformazione canonica.

Si ricordi che

$$\sinh p = \frac{e^p - e^{-p}}{2} \qquad \cosh p = \frac{e^p + e^{-p}}{2} \qquad (\cosh p)^2 - (\sinh p)^2 = 1$$

Esercizio 3: Relatività ristretta. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Nell'istante $t = 0$ viene lanciato un segnale luminoso da Terra verso una stella S distante d dalla Terra. Nello stesso istante $t = 0$, dalla Terra parte una astronave A_1 diretta verso la stella S, che si muove a velocità $v_1 = 2/3\,c$. Nell'istante in cui la stella S riceve il segnale luminoso, da essa parte una astronave A_2 per andare incontro all'astronave A_1; essa si muove a velocità $v_2 = c/6$, con stessa direzione e verso opposto dell'astronave A_1.

1. A quale distanza dalla terra si trovano le astronavi A_1 ed A_2 quando si incontrano?
2. Quanto tempo impiega l'astronave A_1, misurato su un orologio a bordo, per andare dalla Terra al punto di incontro? Quanto tempo impiega l'astronave A_2, misurato su un orologio a bordo, per andare dalla stella S al punto di incontro?

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 febbraio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_\mathrm{G} = x + R\cos\theta$, $y_\mathrm{G} = R\sin\theta$, $x_\mathrm{C} = x + (R+r)\cos\theta$, $y_\mathrm{C} = (R+r)\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{y}_\mathrm{G}^2\right) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(3R^2+r^2)\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{P})^2 + (y_\mathrm{C}-y_\mathrm{P})^2\right] = \frac{1}{2}K\left[x^2 + 2(R+r)x\cos\theta - 2(R+r)a\sin\theta\right] + \frac{1}{2}K\left[(R+r)^2 + a^2\right].$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{x} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left[x + (R+r)\cos\theta\right],$$

$$M\left(\frac{3R^2+r^2}{2}\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\ddot{x}\right) = K(R+r)\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left[x + (R+r)\cos\theta\right], \qquad \partial_\theta U = -K(R+r)\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -(R+r)\cos\theta, \qquad \left[(R+r)\sin\theta - a\right]\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{R+r}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè

$$x_3 = -\sqrt{(R+r)^2 - a^2}, \qquad x_4 = \sqrt{(R+r)^2 - a^2}.$$

Poiché la traccia assegna $a \geq 0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{a}{R+r} \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = K(R+r)\left(a\sin\theta - x\cos\theta\right), \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -K(R+r)\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $K^2(R+r)[a-(R+r)]$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{R+r} > 1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-K^2(R+r)[a+(R+r)]$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{a}{R+r} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $K^2(R+r)^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \frac{a}{R+r} \leq 1$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{a}{R+r} \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{R+r} > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M = 1, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{1}{2}M(3R^2+r^2) = 26, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -MR\sin\theta = -M\frac{Ra}{R+r} = -2.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K = 1, \qquad U_{\theta\theta} = K(R+r)^2 = 36, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka = -3.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$(1-\omega^2)(36-26\omega^2) - \left(3-2\omega^2\right)^2 = 0,$$

ovvero

$$22\,\omega^4 - 50\,\omega^2 + 27 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{25 \pm \sqrt{31}}{22} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 1.389,\ \omega_-^2 = 0.8833.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.179$ e $\omega_- = 0.9340$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1) Esponenziando p otteniamo:

$$\left(e^p - \frac{q}{4P}\right)^2 = \frac{q^2}{(4P)^2} + 1 \ =$$

$$e^{2p} + \frac{q^2}{(4P)^2} - 2\,e^p\,\frac{q}{4P} = \frac{q^2}{(4P)^2} + 1$$

e dividendo per e^p

$$\frac{e^p \ - \ e^{-p}}{2} = \sinh p \ = \ \frac{q}{4P}.$$

2) La trasformazione si può quindi riscrivere:

$$P = \frac{q}{4\,\sinh p},$$

$$Q = \beta(\cosh p)^\delta + \ q^\gamma\,(\sinh p)^3.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$-\frac{\gamma}{4}\,q^\gamma\ \sinh p\,\cosh p - \frac{3}{4}\,q^\gamma\ \sinh p\ \cosh p\ - \frac{\beta\delta}{4}\,(\cosh p)^{\delta-1} \ = \ 1 \tag{5}$$

da cui segue $\beta = -4,\ \gamma = -3,\ \delta = 1$.
3) Sappiamo che $dF_4(p,\,P) \ = \ -q\,dp + Q\,dP$. Integrando $-\int q\,dp$ e $\int Q\,dP$ e confrontando i risultati si ottiene quindi

$$F_4(p,P) = -\,4P\ \cosh p\ - \ \frac{1}{128\,P^2}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Prendiamo come asse x la direzione del moto delle due astronavi, come origine la Terra e verso diretto verso la stella S. Tale stella si troverà a $x = d$. Il segnale luminoso raggiunge la stella S al tempo d/c. Le leggi orarie delle due astronavi sono

$$x_1 = \frac{2}{3}ct$$

$$x_2 = d - \frac{c}{6}\left(t - \frac{d}{c}\right) = \frac{7}{6}d - \frac{c}{6}t\,.$$

Risolvendo l'equazione $x_1 = x_2$ si trova che il punto di incontro è al tempo $\bar{t} = \frac{7}{5}\frac{d}{c}$, alla posizione

$$\bar{x} = \frac{14}{15}d\,.$$

Il viaggio dell'astronave A_1 avviene nell'intervallo di tempo coordinato $\Delta t_1 = \bar{t} = \frac{7}{5}\frac{d}{c}$, mentre il viaggio dell'astronave A_2 avviene nell'intervallo di tempo coordinato $\Delta t_2 = \bar{t} - \frac{d}{c} = \frac{2}{5}\frac{d}{c}$. I corrispondenti tempi propri sono

$$\tau_1 = \Delta t_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{7}{5}\frac{d}{c}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{7d}{3\sqrt{5}c}$$

$$\tau_2 = \Delta t_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \frac{2}{5}\frac{d}{c}\sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{7}{5}}\frac{d}{3c}\,.$$

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 11 Settembre 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

ESERCIZIO 1

La sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro di massa, restando sempre sul piano xz, sul quale è adottato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la cui origine O coincide con il centro di massa immobile della sbarra. Il punto materiale P, di massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse w, giacente sul piano xz, parallelo ad AB e passante per O. Il punto P è collegato ad O da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, la cui accelerazione $\boldsymbol{g}$ è diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse x e l'ascissa ξ di P lungo l'asse w, come indicato in Fig. 1.

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $M = 1$, $m = 1$, $L = 3$, $K = 4$, $g = 2$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

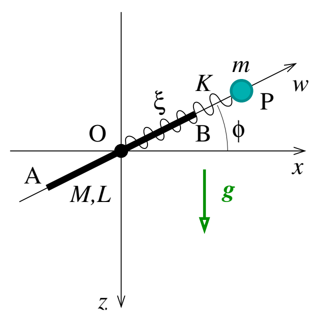


Fig. 1

ESERCIZIO 2

Data la trasformazione

$$Q = p^{1/2} q^{1/\beta}; \;\; P = -2(pq)^{1/2} \ln q$$

si dica per quali valori di β la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 gennaio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche [8 punti]. È assegnata la trasformazione

$$p = \left(\alpha\, q^{\beta} + Q\right)^{1/\gamma},$$
$$P = -\beta q^{\alpha} + Q,$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β, γ parametri reali.

1. Dire per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_1(q, Q)$.

• Si risolvano i seguenti tre problemi nell'ambito della relatività ristretta.

2. Trasformazioni di Lorentz [8 punti]. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati tre eventi E_1, E_2 e E_3 che, nel sistema di riferimento dato, hanno coordinate

$$E_1 = (5, 4, 3, 2); \qquad E_2 = (4, 3, 3, 3); \qquad E_3 = (2, 4, 2, 3)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1 e E_2 avvengono simultaneamente e, in tal caso, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1 e E_3 avvengono nello stesso luogo e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
3. Calcolare la separazione temporale tra E_1 e E_3 nel sistema di riferimento trovato al punto precedente.

3. Cinematica relativistica [7 punti]. All'istante $t = 0$, dopo aver sincronizzato i loro orologi con quelli di un osservatore inerziale O, due astronauti A_1 e A_2 si muovono lungo l'asse x di un sistema di riferimento solidale con O, con velocità, rispettivamente, $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = \frac{3}{5}c$. Quando sull'orologio di O è segnato il tempo t_0, A_1 inverte il moto e va incontro a A_2 con velocità in modulo uguale a v_1.

1. Determinare l'istante t^* che l'orologio di O segna quando A_1 e A_2 si incontrano nuovamente.
2. Determinare e confrontare i tempi segnati dagli orologi di A_1 e A_2, rispettivamente τ_1 e τ_2, per $t = t^*$.

4. Urti [7 punti]. Due particelle di massa a riposo, rispettivamente, $m_1 = m$ e $m_2 = \lambda m$ (con $\lambda > 0$ parametro adimensionale), si muovono lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{c}{2}$ e $v_2 = -\frac{c}{4}$. Nell'urto delle due particelle, vengono generate due particelle uguali, di massa a riposo M, che si muovono lungo l'asse y con velocità uguali e opposte, V e $-V$.

1. Dire per quale valore di λ il processo è compatibile con la legge di conservazione dell'impulso.
2. Fissato λ al valore trovato al punto precedente, determinare $M_{\max}$ definito come il valore massimo possibile di M compatibile con la legge di conservazione dell'energia.
3. Sempre per lo stesso valore di λ, determinare V per $M = \frac{4\sqrt{3}}{5}m$.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 gennaio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Esprimiamo le variabili Q, P in funzione di q, p:

$$
\begin{aligned}
Q &= p^\gamma - \alpha\, q^\beta , \\
P &= p^\gamma - \beta q^\alpha - \alpha\, q^\beta .
\end{aligned}
$$

Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$
[Q,P]_{q,p} = -\alpha\beta\gamma\, q^{\beta-1}\, p^{\gamma-1} + \alpha\beta\gamma\, p^{\gamma-1}\left(q^{\alpha-1} + q^{\beta-1}\right) = \alpha\beta\gamma\, p^{\gamma-1}\, q^{\alpha-1} = 1 ,
$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$
\begin{aligned}
p &= q\, +\, Q , \\
P &= -q\, +\, Q .
\end{aligned}
$$

Integrando il differenziale $dF_1(q,Q) = p\,dq - P\,dQ$ si ottiene:

$$
F_1(q,Q) = \frac{q^2}{2}\, +\, Q\,q\, -\, \frac{Q^2}{2} .
$$

2. Trasformazioni di Lorentz. Sia K il riferimento di partenza, di coordinate (ct, x, y, z).

1. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

   $$\underline{E_1E_2} = (-1, -1, 0, 1)\, .$$

   L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

   $$|\underline{E_1E_2}|^2 = -1 < 0\, ,$$

   quindi la separazione è di tipo spazio, ed esistono sistemi di riferimento inerziali in cui gli eventi sono simultanei. Ne scegliamo uno $\tilde{K}'$ tale che la trasformazione tra K e $\tilde{K}'$ sia la composizione $K \to \tilde{K} \to \tilde{K}'$. Il passaggio da K a $\tilde{K}$ si ottiene con una rotazione attorno all'asse y, tale che in $\tilde{K}$ la separazione spaziale tra gli eventi sia lungo l'asse x. Il passaggio da $\tilde{K}$ a $\tilde{K}'$ si ottiene con un boost di Lorentz.

   La rotazione $K \to \tilde{K}$ è:

   $$
   \begin{aligned}
   \tilde{t} &= t \\
   \tilde{x} &= \frac{x - z}{\sqrt{2}} \\
   \tilde{y} &= y \\
   \tilde{z} &= \frac{x + z}{\sqrt{2}}
   \end{aligned}
   $$

   per cui $c\Delta\tilde{t} = c\Delta t = -1$, $\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta x - \Delta z}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, $\Delta\tilde{y} = \Delta y = 0$, $\Delta\tilde{z} = \frac{\Delta x + \Delta z}{\sqrt{2}} = 0$.

   La trasformazione di Lorentz speciale $\tilde{K} \to \tilde{K}'$ è:

   $$
   \begin{aligned}
   \tilde{t}' &= \gamma\left(\tilde{t} - \frac{\tilde{v}}{c^2}\tilde{x}\right) \\
   \tilde{x}' &= \gamma(\tilde{x} - \tilde{v}\tilde{t}) \\
   \tilde{y}' &= \tilde{y} \\
   \tilde{z}' &= \tilde{z}
   \end{aligned}
   $$

e

$$c\Delta\tilde{t}' = \gamma\left(c\Delta\tilde{t} - \frac{\tilde{v}}{c}\Delta\tilde{x}\right) = \gamma\left(-1 + \frac{\tilde{v}}{c}\sqrt{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} = \frac{c}{\sqrt{2}}\,.$$

Analogamente, si sarebbe potuto scegliere un sistema di riferimento K' con assi paralleli a K ottenuto da quest'ultimo con un boost di velocità $\vec{v} = (\frac{c}{2}, 0, -\frac{c}{2})$.

2. La separazione tra gli eventi E_1, E_3 è il quadrivettore

$$\underline{E_1E_3} = (-3, 0, -1, 1)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1E_3}|^2 = 7 > 0\,,$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale $\hat{K}'$ in cui gli eventi avvengono nello stesso luogo. La trasformazione tra K e $\hat{K}'$ sarà la composizione $K \to \hat{K} \to \hat{K}'$ di una rotazione attorno all'asse x, tale che in $\hat{K}$ la separazione spaziale tra gli eventi sia lungo l'asse y, e una trasformazione di Lorentz speciale. La rotazione $K \to \hat{K}$ è:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t \\ \hat{x} &= x \\ \hat{y} &= \frac{y - z}{\sqrt{2}} \\ \hat{z} &= \frac{y + z}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

per cui $c\Delta\hat{t} = c\Delta t = -3$, $\Delta\hat{x} = \Delta x = 0$, $\Delta\hat{y} = \frac{\Delta y - \Delta z}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, $\Delta\hat{z} = \frac{\Delta y + \Delta z}{\sqrt{2}} = 0$. La trasformazione di Lorentz speciale $\hat{K} \to \hat{K}'$ è:

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \gamma\left(\hat{t} - \frac{\hat{v}}{c^2}\hat{y}\right) \\ \hat{x}' &= \hat{x} \\ \hat{y}' &= \gamma(\hat{y} - \hat{v}\hat{t}) \\ \hat{z}' &= \hat{z} \end{aligned}$$

e

$$\Delta\hat{y}' = \gamma\left(\Delta\hat{y} - \frac{\hat{v}}{c}c\Delta\hat{t}\right) = \gamma\left(-\sqrt{2} + \frac{\hat{v}}{c}3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{v} = \frac{\sqrt{2}}{3}c\,, \qquad \gamma = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Analogamente, si sarebbe potuto scegliere un sistema di riferimento K'' con assi paralleli a K ottenuto da quest'ultimo con un boost di velocità $\vec{v} = (0, \frac{c}{3}, -\frac{c}{3})$.

3. La separazione temporale (moltiplicata per c) tra E_1 ed E_3 nei sistemi di riferimento $\hat{K}'$ e K'' è

$$c\Delta t'' = c\Delta\hat{t}' = \gamma\left(c\Delta\hat{t} - \frac{\hat{v}}{c}\Delta\hat{y}\right) = \frac{3}{\sqrt{7}}\left(-3 + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{-9+2}{\sqrt{7}} = -\sqrt{7}\,,$$

come è anche evidente dal fatto che $|\underline{E_1E_3}|^2 = 7$.

3. Cinematica Relativistica. La condizione per determinare t^* è:

$$\frac{3}{5}c\,t^* \;+\; \frac{4}{5}c\,(t^* - t_0) = \frac{4}{5}c\,t_0,$$

dalla quale si ottiene:

$$t^* = \frac{8}{7} t_0.$$

Abbiamo quindi

$$\tau_1 = \frac{t^*}{\gamma_1} = \frac{8}{7} t_0 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{24}{35} t_0,$$
$$\tau_2 = \frac{t^*}{\gamma_2} = \frac{8}{7} t_0 \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{32}{35} t_0,$$

4. Urti. I quadrimomenti delle due particelle iniziali sono

$$p_1 = (m\gamma_1 c, m\gamma_1 v_1, 0, 0), \qquad p_2 = (\lambda m\gamma_2 c, \lambda m\gamma_2 v_2, 0, 0), \qquad \gamma_i = \left(1 - v_i^2/c^2\right)^{-1/2}$$

mentre quelli delle due particelle finali sono

$$p_3 = (M\gamma c, 0, M\gamma V, 0), \qquad p_4 = (M\gamma c, 0, -M\gamma V, 0), \qquad \gamma = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$$

e si ha, per conservazione del quadrimomento,

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

1. Proiettando sulla prima componente spaziale, si trova

$$m\gamma_1 v_1 + \lambda m\gamma_2 v_2 = 0$$

ovvero, sostituendo $v_1 = c/2$ e $v_2 = -c/4$ (da cui $\gamma_1 = 2/\sqrt{3}$ e $\gamma_2 = 4/\sqrt{15}$) ed essendo $m > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{15}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \sqrt{5}.$$

2. Proiettando sulla componente temporale (conservazione dell'energia), si trova

$$m\gamma_1 c + \lambda m\gamma_2 c = 2M\gamma c \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{\gamma_1 + \lambda\gamma_2}{2\gamma} m = \frac{\sqrt{3}}{\gamma} m,$$

che è massima quando γ è minima, ovvero quando $\gamma = 1$, corrispondente a $V = 0$ (particelle prodotte ferme). In tal caso

$$M_{\max} = \sqrt{3} m.$$

3. Fissato ora $M = \frac{4}{5} M_{\max}$, si trova dalla stessa equazione

$$\gamma = \frac{M_{\max}}{M} = \frac{5}{4},$$

da cui

$$V = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\, c = \frac{3}{5} c.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 febbraio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [12 punti]. In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con l'asse z verticale discendente, si muove una lastra circolare omogenea di raggio R e massa M [si veda la Fig. 1]. Il punto A sul bordo della lastra è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x. La lastra è libera di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz, passante per A, ed è soggetta alla forza peso $\underline{F}_\mathrm{p}$ e alla forza elastica $\underline{F}_\mathrm{e} = -K\,\underline{\mathrm{OB}}$, con $K > 0$ e B punto sul bordo della lastra diametralmente opposto ad A. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AB della lastra forma con la direzione verticale discendente [si veda la Fig. 1]. Si indichi con $g > 0$ l'accelerazione di gravità e con G il centro di massa della lastra.

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro adimensionale $\lambda \equiv \frac{Mg}{KR} > 0$.
3. Ponendo ora, $R = 1$, $M = 1$, $K = 5$, $g = 10$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lastra circolare rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{2}MR^2$.

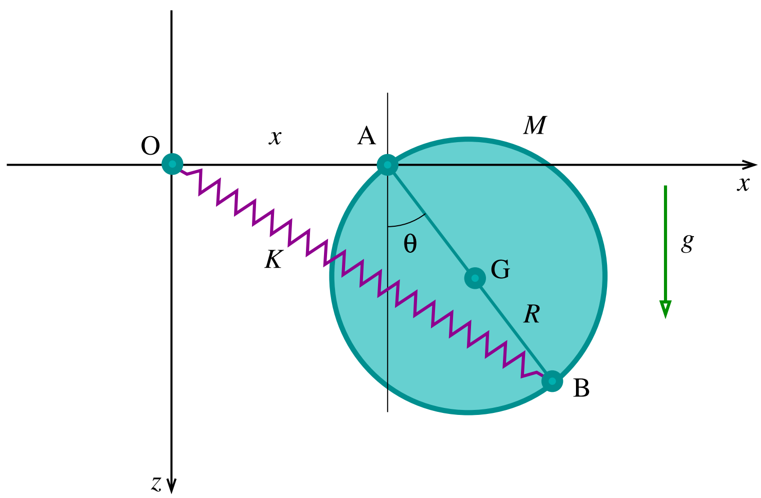


Fig. 1

2. Trasformazioni canoniche [6 punti]. È assegnata la trasformazione

$$Q = \ln(1 + q^\alpha \cos p),$$
$$P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\, q^\delta \sin p,$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, δ parametri reali.

1. Deterninare una coppia di valori di α, δ per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_3(p, Q)$.

Si ricordi che

$$\frac{\mathrm{d}(\tan p)}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\cos^2 p}.$$

Il testo segue alla pagina successiva ⇒

3. Trasformazioni di Lorentz [6 punti]. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 che, nel sistema di riferimento dato, hanno coordinate

$$E_1 = (\sqrt{\alpha^2 + \alpha}, 2, 0, 3)\,, \qquad E_2 = (0, 2, -\sqrt{2}, 3)$$

dove α è un parametro reale tale che $\alpha \geq 0$ oppure $\alpha \leq -1$.

1. Determinare per quali valori di α esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi E_1, E_2 sono simultanei e, per questi valori, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Determinare per quali valori di α esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

4. Urti [6 punti]. Una particella di massa di riposo $M = \lambda m$ (con $\lambda \geq 2$) si muove con velocità $V = \frac{2}{\sqrt{5}}c$ diretta lungo l'asse x. Ad un certo istante essa decade in due particelle identiche di massa m che si muovono nel piano xy con velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ e $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, 0)$.

1. Dimostrare che, se le componenti y delle velocità delle due particelle di massa m sono uguali in modulo e opposte in verso ($v_y = -v'_y$), allora le loro componenti x sono uguali in modulo e verso ($v_x = v'_x$).

Assumendo di trovarsi nella situazione descritta al punto 1, si calcoli:

2. il valore di v_x;

3. il valore di v_y in funzione di λ.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 febbraio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm G} = x + R\sin\theta$, $z_{\rm G} = R\cos\theta$, $x_{\rm A} = x$, $x_{\rm B} = x + 2R\sin\theta$, $z_{\rm B} = 2R\cos\theta$; $\dot x_{\rm G} = \dot x + R\cos\theta\,\dot\theta$, $\dot z_{\rm G} = -R\sin\theta\,\dot\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot x_{\rm G}^2 + \dot z_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot\theta^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot x^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot\theta^2 + 2R\cos\theta\,\dot x\,\dot\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = -Mgz_{\rm G} + \frac{1}{2}K\left(x_{\rm B}^2 + z_{\rm B}^2\right) = -MgR\cos\theta + \frac{1}{2}K\left(x^2 + 4Rx\sin\theta + 4R^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = Kx + 2KR\sin\theta, \qquad \partial_\theta U = MgR\sin\theta + 2KRx\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -2R\sin\theta, \qquad (Mg - 4KR\cos\theta)\sin\theta = 0.$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{Mg}{4KR}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = \mp 2R\sqrt{1 - \left(\frac{Mg}{4KR}\right)^2}$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{Mg}{KR} \equiv \lambda \leq 4.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = MgR\cos\theta - 2KRx\sin\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 2KR\cos\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $K^2R^2(\lambda - 4)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda > 4$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-K^2R^2(\lambda + 4)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \lambda \leq 4$.
Riassumendo, per $0 < \lambda \leq 4$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > 4$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = 2$, quindi le posizioni di equilibrio stabile sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot x\dot x} = M = 1, \qquad T_{\dot\theta\dot\theta} = \frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2}, \qquad T_{\dot x\dot\theta} = T_{\dot\theta\dot x} = MR\cos\theta = \frac{1}{2}.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K = 5, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2 = 20, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 2KR\cos\theta = 5.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(5 - \omega^2\right)\left(20 - \frac{3}{2}\,\omega^2\right) - \left(5 - \frac{1}{2}\,\omega^2\right)^2 = 0,$$

ovvero

$$\omega^4 - 18\,\omega^2 + 60 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = 9 \pm \sqrt{21}$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 3.69$ e $\omega_- \approx 2.10$.

2. Trasformazioni canoniche.
Per fissare i parametri α, δ calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{\alpha\, q^{\alpha-1}\cos p}{1+q^\alpha \cos p}\\
\frac{\partial P}{\partial p} &= -2\, q^{\delta+1/2}\sin^2 p + 2(1+\sqrt{q}\cos p)\, q^\delta \cos p\\
\frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{-q^\alpha \sin p}{1+q^\alpha \cos p}\\
\frac{\partial P}{\partial q} &= q^{\delta-1/2}\sin p\cos p + 2\delta(1+\sqrt{q}\cos p)\, q^{\delta-1}\sin p
\end{aligned}$$

e imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = \frac{2(1+\sqrt{q}\cos p)}{1+q^\alpha\cos p} q^{\alpha+\delta-1}(\alpha\cos^2 p + \delta\sin^2 p) + \frac{1-2\alpha}{1+q^\alpha \cos p} q^{\alpha+\delta-1/2}\sin^2 p\cos p = 1,$$

dalla quale segue che $\alpha = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{(e^Q-1)^2}{\cos^2 p},\\
P &= 2(e^{2Q}-e^Q)\tan p.
\end{aligned}$$

Integrando il differenziale $dF_3(p,Q) = -q\,dp - P\,dQ$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
F_3(p,Q) &= -\int P\mathrm{d}Q = -(e^{2Q}-2e^Q)\tan p + f(p)\\
&= -\int q\mathrm{d}p = -(e^Q-1)^2\tan p + g(Q)\\
&= -(e^Q-1)^2\tan p,
\end{aligned}$$

with $f(p) = -\tan p$ and $g(Q) = 0$.

3. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra gli eventi E_1 ed E_2 è

$$\Delta E = (\sqrt{\alpha^2+\alpha}, 0, \sqrt{2}, 0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$|\Delta E|^2 = \alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha+2)(\alpha-1)$$

1. L'intervallo è di tipo spazio se $|\Delta E|^2 < 0$ ovvero $-2 < \alpha \leq -1$ oppure $0 \leq \alpha < 1$. Per questi valori esiste un riferimento (ct', x', y', z') in cui gli eventi sono simultanei. Esso si ottiene dal riferimento di partenza con una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse y,

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right)\\
x' &= x\\
y' &= \gamma(y - vt)\\
z' &= z
\end{aligned}$$

dove $\beta = v/c$ è dato da

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{c\Delta t}{\Delta y} = \sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}}\,.$$

2. L'intervallo è di tipo tempo se $|\Delta E|^2 > 0$ ovvero $\alpha < -2$ oppure $\alpha > 1$. Per questi valori esiste un riferimento (ct', x', y', z') in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione. Esso si ottiene dal riferimento di partenza con una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse y,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \end{aligned}$$

dove $\beta = v/c$ è dato da

$$\Delta y'' = \gamma(\Delta y - \beta c\Delta t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\Delta y}{c\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2+\alpha}}\,.$$

4. Urti.
Il quadri-impulso iniziale è

$$P_{\rm in} = (M\Gamma c, m\Gamma V, 0, 0), \qquad \Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{5}$$

e quelli delle due particelle di stato finale

$$\begin{aligned} P &= (m\gamma c, m\gamma v_x, m\gamma v_y, 0) & \gamma &= \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ P &= (m\gamma' c, m\gamma' v_x', m\gamma' v_y', 0) & \gamma' &= \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2} - \frac{v_y'^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Per conservazione del quadri-impulso durante il decadimento, $P_{\rm in} = P + P'$, si ha

$$\begin{aligned} M\Gamma c &= m(\gamma + \gamma')c, \\ M\Gamma V &= m(\gamma v_x + \gamma' v_x'), \\ 0 &= m(\gamma v_y + \gamma' v_y'). \end{aligned}$$

1. Assumendo $v_y = -v_y'$, l'ultima equazione fornisce la relazione $\gamma = \gamma'$, da cui segue immediatamente $|v_x| = |v_x'|$. La seconda equazione diventa quindi

$$M\Gamma V = m\gamma|v_x|\left(\mathrm{sign}\, v_x + \mathrm{sign}\, v_x'\right),$$

   che sarebbe zero se i segni di v_x e v_x' non fossero uguali.

2. Sotto queste condizioni, le prime due equazioni diventano

$$\begin{aligned} M\Gamma c &= 2m\gamma c, \\ M\Gamma V &= 2m\gamma v_x, \end{aligned}$$

   da cui segue immediatamente (sostituendo la prima nella seconda) $v_x = V = \frac{2}{\sqrt{5}}c$.

3. Dalla prima di queste equazioni, si ha

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{M\Gamma} = \frac{2}{\sqrt{5}\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} = \frac{4}{5\lambda^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_y^2}{c^2} = 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{4}{5\lambda^2} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5\lambda^2} = \frac{\lambda^2-4}{5\lambda^2}$$

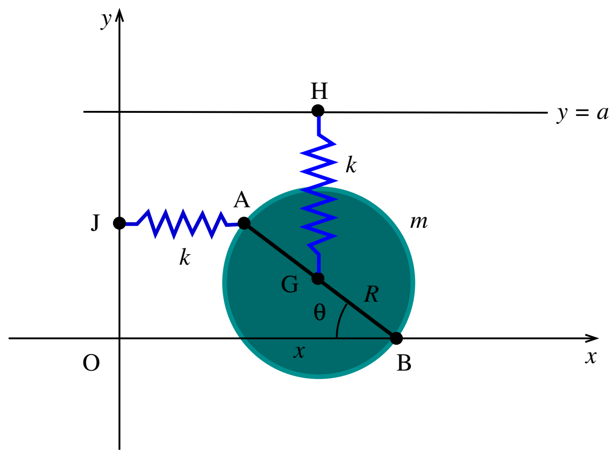
   da cui segue $v_y = \sqrt{\frac{\lambda^2-4}{5\lambda^2}}c$, che esiste per $\lambda \geq 2$ (come da ipotesi).

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 febbraio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [12 punti].
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove un disco rigido omogeneo, di raggio R e massa m. Il punto B sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox, ed il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per B (si veda la figura). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{HG}$, con $k > 0$, e $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{JA}$, con G centro di massa del disco, H proiezione ortogonale di G sulla retta $y = a$ e J proiezione ortogonale di A sulla retta $x = 0$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di B e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con l'asse Ox.

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $k = 1$, $m = 1$, $a = 1$, $R = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}mR^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti]. È assegnata la trasformazione

$$p = \alpha q\, \mathrm{e}^{Q/\beta},$$

$$P = -\left(q^\gamma\, \mathrm{e}^{Q} + \gamma Q\right),$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, β, γ parametri reali.

1. Dire per quali valori dei parametri α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza dei valori trovati al punto precedente, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica $F_1(q, Q)$.

3. Dilatazione dei tempi [6 punti]. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = c/5$. Dopo un tempo $T_0 = 1$ anno, da Terra viene mandato un segnale elettromagnetico con l'indicazione di tornare indietro. Appena ricevuto il segnale, l'astronave inverte la direzione di moto e torna sulla Terra con velocità $v_2 = c/2$.

1. A che distanza dalla Terra si trova l'astronave quando riceve il segnale?
2. Qual è la durata complessiva del viaggio di andata e ritorno, misurata da un orologio a Terra e da un orologio sull'astronave?

4. Dinamica relativistica e urti [6 punti]. Una particella relativistica di massa propria m, ferma in un sistema di riferimento inerziale K all'istante $t = 0$, viene messa in moto da una forza $F(t) = \alpha A \exp(\alpha t)$ diretta lungo l'asse y, con A, α costanti dimensionali.

1. Si determini la legge oraria $v(t)$ per $t > 0$.

2. Assumendo $A = mc/3$, si trovi il tempo t^* in funzione di α in cui la velocità valga $v^* \equiv v(t^*) = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Nell'istante t^* la particella urta una particella di massa di riposo $M = 2m$, in quiete nello stesso riferimento K, creando una nuova unica particella di massa μ.

3. Determinare la velocità della particella finale.

4. Determinare la sua massa di riposo μ in funzione di m.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 febbraio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_\mathrm{G} = x - R\cos\theta$, $y_\mathrm{G} = R\sin\theta$, $x_\mathrm{A} = x - 2R\cos\theta$, $y_\mathrm{A} = 2R\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{y}_\mathrm{G}^2\right) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 + 2R\,\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}k\,{x_\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}k\left(a - y_\mathrm{G}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + a^2 + R^2 + 3R^2\cos^2\theta - 4Rx\cos\theta - 2aR\sin\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx - 2kR\cos\theta\,, \qquad \partial_\theta U = -3kR^2\sin\theta\cos\theta + 2kRx\sin\theta - kRa\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 2R\cos\theta, \\ kR\left(R\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{R}$, $\cos\theta_3 \geq 0$ e $\cos\theta_4 \leq 0$ e $x_{3,4} = \pm 2R\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$. Queste due posizioni esistono solo se $\left|\frac{a}{R}\right| \leq 1$. Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \qquad \partial^2_{\theta\theta}U = -3kR^2\cos 2\theta + 2kRx\cos\theta + kRa\sin\theta, \qquad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 2kR\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ andiamo a calcolare il determinante della matrice Hessiana dell'energia potenziale $\mathbb{U}$ imponendo che sia maggiore di 0:

$$\det\mathbb{U} = -3k^2R^2\cos^2\theta - k^2R^2\sin^2\theta + 2k^2Rx\cos\theta + k^2Ra\sin\theta > 0.$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $a > R$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $a < -R$.
Le posizioni $3, 4$ infine sono stabili per $|a| < R$.
Riassumendo, per $|a| < R$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, due instabili (la 1 e la 2) e due stabili (la 3 e la 4); per $a > R$ si hanno due posizioni di equilibrio, la 1 stabile e la 2 instabile; per $a < -R$ si hanno due posizioni di equilibrio, la 1 instabile e la 2 stabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos^2\theta_{3,4} = \frac{3}{4}$. La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T}_{\dot{x}\dot{x}} = m \qquad \mathbb{T}_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}mR^2, \qquad \mathbb{T}_{\dot{x}\dot{\theta}} = \mathbb{T}_{\dot{\theta}\dot{x}} = mR\sin\theta.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$\mathbb{U}_{xx} = k, \qquad \mathbb{U}_{\theta\theta} = kR^2 + 3ka^2, \qquad \mathbb{U}_{x\theta} = \mathbb{U}_{\theta x} = 2ka.$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$\left(1 - \omega^2\right)\left(7 - 6\,\omega^2\right) - \left(2 - \omega^2\right)^2 = 0,$$

che si può riscrivere come

$$5\,\omega^4 - 9\,\omega^2 + 3 = 0.$$

L'equazione ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 1.358,\ \ \omega_-^2 = 0.442.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.165$ e $\omega_- = 0.665$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Invertendo la trasformazione si trova

$$\begin{aligned} Q &= \beta \log \tfrac{p}{\alpha q}, \\ P &= -\left[q^{\gamma-\beta}\left(\tfrac{p}{\alpha}\right)^{\beta} + \gamma\beta \log \tfrac{p}{\alpha q}\right]. \end{aligned}$$

   Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p} = 1$, si trova

$$\frac{\gamma\beta}{\alpha^\beta} q^{\gamma-\beta-1} p^{\beta-1} = 1,$$

   da cui segue $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha = 2$.

2. In corrispondenza dei valori trovati al punto precedente si ha

$$\begin{aligned} p &= 2q\,\mathrm{e}^Q, \\ P &= -\left(q^2\,\mathrm{e}^Q + 2Q\right). \end{aligned}$$

   Integrando la forma differenziale $\mathrm{d}F_1 = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q$ si trova

$$\begin{aligned} F_1(q, Q) &= \int 2q\,\mathrm{e}^Q\,\mathrm{d}q = q^2\,\mathrm{e}^Q + C(Q), \\ F_1(q, Q) &= \int \left(q^2\,\mathrm{e}^Q + 2Q\right)\,\mathrm{d}Q = q^2\,\mathrm{e}^Q + Q^2 + \widetilde{C}(q). \end{aligned}$$

   e dal confronto si deduce $C(Q) = Q^2$, $\widetilde{C}(q) = 0$ e

$$F_1(q, Q) = q^2\,\mathrm{e}^Q + Q^2.$$

3. Dilatazione dei tempi.

1. Siano (t_1, x_1) le coordinate dell'evento in cui l'astronave riceve il segnale. Sarà

$$x_1 = c(t_1 - T_0) = \frac{c}{5} t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{5}{4} T_0$$

   quindi l'astronave riceve il segnale a $x_1 = \frac{cT_0}{4} = 0.25\,\text{a.l.}$ (anni luce).

2. L'astronave torna a Terra al tempo t_2 nel riferimento di Terra. Essa percorre il tratto x_1 a velocità $c/2$ nel tempo

$$t_2 - t_1 = \frac{x_1}{c/2} = \frac{T_0}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{5}{4} T_0 + \frac{1}{2} T_0 = \frac{7}{4} T_0 = 1.75\,\text{anni}.$$

   L'orologio sull'astronave segna $\tau = \tau_1 + \tau_2$ con

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\, t_1 = \frac{2}{5}\sqrt{6} \cdot \frac{5}{4} T_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} T_0 \\ \tau_2 &= \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\, (t_2 - t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} T_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0 \end{aligned}$$

   quindi

$$\tau = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) T_0 = 1.66\,\text{anni}.$$

4. Dinamica relativistica e urti.

1. Dalle relazioni $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ e $\vec{P} = \gamma\vec{v}$, si trova immediatamente (tenendo conto che $v \equiv |\vec{v}| = v_y$)

$$\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = I(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v^2(t)}{c^2} = \frac{I^2(t)}{I^2(t)+m^2c^2}$$

   con

$$I(t) \equiv \int_0^t dt'\, F(t') = A[\exp(\alpha t) - 1],$$

   da cui

$$v(t) = c\frac{A[\exp(\alpha t)-1]}{\sqrt{A^2[\exp(\alpha t)-1]^2 + m^2c^2}}.$$

2. Utilizzando la prima equazione, si può scrivere

$$I(t^*) = \frac{mv(t^*)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t^*)}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \exp(\alpha t^*) = 1 + \frac{mv^*/A}{\sqrt{1-\frac{v^{*2}}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{1}{\alpha}\log\left(1 + \frac{3v^*/c}{\sqrt{1-\frac{v^{*2}}{c^2}}}\right) = \frac{1.82}{\alpha}.$$

3. Il quadri-impulso della particella di massa m nell'istante t^* dell'urto è

$$P_1 = (m\gamma^* c, 0, m\gamma^* v^*, 0), \qquad \gamma^* = \left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2}\right)^{-1/2} = 2$$

   mentre per la particella di massa M

$$P_2 = (Mc, 0, 0, 0).$$

   La particella di stato finale avrà

$$P_{\text{fin}} = (\mu\gamma' c, 0, \mu\gamma' v', 0), \qquad \gamma' = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

   che per conservazione del quadri-impulso durante l'urto deve essere uguale a $P_1 + P_2$. Seguono le relazioni

$$\begin{aligned} m\gamma^* c + Mc &= \mu\gamma' c, \\ m\gamma^* v^* &= \mu\gamma' v'. \end{aligned}$$

   Eliminando $\mu\gamma'$ si trova

$$m\gamma^* v^* = (m\gamma^* + M)v'$$

   da cui

$$v' = \frac{m\gamma^*}{m\gamma^*+M}v^* = \frac{2m}{2m+2m}v^* = \frac{v^*}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. Sostituendo questo risultato nella prima delle due equazioni si ottiene

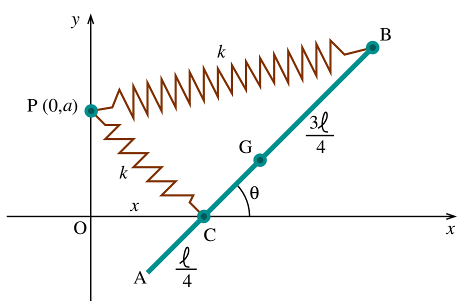
$$\mu = \frac{m\gamma^* + M}{\gamma'} = \sqrt{13}\, m.$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 21 giugno 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].
In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una sbarra omogenea di lunghezza ℓ. Il punto C situato a $\ell/4$ dall'estremo A della sbarra è vincolato a muoversi lungo l'asse x. La sbarra può ruotare liberamente attorno ad un asse passante per C e ortogonale al piano Oxy. Nel punto C e nell'altro estremo B della sbarra sono ancorate due molle ideali, di eguale costante elastica k e con lunghezza di riposo nulla, entrambe ancorate all'asse y nel punto di ordinata a.
Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che il segmento CB forma con l'asse x.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $a = 3$, $\ell = 8\sqrt{3}$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della sbarra omogenea rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}M\ell^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].
Sia data la trasformazione di coordinate:

$$Q = \beta \cosh p + q^{\gamma} (\sinh p)^3$$
$$P = \frac{q^{\alpha}}{4 \sinh p}$$

1. Trovare per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori, trovare la funzione generatrice del quarto tipo $F_4(p, P)$.

Si ricordi che $\cosh p = \frac{e^p + e^{-p}}{2}$ mentre $\sinh p = \frac{e^p - e^{-p}}{2}$.

3. Dilatazione dei tempi [5 punti].
Due astronavi partono dalla Terra nello stesso istante $t = 0$ muovendosi con versi opposti lungo la stessa direzione, la prima con elocità $v_1 = c/3$, la seconda con velocità $v_2 = c/2$. Ognuna di esse, un anno dopo la partenza (misurato da un orologio a bordo), invia un segnale luminoso verso Terra, ed inverte la direzione di moto. Determinare:

1. I tempi, misurati da un orologio a Terra, ai quali le due astronavi tornano a Terra.
2. I tempi, misurato da un orologio a Terra, ai quali vengono ricevuti i due segnali luminosi.

4. Dinamica relativistica [5 punti]. Si consideri una particella relativistica di massa propria m, inizialmente in quiete nell'origine di un dato sistema di riferimento inerziale. All'istante $t = 0$, alla particella viene applicata una forza $F(t) = f/(1 + \Gamma t)^2$ dipendente dal tempo e diretta nel verso positivo dell'asse x, con $f > 0$ e $\Gamma \geq 0$ costanti dimensionali.

1. Si determini la legge oraria della velocità $v(t)$ della particella per $t > 0$.
2. Si indichi con v_∞ il valore asintotico della velocità per $t \to \infty$. Per quale valore di Γ si ha $v_\infty = c$?
3. Si determini v_∞ per $mc\Gamma/f = 1/\sqrt{3}$.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 21 giugno 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $\mathrm{C} = (x, 0)$, $\mathrm{B} = (x + \frac{3}{4}\ell\cos\theta, \frac{3}{4}\ell\sin\theta)$, $\mathrm{G} = (x + \frac{1}{4}\ell\cos\theta, \frac{1}{4}\ell\sin\theta)$, quindi $v_\mathrm{G} = (\dot{x} - \frac{1}{4}\ell\sin\theta\dot{\theta}, \frac{1}{4}\ell\cos\theta\dot{\theta})$. Dato il momento di inerzia del corpo $I_\mathrm{G} = \frac{1}{12}M\ell^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\ell\sin\theta\dot{\theta}\dot{x} + \frac{7}{48}\ell^2\dot{\theta}^2\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}k\left(2x^2 + \frac{3}{2}\ell(x\cos\theta - a\sin\theta)\right) + \text{costante}.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_x = k\left(2x - \frac{3}{4}\ell\cos\theta\right)$$
$$U_\theta = -\frac{3}{4}k\ell(x\sin\theta + a\cos\theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha $x = -\frac{3}{8}\ell\cos\theta$ e

$$\cos\theta\left(a - \frac{3}{8}\ell\sin\theta\right) = 0.$$

La prima posizione di equilibrio è $\theta = \pi/2$, $x = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\theta = -\pi/2$, $x = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta = \frac{8a}{3\ell}$ e $x = \mp\frac{1}{8}\sqrt{9\ell^2 - 64a^2}$, che esistono solo se $|a| \leq \frac{3}{8}\ell$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{xx} = 2k, \qquad U_{x\theta} = -\frac{3}{4}k\ell\sin\theta, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{3}{4}k\ell(a\sin\theta - x\cos\theta).$$

Siccome $U_{xx} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano e

$$\det\mathbb{U} = \frac{3}{2}k^2\ell\left(a\sin\theta - x\cos\theta - \frac{3}{8}\ell\sin^2\theta\right).$$

Si ha quindi che la prima posizione di equilibrio è stabile per $a > \frac{3}{8}\ell$.
La seconda posizione di equilibrio è stabile per $a < -\frac{3}{8}\ell$.
Le posizioni $3, 4$ infine sono stabili per $|a| < \frac{3}{8}\ell$.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la terza e la quarta. La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 54 \end{pmatrix}$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$24\,\omega^4 - 86\,\omega^2 + 72 = 0$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_+^2 = \frac{9}{4}, \qquad \omega_-^2 = \frac{4}{3}\,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \frac{3}{2}$ e $\omega_- = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Imponendo la condizione $[Q, P]_{q,p} = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}[Q, P]_{q,p} &= -\gamma q^{\gamma-1}(\sinh p)^3 \frac{q^\alpha \cosh p}{4(\sinh p)^2} - (\beta \sinh p + 3q^\gamma (\sinh p)^2 \cosh p)\frac{\alpha q^{\alpha-1}}{4\sinh p} \\ &= \left(-\frac{\gamma}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) q^{\alpha+\gamma-1} \sinh p \cosh p - \frac{\beta\alpha}{4} q^{\alpha-1}\end{aligned}$$

   da cui segue $\alpha = 1$, $\beta = -4$ e $\gamma = -3$.

2. Sappiamo che $dF_4(p, P) = -q\,dp + Q\,dP$, dobbiamo dunque invertire la trasformazione canonica:

$$\begin{aligned} q &= 4P \sinh p \\ Q &= -4\cosh p + \frac{1}{64\,P^3} \end{aligned} \tag{6}$$

   da cui segue che

$$\begin{aligned} F_4(p, P) &= -\int q\,dp = -4P\cosh p + f(P) \\ F_4(p, P) &= \int Q\,dP = -4P\cosh p - \frac{1}{128\,P^2} + g(p) \end{aligned}$$

   che implica $f(P) = -\frac{1}{128\,P^2}$ e $g(p) = 0$, ovvero

$$F_4(p, P) = \int Q\,dP = -4P\cosh p - \frac{1}{128\,P^2} \tag{7}$$

3. Dilatazione dei tempi.

Sia $\bar\tau = 1$ anno. La prima astronave inverte il senso di marcia al tempo

$$t_1 = \frac{\bar\tau}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\bar\tau = 1.061\,\bar\tau\,.$$

La seconda astronave inverte il senso di marcia al tempo

$$t_2 = \frac{\bar\tau}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\bar\tau = 1.155\,\bar\tau\,.$$

1. I tempi di arrivo sono $2t_1 = 3/\sqrt{2}$ anni $= 2.122$ anni e $2t_2 = 4/\sqrt{3}$ anni $= 2.310$ anni.

2. Le posizioni di inversione di marcia sono $x_1 = v_1 t_1 = \frac{\bar\tau}{2\sqrt{2}}c$ e $x_2 = v_2 t_2 = \frac{\bar\tau}{\sqrt{3}}c$. I tempi di ricevimento dei segnali sono

$$t_1 + x_1/c = \sqrt{2}\,\bar\tau = 1.414 \quad \text{anni}$$

   e

$$t_2 + x_2/c = \sqrt{3}\,\bar\tau = 1.732 \quad \text{anni.}$$

4. Dinamica relativistica.

1. L'impulso trasferito alla particella fino al tempo t è

$$I(t) = \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}s = f\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1+\Gamma s)^2} = \frac{ft}{1+\Gamma t}.$$

   Integrando l'equazione del moto relativistica (lungo l'asse x)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F(t),$$

   con la condizione iniziale $v(t=0)=0$, si ha

$$\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{[v(t)]^2}{c^2}}} = I(t) \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{cI(t)}{\sqrt{(mc)^2+[I(t)]^2}} = \frac{cft}{\sqrt{[mc(1+\Gamma t)]^2+(ft)^2}}.$$

2. Prendendo il limite per $t\to\infty$ si trova

$$v_\infty = \frac{cf}{\sqrt{(mc\Gamma)^2+f^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{mc\Gamma}{f}\right)^2}}.$$

   Per $\Gamma=0$ l'impulso trasferito alla particella diverge per $t\to\infty$ e si ha $v_\infty = c$, mentre per $\Gamma>0$ l'impulso trasferito alla particella converge per $t\to\infty$ e si ha $v_\infty < c$.

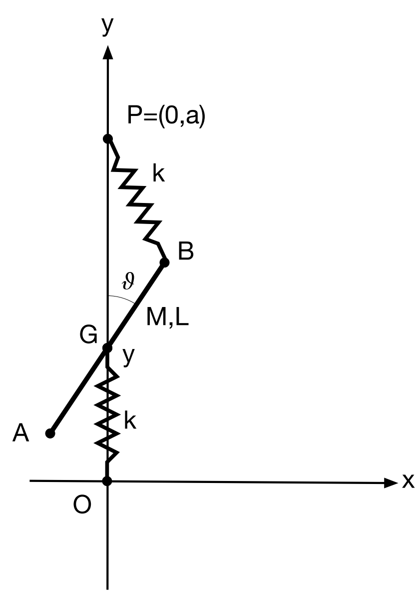
3. Per il valore dato dalla traccia, $mc\Gamma/f = 1/\sqrt{3}$, si ha $v_\infty = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 luglio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].
In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse y (si veda la figura), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -k\,\mathrm{OG}$, $k > 0$. L'estremo B dell'asta è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\mathrm{PB}$, dove P è il punto di coordinate $(0, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. L'asta è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano assegnato e passante per G. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di G e l'angolo ϑ che l'asta AB forma con l'asse y.

1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $L = a = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}ML^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].
Sia data la trasformazione dalle coordinate canoniche q, p alle coordinate

$$Q = (\alpha + \gamma\frac{q}{p})\, e^{q^2}\,,$$
$$P = \frac{p^\beta}{2q}\, e^{-q^2}\,.$$

1. Trovare *tutti* i valori di α, β, γ per i quali la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori, trovare la funzione generatrice del secondo tipo, $F_2(q, P)$.

IL TESTO CONTINUA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

3. Relatività Ristretta [5 punti].
Da una stazione spaziale distante 3 ly (anni-luce) dalla Terra e ferma relativamente a essa viene inviato un segnale in direzione della Terra con cadenza annuale. All'arrivo di uno di tali segnali, un'astronave parte dalla Terra con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ diretta verso la stazione spaziale. Al quarto segnale ricevuto dall'astronave (incluso quello all'arrivare del quale essa è partita), essa inverte istantaneamente il verso del moto e torna verso la Terra con velocità $v_2 = \frac{2}{5}c$.

1. Quanta distanza dalla Terra Δx ha percorso l'astronave quando inverte il moto?

2. Quanti segnali riceve in tutto l'astronave prima di tornare sulla Terra (incluso quello della partenza)?

3. Quanto tempo dura il viaggio per gli astronauti?

4. Urti tra particelle relativistiche [5 punti].
Una particella relativistica, di massa propria m, si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale solidale con il laboratorio L, con velocità $v = \frac{3}{5}c$. Ad un certo istante, la particella urta una particella di massa propria $2m$ in quiete nell'origine del sistema di riferimento adottato. Dopo l'urto, le due particelle iniziali si fondono in un'unica particella di massa propria M.

1. Si determini l'asse lungo il quale si muove la particella prodotta e la sua velocità V rispetto al sistema di riferimento adottato.

2. Si determini la massa propria M della particella prodotta, assumendo nota m.

3. La particella prodotta è instabile, con un tempo di vita medio $\tau = 600\,\mathrm{s}$, nel sistema di quiete della particella. Determinare il tempo di vita medio T della particella nel sistema di riferimento solidale con L.

Soluzioni della prova scritta di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 luglio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_{\rm G} = 0$, $y_{\rm G} = y$, $x_{\rm P} = 0$, $y_{\rm P} = a$, $x_{\rm B} = \frac{L}{2}\sin\vartheta$, $y_{\rm B} = y + \frac{L}{2}\cos\vartheta$, $|OG|^2 = y^2$ e

$$|PB|^2 = \left(\frac{L}{2}\cos\vartheta + y - a\right)^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\vartheta = y^2 - 2ay + L(y-a)\cos\vartheta + \text{cost},$$

quindi l'energia potenziale del corpo è

$$U = \frac{k}{2}\left[2y^2 - 2ay + L(y-a)\cos\vartheta\right]$$

e, dato il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di massa $I_{\rm G} = \frac{1}{12}ML^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{24}ML^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_{,y} = k\left(2y - a + \frac{L}{2}\cos\vartheta\right)\,,$$
$$U_{,\vartheta} = -\frac{kL}{2}(y-a)\sin\vartheta\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = \frac{a}{2} - \frac{L}{4}\cos\vartheta\,.$$

La prima posizione di equilibrio è $\vartheta = 0$, $y = \frac{a}{2} - \frac{L}{4}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\vartheta = \pi$, $y = \frac{a}{2} + \frac{L}{4}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $y = a$ e $\cos\vartheta = -\frac{2a}{L}$, che esistono solo se $L > 2|a|$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{,yy} = 2k\,, \qquad U_{,y\vartheta} = -\frac{kL}{2}\sin\vartheta\,,$$

$$U_{,\vartheta\vartheta} = -\frac{kL}{2}(y-a)\cos\vartheta = \frac{kL}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\,.$$

Siccome $U_{,yy} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano

$$H = k^2L\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - \frac{k^2L^2}{4}\sin^2\vartheta\,.$$

Si ha quindi che per la prima posizione di equilibrio $H = k^2L\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\right) > 0$ quindi è stabile per $a > -\frac{L}{2}$.
Per la seconda posizione di equilibrio $H = k^2L\left(-\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\right)$, stabile per $a < \frac{L}{2}$.
Per le posizioni $3, 4$ infine $H = -\frac{k^2L^2}{4}\sin^2\vartheta < 0$ quindi esse sono sempre instabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia la sola posizione stabile è la prima, $\vartheta = 0$, $y = \frac{1}{4}$. In tale posizione, La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}\,.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} .$$

L'equazione secolare $\det |\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$ dà

$$\left(2 - \omega^2\right) \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\omega^2\right) = 0 \,,$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_+^2 = 2 \,, \qquad \omega_-^2 = \frac{9}{2} \,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{2}$ e $\omega_- = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Imponendo la condizione $[Q, P]_{q,p} = 1$ otteniamo

$$[Q, P]_{q,p} = \alpha\beta p^{\beta-1} + \gamma(\beta - 1)(q + \frac{1}{2q})p^{\beta-2},$$

da cui segue $\alpha = 1$, $\beta = 1$ mentre γ può assumere qualunque valore. La trasformazione è quindi

$$Q = (1 + \gamma\frac{q}{p})\, e^{q^2}$$
$$P = \frac{p}{2q}\, e^{-q^2} .$$

2. Sappiamo che $dF_2(q, P) = p\, dq + Q\, dP$, dobbiamo dunque invertire la trasformazione canonica:

$$Q = e^{q^2} + \frac{\gamma}{2P} \,,$$
$$p = 2qP\, e^{q^2} \,,$$

da cui segue che

$$F_2(q, P) = \int Q\, dP = P\, e^{q^2} + \frac{\gamma}{2} \log P + f(q),$$

dove $f(q)$ si può determinare per confronto

$$p = 2qP\, e^{q^2} = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2qP\, e^{q^2} + f'(q)$$

che implica $f'(q) = 0$, ovvero $f(q) = \text{cost}$. Una funzione generatrice è dunque

$$F_2(q, P) = P\, e^{q^2} + \frac{\gamma}{2} \log P.$$

3. Relatività Ristretta.

1. Supponendo che l'astronave riceva il primo segnale al tempo $t = 0$ e parta istantaneamente, il quarto segnale al ricevimento del quale essa invertirà il moto verrà emesso sulla stazione spaziale a distanza $L = 3\,\text{ly}$ ad un tempo

$$t^* = -\frac{L}{c} + 3\,\text{y} = 0 \,,$$

misurato da un orologio sulla Terra. Essa riceverà il quarto segnale al tempo t_1 tale che

$$v_1 t_1 + c t_1 = L \,, \qquad\qquad t_1 = \frac{L}{v_1 + c} = \frac{5}{3}\,\text{y (anni)}.$$

L'astronave, prima di invertire il moto, percorre la distanza

$$\Delta x = v_1 t_1 = \frac{v_1 L}{v_1 + c} \,.$$

2. Per tornare sulla Terra, l'astronave impiega in tutto

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta x}{v_2} = \frac{L}{v_1 + c}\left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right) = 5\,\mathrm{y}$$

e quindi riceve in tutto 6 segnali dalla stazione orbitante (includendo il segnale arrivato al tempo 0 e il segnale che riceve quando arriva a Terra).

3. Il tempo che dura il viaggio per gli astronauti è

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\,t_1 + \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{21}\right)\,\mathrm{y} \approx 4.055\,\mathrm{y}.$$

4. Urti tra particelle relativistiche.

1. Per la conservazione del quadri-impulso, la particella deve muoversi lungo l'asse x del sistema adottato. Scrivendo le equazioni per la componente spaziale e temporale del quadri-impulso abbiamo

$$\frac{MV}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{3}{4}mc, \qquad \frac{M}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + 2m = \frac{13}{4}m.$$

Ricavando il rapporto $M/\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ dalla seconda e sostituendo nella prima si trova $V = \frac{3}{13}c$.

2. Sostituendo il valore di V trovato nella seconda equazione si trova $M = \sqrt{10}\,m$.

3. Vale la relazione

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{13\sqrt{10}}{40}\tau = 616.6\,\mathrm{s}.$$

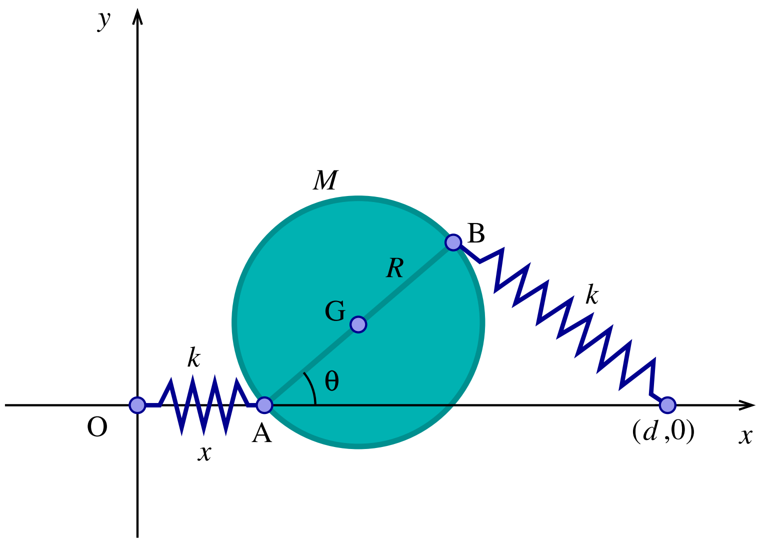
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 settembre 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un disco omogeneo di massa M e raggio R. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la figura), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -k\,\underline{\mathrm{OA}}$, $k > 0$. Il punto B, posizionato sempre sul bordo del disco, in posizione diametralmente opposta ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\underline{\mathrm{PB}}$, dove P è il punto di coordinate $(d, 0)$, con $d \in \mathbb{R}$. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano assegnato e passante per A. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo ϑ che il dimetro AB del disco forma con l'asse x.

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $d \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $R = 1$, $d = 4$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}MR^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].

Sia data la trasformazione dalle coordinate canoniche q, p alle coordinate Q, P, tale che

$$p = \frac{Q^\alpha}{1+q^2} + \beta Q^2, \qquad\qquad P = -\arctan q - qQ^\gamma,$$

con α, β, γ parametri reali positivi.

1. Dire per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori di α, β, γ, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica $F_1(q, Q)$.

[Si suggerisce di risolvere il primo punto imponendo che il differenziale $\mathrm{d}F_1$ sia esatto; per il secondo punto, si ricordi che $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$].

IL TESTO CONTINUA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

3. Relatività Ristretta [6 punti].
Sulla Terra viene captato un segnale elettromagnetico proveniente da un punto remoto dello Spazio. Questo segnale si ripete periodicamente, una volta ogni 6 mesi. Incuriositi, un gruppo di terrestri parte in direzione della sorgente dei segnali, con una astronave di nuova generazione che viaggia a velocità $v = c/3$. Il momento della partenza coincide con la ricezione di uno dei segnali.

Nel frattempo, sulla Terra, gli scienziati analizzano il segnale alieno e, 2 anni dopo la partenza dell'astronave, capiscono che si tratta di una minaccia. Immediatamente inviano un segnale di emergenza all'astronave con l'ordine di tornare indietro. L'astronave, alla ricezione del segnale, inverte immediatamente la rotta per tornare sulla Terra (con la stessa velocità $v = c/3$).

1. A che distanza dalla Terra si trova l'astronave quando inverte il moto?
2. Quanti segnali riceve in tutto l'astronave prima di tornare sulla Terra (incluso quello della partenza)?
3. Quanto tempo dura il viaggio per gli astronauti?

4. Urti tra particelle relativistiche [4 punti].
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due particelle in moto lungo l'asse x, di masse $m_1 = m_2 = m$ e velocità lungo l'asse x $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = -\frac{3}{5}c$, collidono. In seguito all'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare il rapporto $\lambda = M/m$ e la velocità V.

Soluzioni della prova scritta di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 settembre 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_\mathrm{G} = x + R\cos\vartheta$, $y_\mathrm{G} = R\sin\vartheta$, $x_\mathrm{B} = x + 2R\cos\vartheta$, $y_\mathrm{B} = 2R\sin\vartheta$, $|OA|^2 = x^2$ e

$$|PB|^2 = (d - 2R\cos\vartheta - x)^2 + 4R^2\sin^2\vartheta = x^2 - 2dx + 4R(x-d)\cos\vartheta + \mathrm{cost},$$

quindi l'energia potenziale del corpo è

$$U = \frac{k}{2}\left[2x^2 - 2dx + 4R(x-d)\cos\vartheta\right]$$

e, dato il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di massa $I_\mathrm{G} = \frac{1}{2}MR^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{y}_\mathrm{G}^2) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_x = k\left(2x - d + 2R\cos\vartheta\right)\,,$$
$$U_\vartheta = -2kR(x-d)\sin\vartheta\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = \frac{d}{2} - R\cos\vartheta\,.$$

La prima posizione di equilibrio è $\vartheta = 0$, $x = \frac{d}{2} - R$.
La seconda posizione di equilibrio è $\vartheta = \pi$, $x = \frac{d}{2} + R$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x = d$ e $\cos\vartheta = -\frac{d}{2R}$, che esistono solo se $2R \geq |d|$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{xx} = 2k\,, \qquad U_{x\vartheta} = -2kR\sin\vartheta\,,$$

$$U_{\vartheta\vartheta} = -2kR(x-d)\cos\vartheta = 2kR\left(\frac{d}{2} + R\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\,.$$

Siccome $U_{xx} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano

$$\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(\frac{d}{2} + R\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - 4k^2R^2\sin^2\vartheta\,.$$

Si ha quindi che per la prima posizione di equilibrio $\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(\frac{d}{2} + R\right) > 0$ quindi è stabile per $d > -2R$.
Per la seconda posizione di equilibrio $\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(-\frac{d}{2} + R\right)$, stabile per $d < 2R$.
Per le posizioni $3, 4$ infine $\det\mathbb{U} = -4k^2R^2\sin^2\vartheta < 0$ quindi esse sono sempre instabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia la sola posizione stabile è la prima, $\vartheta = 0$, $x = 1$. In tale posizione, La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} M & -MR\sin\vartheta \\ -MR\sin\vartheta & \frac{3}{2}MR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\,.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\,.$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U}-\omega^2\mathbb{T}|=0$ dà

$$\left(2-\omega^2\right)\left(6-\frac{3}{2}\omega^2\right)=0\,,$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_-^2=2\,,\qquad \omega_+^2=4\,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_-=\sqrt{2}$ e $\omega_+=2$.

2. Trasformazioni canoniche.
Si ha

$$\frac{\partial p}{\partial Q}=\frac{\alpha Q^{\alpha-1}}{1+q^2}+2\beta Q,\qquad\qquad -\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{1}{1+q^2}+Q^\gamma.$$

Imponendo che le due derivate siano uguali, essendo $1+q^2>0$, si ha

$$\alpha Q^{\alpha-1}+2\beta q^2 Q+2\beta Q=1+q^2Q^\gamma+Q^\gamma.$$

Il termine centrale in ciascun membro è l'unico che contiene q^2. Uguagliando questi termini, si ha $\beta=\frac{1}{2}$ e $\gamma=1$. Per questi valori, il terzo termine a primo e secondo membro diventano identici, quindi deve essere $\alpha Q^{\alpha-1}=1$, che implica $\alpha=1$.

Per questi valori si ha

$$p=\frac{Q}{1+q^2}+\frac{1}{2}Q^2,\qquad\qquad P=-\arctan q-qQ.$$

Integrando $\mathrm{d}F_1=p\,\mathrm{d}q-P\,\mathrm{d}Q$ lungo una qualunque linea che unisce l'origine al punto generico (q,Q) si trova

$$F_1(q,Q)=Q\arctan q+\frac{1}{2}qQ^2.$$

3. Relatività Ristretta.
Chiamando $(t,x)=(0,0)$ l'evento della partenza (nel giudizio della Terra), l'astronave si muove all'andata con legge oraria $x_A(t)=vt$, mentre il segnale di emergenza segue $x_S(t)=c(t-t_0)$, essendo $t_0=2y$ l'istante dell'invio. L'evento (t_1,x_1), sempre nel giudizio della terra, in cui il segnale raggiunge l'astronave è dato da

$$x_A(t_1)=x_S(t_1)\equiv x_1\qquad\Rightarrow\qquad vt_1=c(t_1-t_0)\qquad\Rightarrow\qquad t_1=\frac{1}{1-v/c}t_0=3y\qquad\Rightarrow\qquad x_1=vt_1=1ly.$$

Nel tragitto di ritorno l'astronave segue la legge oraria $x_{A'}(t)=x_1-v(t-t_1)$ (nel giudizio della Terra). L'istante t_2 (nel giudizio della Terra) di arrivo sulla Terra è dato da

$$x_{A'}(t_2)=0\qquad\Rightarrow\qquad 0=x_1-v(t_2-t_1)\qquad\Rightarrow\qquad t_2=\frac{x_1}{v}+t_1=6y.$$

In questo tempo l'astronave ha intercettato 13 segnali alieni, inclusi il primo e l'ultimo entrambi ricevuti sul suolo terrestre. Il tempo trascorso per gli astronauti, trascurando il breve momento dell'inversione di rotta, è dato semplicemente da

$$\tau=t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=6y\sqrt{\frac{8}{9}}=2\sqrt{8}y=5.7y.$$

4. Urti tra particelle relativistiche.

Per la conservazione del quadri-impulso, la particella deve muoversi lungo l'asse x del sistema adottato. I fattori di Lorentz delle due particelle sono rispettivamente $\gamma_1 = 5/3$, $\gamma_2 = 5/4$. Scrivendo le equazioni per la componente spaziale e temporale del quadri-impulso abbiamo (dividendo per m)

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 = \lambda\gamma V$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = \lambda\gamma$$

con γ fattore di Lorentz della particella finale. Dalla seconda $\gamma\lambda = 5/3 + 5/4 = 35/12$. Quindi dalla prima

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 = \frac{7}{12} = \frac{35}{12}V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{5}$$

$\gamma = 5/\sqrt{24}$ e

$$\lambda = \frac{35}{12\gamma} = \frac{7}{\sqrt{6}}\,.$$