

APPUNTI DI MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA

CARLO MARCHIORO

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza".

Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma

marchior@mat.uniroma1.it

fax: 39-06-44701007

giugno 2004

PARTE 1

INTRODUZIONE

1. SCOPO DEL LIBRO

Queste note contengono gli argomenti svolti nel corso di Meccanica Analitica e Relativistica da me tenuto agli studenti di fisica dell'Università di Roma "La Sapienza". Esse si limitano a riprodurre gli argomenti illustrati in classe e vogliono essere un ausilio, spero utile, per la preparazione dell'esame. Per chi voglia approfondire lo studio del soggetto consiglio in fondo una breve bibliografia.

Gli argomenti svolti sono due: la Meccanica Analitica e la Relatività Ristretta. In ambedue gli argomenti si tratta solo di un inizio, come si addice ad un corso del secondo anno. Infatti la Meccanica Analitica è molto vasta, feconda, con applicazioni attualmente in via di sviluppo, che possono formare l'oggetto di vari corsi specialistici. Quanto allo studio della Relatività Ristretta abbiamo qui come principale lacuna la mancanza dello studio del campo elettromagnetico e delle sue numerose applicazioni.

Mi scuso infine con i lettori per la povera presentazione grafica del testo, che corrisponde alla mia poca dimistichezza col TEX !

Lo spirito del corso è duplice: sia vogliamo fornire dei concetti fondamentali su argomenti di grande interesse sia vorremmo insegnare un metodo di rigore su diversi problemi fisici.

Partiamo discutendo il nome del corso. Cosa è una "Meccanica"? È una teoria fisica che abbraccia una grande gamma di fenomeni fisici a priori differenti, senza

introdurre varie ipotesi estemporanee. Partiamo da un esempio che ben conoscete, la Meccanica Classica. Di fronte alla complessità del mondo e dei fenomeni che si incontravano, il primo passo nella storia scientifica è stato di costruire una spiegazione "ad hoc" per ognuno di questi. Per esempio i pianeti seguivano le loro leggi (in parte misteriose), i gravi altre leggi, ecc. ecc. . Potete immaginare l'entusiasmo nel riconoscere che le leggi erano comuni ad una grandissima gamma di fenomeni, in cielo ed in terra, e potevano essere compendiate dalle leggi di Newton. Nasceva cioè una *Meccanica* nel senso moderno del termine. Nel corso degli anni sono sorte varie *Meccaniche* da quella *Celeste* che coinvolge gli oggetti celesti, a quella *Statistica* che si applica a sistemi ad un numero grandissimo di corpi, a quella *Quantistica* valida nell'infinitesimamente piccolo, ecc.ecc.. Capirete in modo naturale nel seguito il perché del nome delle due *Meccaniche* che studieremo.

Una osservazione per la lettura di questo testo: alcune parti sono indicate con l'avvertenza "non necessario per l'esame". Esse sono piccole note di approfondimento non indispensabili in una prima lettura né necessarie per sostenere l'esame finale. Alcune domande negli esercizi proposti portano la scritta "un po' più difficile", intendendo che sono più difficili di quelle che vengono poste ^{ma} ai compiti di esonero o alle prove finali. Non sono quindi essenziali per la preparazione all'esame, ma sono qui poste per stimolare la curiosità del lettore.

Come dicevamo, il taglio del libro è didattico, evitando eccessive generalizzazioni e calcolo tediosi ed ingombranti. Spero di esservi riuscito. " Ma se in vece fossimo riusciti ad annoiarvi, credete non s'è fatto apposta" !

2. COS'E' UN MODELLO RIGOROSO DELLA REALTA'

Prima di incominciare a svolgere gli argomenti del corso, permettetemi di riflettere brevemente su cos'e' un *modello rigoroso della realta'* (talvolta detto modello matematico della realta' fisica). La relazione fra matematica e fisica e' nello stesso tempo semplice e complicata. Com'e' noto, una teoria matematica procede grosso-modo nella maniera seguente: introduce dei concetti primitivi, assume una logica e dei postulati, deduce delle conseguenze (teoremi). Un modello matematico della realta' fisica cerca di far coincidere alcune grandezze fisiche osservabili sperimentalmente con i postulati di una teoria matematica in modo che i teoremi conseguenti diventino osservazioni fisiche. Naturalmente il modello matematico sara' tanto ~~piu'~~ *migliore* ~~buono~~, quanto piu' tali osservazioni sono in accordo con la realta'.

Concettualmente quindi una teoria fisica ed una teoria matematica sono fra loro distinte e questa separazione ha rappresentato una notevole conquista del pensiero umano. (Per esempio la geometria euclidea e la realta' fisica sono in cosi' grande accordo, che per secoli ~~si~~ e' fatta confusione fra i due concetti. Per chi voglia approfondire, non certo per l'esame, si puo' vedere il libro di Russo, descritto nella bibliografia).

In pratica le cose non procedono proprio cosi'. Ci si rende conto che non e' possibile formulare alcun esperimento senza aver in mente una teoria almeno ad uno stadio rozzo. D'altra parte la maggioranza delle teorie matematiche sono sorte e si sono sviluppate per fornire strumenti adatti alle applicazioni fisiche, ingegneristiche, economiche, ecc. ecc.. Cioe' il rapporto fra teorie matematiche e realta' fisica e' interattivo.

Ogni teoria fisica ha dei limiti e per ora (e forse per sempre) non siamo stati in grado di trovare una teoria perfetta (ma molti modelli di grande generalita'). Nel corso discuteremo i limiti delle due "meccaniche" in esame solo brevemente

ed occasionalmente (molto poco per la meccanica analitica, un po' piu' per quella relativistica), dedicandoci invece alla esposizione di importanti e ricche proprieta'.

PARTE 1° : MECCANICA ANALITICA

CAP. 1. IL MODELLO DELLA MECCANICA CLASSICA

1. Le equazioni di Newton.

Consideriamo un sistema composto da N punti materiali di posizione \underline{x}_i e massa m_i , liberi di muoversi nello spazio euclideo \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$) e soggetti alle forze \underline{f}_i . Tale sistema obbedisce alle equazioni del moto di Newton:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{f}_i \quad (1.1)$$

ove con il punto indichiamo la derivata rispetto al tempo.

Sperimentalmente le forze dipendono, al più, dalle posizioni, dalle velocità e esplicitamente dal tempo, cioè $\underline{f}_i = \underline{f}_i(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N, t)$. Si può dare una definizione operativa di tali grandezze, ma non è questo il punto fondamentale. Esso risiede nel fatto che la (1.1) ci dà una visione deterministica della natura, perché ci dice che il moto è retto da un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine e che quindi bastano alcune condizioni iniziali per determinare il futuro. Vediamo un po' più in dettaglio questo punto. Supponiamo che le forze siano regolari (per esempio $\in C^1$, cioè continue con derivata prima continua), allora la (1.1) ha una soluzione (almeno per tempi piccoli) che dipende in modo univoco dalle posizioni e velocità iniziali (Teorema di Cauchy). Tale teorema quindi gioca un ruolo essenziale ^{per lo} della (1.1) (In realtà è stato definito oltre un secolo dopo Newton, ma questa è una caratteristica della scienza, di arrivare a compimento di una teoria in un periodo anche assai lungo). Ulteriori condizioni molto ragionevoli sulla forza assicurano che la soluzione esiste (ed è unica) per tutti i tempi.

Notiamo a questo punto una cosa ovvia: esistono forze per cui la (1.1) non ha una soluzione per tutti i tempi (o come si suol dire, globale nel tempo). Diamo un esempio, considerando il moto di un punto unidimensionale di posizione x e massa unitaria, soggetto alla forza $f = \dot{x}^2$. Definito $v = \dot{x}$, le equazione (1.1) diventano:

$$\frac{d}{dt}v = v^2 \quad . \quad (1.2)$$

Risolvendo il problema per separazione delle variabili (cioe' portando tutta la dipendenza da v al primo membro e da t al secondo: $v^{-2}dv = dt$) si ha:

$$v(t) = \frac{1}{v_0^{-1} - t}$$

e indicando con v_0 la velocità iniziale, al tempo $t=0$,

(1.3)

cioe' la velocità esplose in tempi finiti. Naturalmente se in un problema fisico si incontrano tali forze non vuol dire che il mondo cessa di esistere dopo un certo tempo (!), ma che la modellizzazione cessa di essere adeguata alla realtà. In questo corso supponiamo sempre che le forze in gioco siano sufficientemente ~~buone~~ ^{regolari} da non dar luogo a questi fenomeni. (Non necessario esame). Nello studio di alcuni fenomeni fisici l' "esplosione" delle soluzioni (con termine anglosassone "blow up") gioca un ruolo importante. Accenno vagamente solo ad un esempio: le onde d'urto (dette anche onde di shock), che sentiamo come un botto a terra quando un aereo in cielo va a velocità supersonica, sono legate ad "esplosioni" di grandezze fisiche. (Fine non necessario esame).

2. Digressione sulle equazioni differenziali.

Un sistema di equazioni differenziali viene detto in forma "normale" se si puo' scrivere in una forma in cui tutte le derivate di ordine massimo sono sulla sinistra

che dipende dalle derivate
di ordine più basso

uguagliate ad un termine ~~noto~~, come nelle (1.1). Do' questa definizione perche' nel seguito incontreremo delle equazioni (dette di Lagrange) in cui questa proprieta' e' meno immediata.

a secondo membro Per un sistema di equazioni differenziali poste in forma normale, se il termine ~~noto~~ e' regolare, la soluzione esiste (almeno per tempi brevi) ed e' unica (Teorema di Cauchy. Per la dimostrazione rinvio ai corsi di analisi). Inoltre essa dipende in modo regolare dalle condizioni iniziali. Nel caso delle equazioni di Newton questo teorema si traduce nel fatto, gia' detto, che il moto dipende univocamente dalle posizioni e velocita' iniziali. Il modello della meccanica classica e' dato quindi dalle equazioni (1.1) con le condizioni iniziali:

$$m_i \ddot{x}_i(t) = \underline{f}_i \quad ; \quad \underline{x}_i(0) = \underline{x}_{i,0} \quad ; \quad \dot{\underline{x}}_i(0) = \underline{v}_{i,0} \quad . \quad (2.1)$$

(Non necessario esame) Che ci sia bisogno di qualche condizione di regolarita' sul termine noto si vede bene dal seguente esempio: moto unidimensionale di un punto di massa unitaria soggetto alla forza $f = \sqrt{x}$ con $\dot{x}(0) = 0$. Esso ammette due soluzioni distinte: $\dot{x}(t) = 0$ o $\dot{x}(t) = \frac{1}{4}t^2$ e quindi cade l'unicita'. Nel corso daremo sempre per scontato che i problemi fisici abbiano una regolarita' sufficiente per l'esistenza e l'unicita' delle soluzioni. Infine osserviamo che la regolarita' C^1 basta ai nostri fini, anche se matematicamente la si potrebbe un po' indebolire. Nel ~~+~~ proseguo del corso degli studi potrete incontrare alcuni problemi fisici (generati dalla meccanica dei fluidi) nei quale il termine al secondo membro non e' C^1 , ma meno regolare, seppur sufficiente per assicurare l'unicita' del moto. (Fine non necessario esame).

1. Vincoli.

Nel capitolo precedente abbiamo considerato un sistema di punti materiali liberi di assumere qualunque posizione. Per modellizzare vari sistemi fisici realistici, e' conveniente considerare sistemi, nei quali i punti sono sottoposti a delle limitazioni.

Incominciamo con lo studiare un esempio. Consideriamo un punto materiale nel piano $OP = (x, y)$ soggetto ad una forza di richiamo elastica $\underline{F} = -kHP, k > 0$ ove H e' la proiezione di P sull'asse x . Le equazioni del moto sono, ovviamente:

$$m\ddot{x} = 0 ; m\ddot{y} = -ky \quad . \quad (1.1)$$

Assunte le condizioni iniziali: $x(0) = x_o$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_o$, la soluzione e' data da:

$$x(t) = x_o + \dot{x}_o t ; y(t) = \dot{y}_o \omega^{-1} \sin(\omega t) ; \omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \quad . \quad (1.2)$$

Aumentiamo ora la costante di richiamo k fino a diventare molto grande (il che' fisicamente corrisponde a considerare una alta costante di elasticita' del sistema), al limite mandiamo $k \rightarrow \infty$, allora $y(t) \rightarrow 0$, $\dot{y}(t) \rightarrow 0$, ed il moto tende a diventare unidimensionale lungo l'asse x . Naturalmente se guardassimo il moto in grande dettaglio, con una immaginaria lente di ingrandimento, ci accorgeremmo della forza elastica infinita, perche' l'accelerazione lungo y tende all'infinito, ma queste rapidissime piccole oscillazioni lungo l'asse y , non alterano il moto lungo l'asse x .

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_o \cos(\omega t)$$

Questo esplicito esempio particolare ci conduce ad una generale definizione di vincolo. Definiamo vincolo *olonomo* o posizionale, una relazione ~~algebrica~~ che lega

i vari punti del sistema. Più esplicitamente, se ϕ è una funzione di più variabili, allora abbiamo un vincolo olonomo bilaterale se:

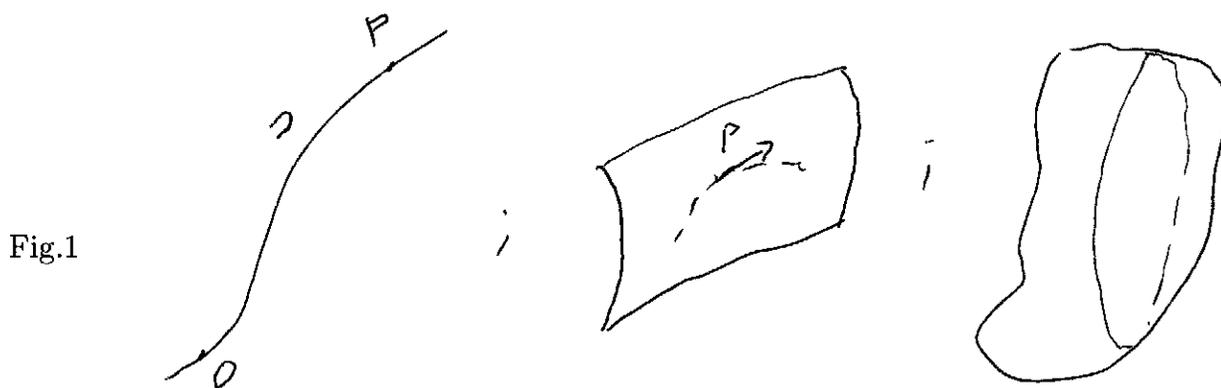
$$\phi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad . \quad (1.3)$$

Il vincolo viene detto unilaterale se:

$$\phi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) \geq 0 \quad . \quad (1.4)$$

In questo corso tratteremo solo vincoli bilaterali, e nel seguito ci riferiremo solo ad essi.

Gli esempi sono vari e spontanei. Un punto vincolato ad una curva, un punto vincolato ad una superficie, il vincolo di rigidità, cioè quello che impone alla mutua distanza dei punti di un sistema di rimanere costante:



È molto interessante (ma esula degli scopi del nostro corso) studiare in generale la relazione fra moto libero senza alcun vincolo ed i vincoli stessi, generalizzando l'esempio precedente. Sull'argomento si può vedere il libro di Arnold o di Gallavotti.

La (1.3) da' una naturale limitazione anche sull'atto di moto del sistema. Infatti, deriviamo (totalmente) rispetto al tempo la (1.3):

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{\underline{x}_i} \phi \cdot \dot{\underline{x}}_i + \partial_t \phi = 0 \quad . \quad (1.5)$$

Ci sono altri vincoli chiamati *anonomi* o sulle velocita', che limitano i possibili atti di moto del sistema, senza limitare le posizioni. Essi sono della forma:

$$\sum_{i=1}^N a_{i,j} \cdot \dot{\underline{x}}_i + a_{0,j} = 0 \quad ; \quad a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

ove la (1.6) non sia integrabile, cioe' non sia il differenziale totale di alcuna funzione ϕ . L'esempio piu' famoso di tali vincoli e' quello che impone il puro rotolamento di una ruota su un piano dato: l'atto di moto e' limitato, perche' vengono esclusi slittamenti laterali, ma nessuna posizione e' preclusa. (E' ben nota la difficolta' di parcheggiare l'automobile in un posto ai bordi della strada poco piu' grande di essa: il parcheggio non e' impossibile, ma i limiti all'atto di moto obbliga a molte manovre). L'espressione (1.6) e' una sorta di sviluppo al primo ordine e puo' essere generalizzata, ma non approfondiremo questo argomento, di grande interesse in ingegneria, ma di limitato interesse per la fisica. Nel resto del corso consideremo solo vincoli olonomi bilaterali.

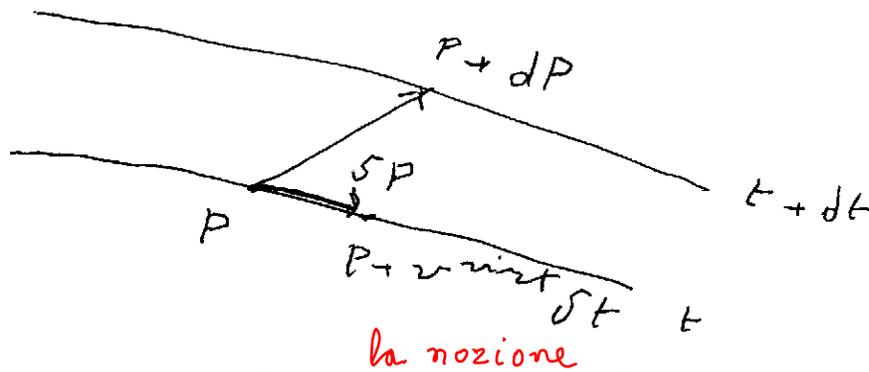
2. Spostamenti virtuali.

Chiamiamo velocita' *possibile* una velocita' compatibile con i vincoli. Chiamiamo velocita' *virtuale* una velocita' compatibile con i vincoli fissati a quell'istante,

cioe' compatibile con i vincoli "congelati". Se i vincoli non dipendono dal tempo i due concetti (velocita' possibile e velocita' virtuale) coincidono. Se invece i vincoli dipendono dal tempo, i due concetti sono differenti.

Chiamiamo *spostamento virtuale*, δOP , il prodotto della velocita' virtuale per una grandezza δt , che ha le dimensioni di un tempo: $\delta OP = \underline{v}_P^{virt} \delta t$. Per familiarizzarci con il concetto di spostamento virtuale, studiamo esplicitamente il caso di un punto vincolato ad una curva posta nel piano del foglio. Le velocita' virtuale obbedisce alla (1.5) nella quale il termine $\partial_t \phi$ manca, cioe' si trascura la dipendenza esplicita del tempo. La successiva figura chiarisce bene il concetto:

Fig.1



Avverto subito che, concettualmente, ~~questo concetto~~ di spostamento virtuale giochera' un ruolo importante nel seguito, ma praticamente le equazioni a cui arriveremo (equazioni di Lagrange) permetteranno di "dimenticare" (avendoli metabolizzati) i dettagli che stiamo indagando.

3. Variabili lagrangiane.

Abbiamo visto che i vincoli olonomi danno una limitazione alle possibili posizioni dei punti. Possiamo scegliere delle variabili, q^h , $h = 1, \dots, n$ che permettano di individuare la generica posizione del sistema compatibile con i vincoli:

$$OP_i = OP_i(q^1, \dots, q^n, t) \quad . \quad (3.1)$$

Chiamiamo *gradi di liberta'* il numero dei parametri q^h necessari per individuare la generica posizione del sistema. Diamo alcuni esempi. Un punto vincolato ad una curva: sulla curva basta individuare l'ascissa curvilinea (cioe' la ~~distanza calcolata~~ ^{lunghezza dell'arco della} ~~lungo la curva~~ ^{orientata, calcolata a partire} da un punto generico scelto come origine). Quindi il sistema ha un solo grado di liberta'. Un corpo rigido piano obbligato a ruotare attorno ad un punto fisso: la generica posizione puo' essere individuata dando l'angolo fra una retta solidale al sistema ed una retta fissa. Quindi il sistema ha un grado di liberta'. Per un punto nel piano sono necessari due parametri e quindi il sistema ^{ha} due gradi di liberta'. Nel caso di un corpo rigido nello spazio tridimensionale quanti sono i gradi di liberta'? Basta individuare una terna solidale ad esso, cioe' tre parametri per l'origine della terna e tre per il suo orientamento. In conclusione il sistema ha sei gradi di liberta'. In generale se abbiamo N punti nello spazio ed m relazioni come la (1.3) il numero dei gradi di liberta' e': $n = 3N - m$.

(Non necessario per l'esame). Quindi i gradi di liberta' sono ⁱ ~~il numero dei~~ parametri necessari per individuare la generica posizione del sistema. A voler essere molto pignoli la definizione e' incompleta: bisognerebbe precisare che questa individuazione deve avvenire con una buona regolarita'. Prendiamo infatti un punto geometrico nel piano ed osserviamo che, ovviamente, sono necessari due parametri per individuare la sua posizione, per esempio l'ascissa e l'ordinata, cioe' due numeri reali rappresentati in base due da due sequenze infinite di zero ed uno. In realta'

la due sequenze possono essere fuse in una sola, mettendo la prima nelle posizioni dispari e la seconda in quelle pari. Otteniamo un solo numero che rappresentata la coppia originaria di ascisse ed ordinate. Cioe' basta un numero per individuare un punto nel piano! Ma questa strana corrispondenza ai nostri fini non serve a niente, perche' non e' regolare e noi siamo interessati ad una rappresentazione cosi' regolare da dar luogo ad un modello esprimibile con equazioni differenziali; tale richiesta scarta queste stranezze. (Fine non necessario esame)

Osserviamo che la scelta delle q^h non e' unica e moltissimi altri parametri possono andar bene allo scopo. Per esempio un punto nel piano puo' essere individuato o tramite coordinate cartesiane o coordinate polari piane, cosi' come un punto dello spazio puo' essere individuato ~~tramite~~ tramite coordinate cartesiane o polari sferiche. La scelta di un sistema di q^h ~~opportuno~~, puo' molto semplificare (o complicare) la soluzione dei problemi.

L'uso di coordinate Lagrangiane permette di esprimere semplicemente gli spostamenti virtuali. Infatti dalla (3.1) ogni spostamento virtuale corrisponde ad un piccolo incremento delle q^h :

$$\delta OP_i = \delta OP_i(q^1, \dots, q^n, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \delta q^h \quad . \quad (3.2)$$

4. Reazioni vincolari e vincoli perfetti.

Chiamiamo reazioni vincolari, \underline{r}_i , le forze che il vincolo esercita in modo tale che il sistema obbedisca nel suo moto alle limitazioni volute. Quindi le equazioni del moto saranno:

$$m_i \underline{\ddot{x}}_i = \underline{f}_i + \underline{r}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

ove f_i vengono chiamate forze attive. I vincoli non ~~possono~~ esercitano ~~soltanto~~ una sola reazione vincolare, ma una intera classe di reazioni possibili, come vedremo fra un attimo in vari esempi. Quindi la (4.1) e' una equazione un po' strana. Il termine a destra non e' completamente noto, ma viene in parte determinato dalla soluzione stessa. Viceversa conosciamo proprieta' della soluzione a prescindere dalla (4.1). Torneremo su questo punto, che alla fine risultera' completamente chiaro.

Vediamo in alcuni esempi importanti le reazioni vincolari che specifici vincoli possono esercitare. Le osservazioni sono sperimentali e completano, in ultima analisi, i modelli di vincolo in questione.

Incominciamo con un punto vincolato ad una curva liscia. Allora il vincolo puo' esercitare una qualunque reazione vincolare applicata nel punto di contatto e diretta lungo una normale alla curva. Se la curva e' scabra, allora siamo in presenza di attrito, che aggiunge una nuova componente alla reazione vincolare, differente se il punto materiale su cui si applica e' fermo o in moto. In ambedue i casi vi puo' essere anche una componente tangenziale della reazione vincolare; nel primo caso il rapporto fra la sua intensita' e quella della componente normale e' minore o uguale di α_s , coefficiente di attrito statico, mentre nel secondo caso la reazione tangenziale si oppone al moto ed il rapporto fra la sua intensita' e quella della componente normale e' uguale ad α_d , coefficiente di attrito dinamico ($< \alpha_s$).

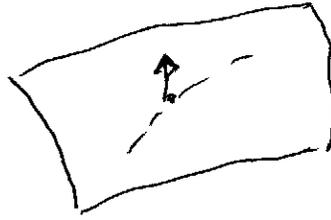
Fig.1



Nel caso di un punto vincolato ad una superficie la situazione e' analoga. Se la superficie e' liscia, la reazione vincolare e' diretta come la normale, se scabra le proprieta' sono quelle dell'esempio precedente, aggiungendo l'informazione che nel

caso di moto del punto materiale, la reazione tangenziale ha la direzione del moto ed il verso opposto.

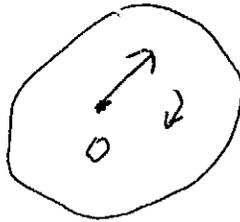
Fig.2



$\Sigma \parallel$ normale alla superficie

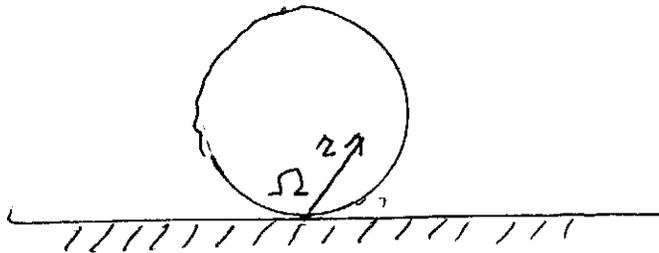
Se un corpo rigido e' obbligato a ruotare senza attrito attorno ad un punto O , la reazione vincolare si applica in O ed e' ~~comunque~~ grande *a piacere*.

Fig.3



Se un disco ha un puro rotolamento, la reazione vincolare e' applicata al punto di contatto ed e' ~~comunque~~ grande *a piacere*.

Fig.4



Capite bene come la determinazione delle reazioni vincolari sia un problema di grandissimo interesse in ingegneria, per vedere se il vincolo concretamente costruito e' veramente in grado di esercitare la reazione vincolare voluta. Un esempio banale

puo' essere il seguente: un punto vincolato ad un tavolo orizzontale e soggetto alla forza peso. La reazione vincolare si oppone al peso, ma se esso e' troppo grande il tavolo si rompe! Ovviamente si possono dare esempi meno banali. (Non necessario esame) Ne cito uno, noto a tutti gli automobilisti. Consideriamo una ruota, se il suo baricentro non e' ben sistemato ^{mozzo della} sulla ruota (come si suol dire se la ruota non e' centrata), la reazione vincolare del semiasse cresce al crescere della velocita', fino al punto di poter ~~dare~~ rompere il semiasse stesso. (Fine non necessario esame).

In questo corso, faremo di tutto per "nascondere" le reazioni vincolari, cioe' per arrivare a delle equazioni (di Lagrange) in cui le reazioni vincolari non appaiono.

Definiamo ora, in modo assai spontaneo, il *lavoro virtuale* di un sistema di forze \underline{f}_i :

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i \cdot \delta OP_i \quad . \quad (4.2)$$

Introduciamo un modello, che giochera' un ruolo fondamentale nel [↳]preseguo del corso. Chiamiamo *vincoli perfetti* bilaterali dei vincoli il cui lavoro virtuale delle reazioni vincolari e' sempre uguale a zero (sempre vuol dire per ogni reazione vincolare che il vincolo puo' esercitare e per qualunque spostamento virtuale):

$$\delta L^{(r)} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \cdot \delta OP_i = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Si verifica semplicemente che tutti i vincoli lisci sono perfetti, perche' gli spostamenti virtuali sono ortogonali alle reazioni vincolari. Anche il vincolo di puro rotolamento e' perfetto, perche' lo spostamento virtuale del punto di contatto e' nullo. (Infatti l'atto di moto e' rotatorio attorno il punto di contatto).

Viceversa i vincoli scabri non sono perfetti.

Il concetto di lavoro virtuale puo' essere utilizzato per formulare un notevole criterio di stabilita' (per un richiamo sul concetto di stabilita' rinvio al Capitolo 10).

Teorema 4.1 detto *Principio dei lavori virtuali*. Lo formuliamo e lo dimostriamo piu' in la' (dopo l'equazione di Lagrange) per un sistema soggetto a vincoli bilaterali (gli unici di cui ci occupiamo in questo corso).

"Dato un sistema soggetto a vincoli perfetti indipendenti dal tempo, condizione necessaria e sufficiente affinche' una posizione sia di equilibrio e' che, trovandosi in essa un sistema con un atto di moto nullo, il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive sia nullo:

$$\delta L^{(att)} = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i \cdot \delta OP_i = 0 \quad ". \quad (4.4)$$

CAP. 3. L'EQUAZIONE DI LAGRANGE

1. L'equazione simbolica della dinamica.

Studiamo un sistema di N punti materiali (P_i, m_i) soggetto a vincoli perfetti bilaterali. Come abbiamo gia' visto, il suo moto e' retto dall' N equazioni vettoriali:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{f}_i + \underline{r}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

ove le reazioni vincolari \underline{r}_i devono rispettare le condizioni dei vincoli perfetti bilaterali:

$$\sum_{i=1}^N \underline{r}_i \cdot \delta OP_i = 0 \quad (1.2)$$

per ogni spostamento virtuale δOP_i .

Preso la (1.1), moltiplicata scalarmente per δOP_i , sommando e tenendo conto della (1.2) si ottiene la cosiddetta *equazione simbolica* (o di d'Alembert):

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{x}}_i - \underline{f}_i) \cdot \delta OP_i = 0 \quad (1.3)$$

nella quale le reazioni vincolari sono eliminate. La (1.3) compendia, come vedremo, tutte le leggi del moto, (Come domanda un po' ingenua, potremmo chiederci come fa una sola equazione scalare, come la (1.3) ad essere equivalente ad N equazioni vettoriali. Naturalmente la risposta giace nella "arbitrarietà" degli spostamenti virtuali δOP_i).

2. L'equazione di Lagrange.

Partendo dalla (1.3), svolgendo vari passaggi formali, giungeremo ad un sistema di equazioni (di Lagrange), di notevole interesse. I calcoli, ~~per~~ semplici ma un po' noiosi, dipendono in modo essenziale dal concetto di derivata parziale. Diviene così essenziale capire bene da quali variabili dipende la funzione, e cos'è che si varia nelle derivate e cosa si tiene costante.

Partiamo dalla dipendenza delle posizioni dalle variabili lagrangiane:

$$OP_i = OP_i(q^1, \dots, q^n, t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (2.1)$$

Derivando totalmente rispetto al tempo, cioè considerando anche le variabili lagrangiane q^h funzioni del tempo ($q^h = q^h(t)$), si ~~trova~~ trova la velocità:

$$\underline{v}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \quad . \quad (2.2)$$

Come conseguenza si vede che l'energia cinetica del sistema risulta una funzione quadratica delle \dot{q}^h :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k + \sum_{h=1}^n a_{oh} \dot{q}^h + \frac{1}{2} a_{oo} \quad (2.3)$$

con coefficienti ($a_{hk} = a_{kh}, a_{oh}, a_{oo}$) genericamente dipendenti dalle q^h e da t . Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo gli ultimi due termini scompaiono e si ha:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k \quad (2.4)$$

con a_{hk} indipendenti da t .

Diamo ora al lavoro virtuale di una sollecitazione attiva una forma utile in seguito. Dalla (3.2) e (4.2) del Capitolo precedente si ha:

$$\delta L = \sum_{h=1}^n Q_h \delta q^h \quad (2.5)$$

ove le n quantità

$$Q_h = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i \cdot \frac{\partial O P_i}{\partial q^h} \quad (2.6)$$

vengono chiamate *componenti lagrangiane* della sollecitazione \underline{f}_i . Un caso importante, che comparirà nei nostri futuri esercizi, è il caso in cui le componenti lagrangiane discendono da una funzione U , detta energia potenziale:

$$Q_h = - \frac{\partial U}{\partial q^h} \quad (2.7)$$

Rientra in questa situazione il caso notevole in cui i vincoli sono fissi e le forze \underline{f}_i conservative.

Troviamo ora due identità preliminari, che saranno utili per il calcolo della energia cinetica. Intendiamo ora le varie funzioni in gioco, dipendenti dalle q^h e \dot{q}^h , e quindi le derivate parziali rispetto alla q^h o alla \dot{q}^h , vanno intese variando quella grandezza e tenendo costanti tutte le altre. Dalla (2.2) si ha (semplicemente):

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial O P_i}{\partial \dot{q}^h} \quad , \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial q^h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \quad (2.9)$$

Ne discendono per $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot v_i$ le due identita':

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} = \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^h} = \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \quad (2.11)$$

Da queste si ricavano le identita' fondamentali:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

Siamo ora in grado di arrivare all'equazione di Lagrange.

Imponiamo al sistema di soddisfare l'equazione simbolica (1.3), che rappresenta il moto naturale. Sostituite in tale equazione le (3.2) del Capitolo 2 e tenuta presente la (2.6), si ha:

$$\sum_{h=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q^h} - Q_h \right) \delta q^h = 0 \quad (2.13)$$

per ogni scelta delle δq^h . L'unica possibilita' per ottenere cio' e che si annullino tutti i termini tra parentesi, cioe', tenuto conto della (2.12):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = Q_h \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

Queste equazioni vengono chiamate di Lagrange.

Particolarmente significativo e' il caso in cui la sollecitazione attiva deriva da un potenziale (vedi (2.7)), nel qual caso si puo' introdurre la *funzione di Lagrange* o *lagrangiana*:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \quad (2.15)$$

e scrivere le equazioni di Lagrange nella forma (che useremo nel corso):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} = 0 \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (2.16)$$

Si tratta di un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle $q(t)$. Direttamente non appare in forma normale, cioè con le derivate di ordine massimo a sinistra. Perché ciò appaia, dobbiamo risolvere un semplice sistema algebrico. È possibile farlo subordinatamente alla ipotesi

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^h \partial \dot{q}^k} \right) \neq 0 \quad . \quad (2.17)$$

Nella (2.17) abbiamo scritto L , ma in realtà compare solo l'energia cinetica T , che è, dalla definizione, una forma definita positiva. Questa proprietà garantisce che in tutti i problemi fisici la (2.17) sia verificata.

Dobbiamo completare l'equazione di Lagrange con le condizioni iniziali:

$$q^h(0) = q_o^h \quad ; \quad \dot{q}^h(0) = \dot{q}_o^h \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.18)$$

Il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali ci assicura che, almeno per tempi piccoli, esiste il moto dato dalle (2.16), (2.18) ed è unico. Stime a priori, valide in tutti i casi fisici, ci garantiscono che possiamo estendere la soluzione per tutti i tempi (non indaghiamo in dettaglio questo punto).

Un caso particolare di grande interesse è dato dall'equilibrio. Nel Cap.10 ricorderemo alcune proprietà. Qui vogliamo dimostrare, semplicemente, come avevamo anticipato, il "Principio dei lavori virtuali". Un punto viene detto d'equilibrio, se trovandosi in esso, *con atto di moto nullo, il sistema* vi permane indefinitivamente. Supponiamo ora i vincoli indipendenti dal tempo. Il teorema dei lavori virtuali afferma che si ha equilibrio

quando le componenti lagrangiane Q_h sono nulle. Se le forze discendono da un potenziale si ha equilibrio se

$$\frac{\partial U}{\partial q^h} = 0 \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.19)$$

ovvero se ^{la} ~~il~~ posizione e' di stazionarieta' del potenziale. Ma in tal caso l'equazione di Lagrange ammette la soluzione statica. Poiche' essa e' unica, l'equilibrio permane.

□

3. Esempi.

In questo paragrafo daremo alcune esempi di equazione di Lagrange, poi negli esercizi ne svolgeremo ancora altri. Come in molte cose, solo l'uso fa apprezzare i meriti (e vedere i limiti). In generale sottolineiamo alcuni meriti della equazione di Lagrange (2.16): non compaiono le reazioni vincolari, sono molto adatte a coordinate anche strane, la fisica e' ridotta al calcolo della energia cinetica e potenziale, mentre il resto e' molto automatico. Quest'ultimo e' anche un limite: l'automatismo nasconde un po' la fisica. Inoltre, come vedremo in un esercizio, il metodo di Lagrange puo' essere molto sensibile a sbagli (non errori come approssimazioni, ma veri sbagli) che anche piccoli possono avere effetti clamorosi. Al opposto daremo un esempio in cui il metodo di Lagrange suggerisce semplicemente una grandezza conservata, mentre l'analisi diretta con l'equazioni di Newton e' complicata.

1° esempio - Punto libero descritto in coordinate cartesiane x, y, z e soggetto all'energia potenziale $U(x, y, z)$:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad . \quad (3.1)$$

Le (2.16) danno le ben note equazione del moto:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad . \quad (3.2)$$

2° esempio - Punto libero riferito a coordinate polari piane r, θ e soggetto alla energia potenziale $U(r, \theta)$. Poiche'

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta \quad (3.3)$$

da cui derivando rispetto al tempo:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad ; \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (3.4)$$

e quindi:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \theta) \quad (3.5)$$

Le equazioni di Lagrange danno:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad ; \quad m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

3° esempio. Punto libero in coordinate polari sferiche soggetto ad una energia potenziale $U(r, \phi, \theta)$. Poiche'

$$x = r \cos \phi \sin \theta \quad ; \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad ; \quad z = r \cos \theta \quad (3.7)$$

si ha:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \theta, \phi) \quad (3.8)$$

4° esempio. Pendolo composto



Fig.1

$$d = |OG|$$

$G = \text{baricentro}$

$I = \text{momento di inerzia} ; M = \text{massa totale} ; g = \text{accelerazione di gravita}'$

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + Mgd \cos \theta \quad (3.9)$$

Le equazioni di Lagrange si riducono alla equazione ben nota:

$$I \ddot{\theta} + Mgd \sin \theta = 0 \quad (3.10)$$

4. Grandezze conservate.

Ricordiamo cos'è un integrale primo di una equazione differenziale: è una funzione $\phi(q^1, \dots, q^n, t)$ che risulta identicamente uguale a costante lungo le soluzioni della equazione differenziale. Riferendosi alle equazioni di Lagrange, chiamiamo integrale primo del moto una grandezza conservata lungo il moto. (Non necessario esame) Con questa definizione molto generale per un sistema ad n gradi di libertà vi sono sempre $2n$ integrali primi del moto (per esempio le condizioni iniziali, invertendo il moto stesso). Naturalmente non sappiamo trovarli prima di risolvere le equazioni. Inoltre hanno comportamenti spesso strani. Ma non ci addentriamo su questo punto, rinviando a corsi specifici sulla teoria ergodica ed i sistemi dinamici. (fine non necessario esame). Particolarmente utili sono gli integrali primi non dipendenti dal tempo (cioè in cui $\phi(q^1, \dots, q^n)$) ed a questi ci riferiremo nel corso. Il vantaggio di conoscere una grandezza conservata è di ridurre la complessità delle equazioni differenziali del moto, come avremo occasione di vedere negli esercizi.

Definiamo p_r il *momento cinetico* coniugato alla variabile q^r , che giocherà un ruolo importante in seguito:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} \quad . \quad (4.1)$$

Nel caso di un punto in coordinate cartesiane si ha:

$$p_x = m\dot{x} \quad ; \quad p_y = m\dot{y} \quad ; \quad p_z = m\dot{z} \quad . \quad (4.2)$$

Diamo il seguente Teorema:

”Se L non contiene esplicitamente una certa coordinata lagrangiana q^h , cioè se $\frac{\partial L}{\partial q^h} = 0$ (q^h viene detta anche coordinata ciclica o ignorabile), il momento cinetico coniugato p_h è una costante del moto (ovvero un integrale primo)”:

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} = \text{cost} \quad . \quad (4.3)$$

La dimostrazione di questo teorema e' una immediata conseguenza della h-esima equazione di Lagrange.

Vediamo un paio di esempi di applicazione di questo teorema.

1° esempio - Un punto nello spazio in coordinate cartesiane soggetto ad un potenziale non dipendente da x , $U(y, z)$. Allora:

$$m\dot{x} = cost \quad (4.4)$$

cioe' si conserva la componente lungo x della quantita' di moto. Nel caso di un sistema di punti liberi nello spazio, anche se fra loro interagenti, l'invarianza per traslazione del sistema, da' il classico Teorema del Baricentro. Se il sistema e' vincolato, l'invarianza per traslazione da' origine ad un integrale primo il cui significato puo' essere, oppure no, la quantita' di moto totale del sistema. (Vedremo un esercizio in proposito).

2° esempio - Un punto nel piano in coordinate polari in cui l'energia potenziale dipende solo da r : $U(r)$. Allora la variabile lagrangiana θ e' ciclica e si conserva la grandezza

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (4.4)$$

che possiede il significato di componente lungo z del momento della quantita' di moto rispetto all'origine. Anche in questo caso si puo' svolgere un discorso analogo all'esempio precedente, sostituendo "quantita' di moto" con "momento della quantita' di moto".

Questi due esempi sono casi particolari di un Teorema generale (detto di Noether), che non investigheremo in dettaglio: "Se la lagrangiana L e' invariante per un gruppo continuo di trasformazioni, allora esiste una grandezza conservata". Non discutiamo la dimostrazione. Notiamo solo che essa si basa sulla possibilita' di

scegliere coordinate adattate ai generatori del gruppo.

Diamo una importante definizione.

Chiamiamo *energia generalizzata* la grandezza:

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} \dot{q}^h - L \quad (4.5)$$

Nel caso di un sistema soggetto a vincoli indipendenti dal tempo, l'energia generalizzata si riduce alla energia totale, come si vede usando la (2.4):

$$\mathcal{H} = T + U \quad (4.6)$$

Teorema:

"Se L non contiene esplicitamente il tempo (cioè $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), allora \mathcal{H} è una costante del moto".

Per ottenere la dimostrazione, basta derivare totalmente rispetto al tempo la \mathcal{H} :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{h=1}^n \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} \right) \dot{q}^h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} \ddot{q}^h \right] - \frac{d}{dt} L \quad (4.7)$$

Poiché L è una funzione solo delle q e \dot{q} e non esplicitamente del tempo:

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} \ddot{q}^h \right) \quad (4.8)$$

Sostituendo nella (4.7) ed usando le equazioni di Lagrange (cioè muovendoci lungo il moto) si ottiene:

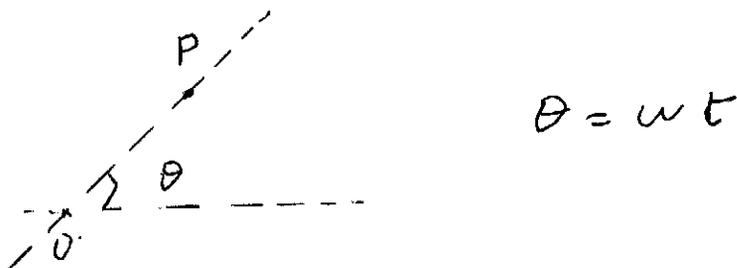
$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \text{cost} \quad (4.9)$$

come volevamo mostrare. \square

Se i vincoli non dipendono dal esplicitamente dal tempo, abbiamo mostrato il classico teorema di conservazione della energia totale. Puo' essere interessante dare un esempio in cui l'energia generalizzata si conserva ed e' diversa da quella totale. (Naturalmente se ci pensate bene, vi accorgete che questi esempi sono molto rari).

Esempio - Problema.

In un piano orizzontale e' posta una guida rettilinea liscia che ruota attorno all'origine O con velocita' angolare costante ω . Sulla guida puo' scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m . Scrivere un integrale primo del moto.



Risoluzione - Per prima cosa, stabiliamo i gradi di liberta'. Basta un parametro per individuare la generica posizione del sistema. Quindi $n = 1$. Scegliamo come variabile lagrangiana l'ascissa $\xi = OP$. Osserviamo che non vi sono forze attive, per cui

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\omega^2) \quad (4.10)$$

Poiche' tale lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, \mathcal{H} , definito dalla (4.5) deve essere un integrale primo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 - \xi^2\omega^2) = cost \quad (4.11)$$

ove la costante viene determinata dalle condizioni iniziali.

Usando le equazioni di Lagrange si vede che il moto ha un punto di equilibrio nell'origine, altrimenti va all'infinito in modo esponenziale.

Ovviamente, l'energia totale e' uguale al L e non si conserva lungo il moto, ma cresce nel tempo, incrementata dal vincolo mobile.

CAP. 4. EQUAZIONI DI HAMILTON

1. Variabili canoniche e spazio delle fasi.

Una qualunque equazione differenziale del *secondo* ordine (ove la funzione incognita e' $y(t)$)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(\frac{dy}{dt}, y, t\right) \quad ((1.1))$$

puo' trasformarsi, in infiniti modi, in un sistema di due equazioni differenziali del *primo* ordine. Basta, per esempio, introdurre come seconda funzione incognita, accanto alla $y(t)$, la sua derivata, ponendo

$$u(t) = \frac{dy}{dt} \quad (1.2)$$

e l'equazione (1.1) diventa equivalente al sistema di due equazioni:

$$\frac{dy}{dt} = u(t) \quad ; \quad \frac{du}{dt} = f(u, y, t) \quad (1.3)$$

nelle due funzioni incognite $y(t)$, $u(t)$.

Naturalmente anche le equazioni di Lagrange da un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine possono essere ricondotte ad un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine. Qui vogliamo svolgere questo procedimento in un modo accorto, apparentemente un po' complicato, ma foriero di molto importanti proprieta', che vedremo nello svolgimento del corso. Il metodo che seguiremo in matematica e' molto generale (viene chiamato *trasformazione di Legendre*), e

trova applicazione in altri campi della fisica, come la termodinamica. Qui però noi lo introduciamo ad hoc per i nostri scopi.

Incominciamo con il ricordare la definizione degli n momenti cinetici coniugati alle variabili q^h :

$$p_h = \frac{\partial L(q|\dot{q}|t)}{\partial \dot{q}^h} \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (1.4)$$

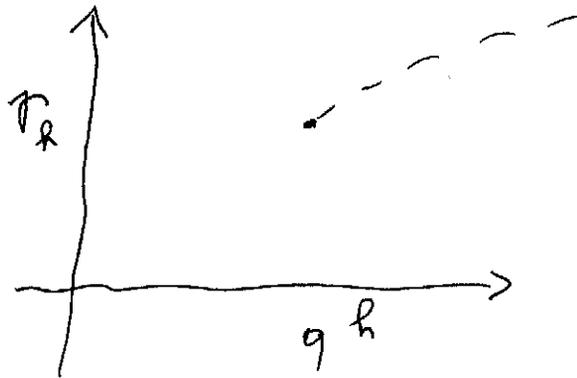
La (2.17) del capitolo precedente, ci garantisce che possiamo risolvere le (1.4) rispetto alle \dot{q}^h :

$$\dot{q}^h = f^h(q|q, t) \quad . \quad (1.5)$$

Lo stato dinamico del sistema fisico (posizione + atto di moto) può essere individuato o dalle $2n$ variabili $\{q^h, \dot{q}^h\}$ o dalle $2n$ variabili $\{q^h, p_h\}$. Queste ultime si chiamano *variabili hamiltoniane* o *canoniche*.

Queste variabili permettono di introdurre un utile spazio a $2n$ dimensioni, Γ^{2n} , chiamato spazio delle fasi, in cui le variabili q^h e p_h formano gli assi di questo spazio per ora di punti. (Accenneremo più in là come si possa introdurre una struttura, detta *simplettica*, in questo spazio e poi come possa diventare uno spazio di misura).

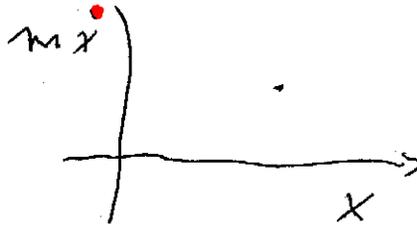
Fig.1



Poiché un punto in tale spazio rappresenta uno stato del sistema, il moto è rappresentato da una curva in tale spazio. Studieremo in dettaglio un esempio

importante alla fine del capitolo. Qui osserviamo soltanto che nel caso di un punto in una dimensione, descritto con una coordinata cartesiana, lo spazio delle fasi assume la forma semplice:

Fig.2



2. Equazioni canoniche dette anche di Hamilton.

Ogni grandezza che sia funzione delle q, \dot{q}, t puo' essere espressa, tramite le (1.5), nelle q, p, t . Questa nuova funzione (espressione canonica della grandezza in questione), verra' indicata con la stessa lettera scritta in un altro carattere. Grande importanza ha l'espressione canonica della energia generalizzata \mathcal{H} definita nel Capitolo precedente, che qui riportiamo:

$$H(q|p|t) = \mathcal{H}(q^h, f^h(q|p|t), t) = \sum_{h=1}^n p_h f^h(q|p|t) - L(q^h, f^h(q|p|t), t) \quad (2.1)$$

Usando la funzione H , chiamata Hamiltoniana del sistema fisico, si possono trovare, semplicemente, delle identita', che a loro volta permettono di arrivare alle equazioni canoniche (dette anche di Hamilton).

Dalla (2.1), si ottiene la prima identita':

$$\frac{\partial H}{\partial q^h} = \sum_{r=1}^n p_r \frac{\partial f^r}{\partial q^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} - \sum_{r=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} \frac{\partial f^r}{\partial q^h} = - \frac{\partial L}{\partial q^h} \quad (2.2)$$

(Notate il ruolo essenziale della definizione di derivata parziale, per la quale qui p_h e' indipendente da ogni q^r).

In modo analogo si riconosce le altre identità:

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = f^h(q|p|t) \quad . \quad (2.3)$$

Sostituendo la (1.5) nella (2.3) ed usando le equazione di Lagrange nella (2.1), si hanno le seguenti equazioni, dette *canoniche* o di *Hamilton*:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad ; \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (2.4)$$

Questo sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, e' completamente equivalente alle equazioni di Lagrange. Mentre nel caso lagrangiano tutta la realta' fisica del sistema era compendiata in una unica funzione, L , analogamente nelle equazioni di Hamilton tutta la fisica e' compendiata in una unica funzione, la hamiltoniana H .

Daremo qualche esempio di passaggio dal punto di vista lagrangiano a quello hamiltoniano, (cioe' dalle equazioni di Lagrange a quella di Hamilton). Ma prima voglio spendere due parole sui vantaggi (e limiti) del nuovo metodo. Diro' subito che non e' un metodo pratico che useremo negli esercizi, anche se in alcuni sviluppi della meccanica analitica puo' avere delle utilizzazioni concrete. E' essenzialmente un passo per la costruzione di una teoria astratta e molto generale, ricca di proprieta' e che abbraccia fenomeni molto diversi. Ne sarete convinti dopo i Capitoli successivi (almeno spero!). In realta' cercare di vedere i problemi da punti di vista differenti e' un metodo generale nella scienza, perche' puo' suggerire soluzioni e soprattutto generalizzazioni a teorie piu estese o legami con teorie diverse. Un esempio lo vedremo parlando dei legami fra meccanica ed ottica.

In generale un sistema di equazioni differenziali come la (2.4), cioe' in cui le equazioni di evoluzione sono della forma (2.4) con una opportuna H , viene detto "hamiltoniano". Esso puo' avere una origine molto differente dalla legge di Newton,

puo' anche nascere in campi diversi della scienza, le variabili coniugate (p, q) possono non avere niente a che vedere con posizione/velocita' o angolo/momento della quantita' di moto. L'interessante e' che i risultati possono essere riletti e previsti anche ~~alla~~ in base alle considerazioni meccaniche che stiamo svolgendo in questo corso. Daro' due esempi (6° e 7°) tratti dalla dinamica delle popolazioni e dalla meccanica dei fluidi. Non sono necessari per l'esame, ma vi suggerisco di darci una rapida occhiata. almeno per curiosita'.

1° esempio. Un punto libero unidimensionale in coordinate cartesiane e soggetto al potenziale $U(x)$:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \quad (2.5)$$

da cui

$$p_x = m\dot{x} \quad (2.6)$$

L'energia generalizzata e' l'energia totale:

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad (2.7)$$

da cui

$$H(x, p_x) = \frac{\dot{p}_x^2}{2m} + U(x) \quad (2.8)$$

E' immediato verificare che le equazioni di Hamilton danno le equazioni del moto.

2° esempio. Punto libero nel piano descritto in coordinate polari piane e soggetto un una energia potenziale $U(r, \theta)$.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r, \theta) \quad (2.9)$$

da cui

$$p_r = m\dot{r} \quad ; \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (2.10)$$

e

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r, \theta) \quad (2.11)$$

Le equazioni del moto si ottengono facilmente.

Altri esempi verranno mostrati nel paragrafo 4.

Il passaggio dalle \dot{q} ai momenti cinetici p non presenta difficoltà concettuali. Si tratta di invertire una matrice algebrica. Vi sono metodi per rendere rapido il calcolo, ma non li discutiamo, perché l'argomento ci interessa per ragioni concettuali, non per fini pratici.

3. Integrali primi tipici.

Valgono i due seguenti Teoremi (simili a teoremi analoghi già incontrati nello studio dell'equazione di Lagrange):

Teorema 3.1:

”Se H non contiene esplicitamente una q^h , allora il momento cinetico coniugato p_h è una costante del moto.”

La dimostrazione segue immediatamente dalla applicazione delle equazioni di Hamilton (2.4). \square

Teorema 3.2:

” Se H non contiene esplicitamente il tempo t (cioè si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) allora la H medesima è un costante del moto.”

Per la dimostrazione basta svolgere la derivata totale di H rispetto al tempo, usare le equazione di Hamilton (2.4), sostituendo \dot{q}^h con $\frac{\partial H}{\partial p_h}$, \dot{p}_h con $-\frac{\partial H}{\partial q^h}$, ed infine verificare che la derivata risulta nulla ~~non~~ lungo il moto:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

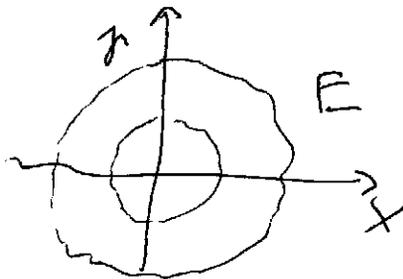
□

4. Esempi.

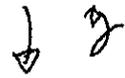
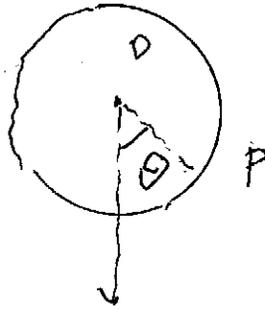
3° esempio. Oscillatore armonico. Consideriamo un punto materiale unidimensionale soggetto ad una forza $-kx$. Allora:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad . \quad (4.1)$$

Nello spazio della fasi le traiettorie sono ellissi centrate nell'origine: *(variano a seconda di $H = E$)*



4° esempio. Pendolo semplice. Consideriamo un punto materiale pesante P di massa m che si muova senza attrito lungo una circonferenza di centro O e raggio L posta in un piano verticale. Sia θ l'angolo fra OP e la verticale discendente e g l'accelerazione di gravità' (vedi figura).



Si ha:

$$L = \frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2 - mgL(1 - \cos \theta) \quad (4.2)$$

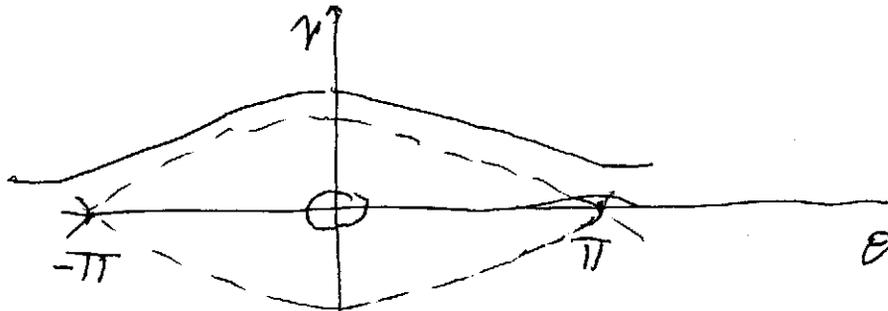
da cui

$$p = mL^2 \dot{\theta} \quad (4.3)$$

e

$$H = \frac{1}{2mL^2}p^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (4.4)$$

Nello spazio delle fasi traiettorie del moto appaiono:



La forma delle traiettorie è determinata dal valore di

~~La legge di percorrenza è data dal fatto che~~ $H = cost = E$. Per $E = 0$ il pendolo permane indefinitamente nella posizione piu' bassa (quindi di equilibrio), poi per E piccoli, cioe' per dati iniziali per cui $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ sono piccoli, il sistema compie una curva chiusa attorno all'origine. Il moto e' quindi periodico e $\theta = 0$ e' un punto di equilibrio stabile (la nozione di stabilita' e' ricordata nel Cap. 10). Aumentiamo

il valore di E il moto rimane sempre periodico con un periodo τ via via sempre crescente, di facile calcolo, poiché dalla costanza della H lungo il moto si ha:

$$d\tau = \pm \frac{L d\theta}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - mgL(1 - \cos\theta)]}} \quad (4.5)$$

da cui per $E < 2mgL$ si ha

$$\tau = 2 \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{L d\theta}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - mgL(1 - \cos\theta)]}} \quad (4.6)$$

dove θ_- e θ_+ sono i valori minimo e massimo di θ (punti di inversione del moto)
 Per $E = 2mgL$ il moto tende alla posizione più alta in un tempo infinito (e si osserva che il punto $\theta = \pi$ è di equilibrio instabile). Per valori maggiori di E il moto cessa di essere periodico e si hanno infiniti passaggi per il punto $\theta = \pi$.

5° esempio. Punto materiale nello spazio con coordinate polari sferiche.

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + U(r, \theta) \quad (4.7)$$

(Non necessario esame) Diamo ora due esempi di sistemi hamiltoniani non tratti dalle leggi di Newton.

6° esempio. Il modello preda-predatore.

Vediamo qui un celebre modellino (dovuto a Lotka e Volterra), che riesce a mettere in equazioni differenziali (abbastanza semplici) la relazione fra prede e predatori. Fra l'altro questo modello è sorto dalla osservazione sperimentale sull'andamento periodico del mercato del pesce di Ancona.

Consideriamo il sistema composto di due popolazioni ed indichiamo con C il numero delle prede (conigli) e con V il numero dei predatori (volpi). L'evoluzione di questi due grandezze e' data dal sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{C} = \alpha C - \beta C V \quad (4.9)$$

$$\dot{V} = -\gamma V + \delta C V \quad (4.10)$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali positivi. Possiamo notare che in assenza di volpi i conigli crescerebbero esponenzialmente, mentre in assenza di conigli le volpi si estinguerebbero esponenzialmente. I termini nonlineari modellano l'interazione fra le due specie. In particolare il termine $\beta C V$ ci dice che la probabilita' che un coniglio muoia e' proporzionale al numero di volpi, mentre il termine $\delta C V$ ci dice che la probabilita' che una volpe si riproduca e' proporzionale al numero dei conigli.

Vogliamo mostrare che il sistema (4.9),(4.10) ammette un integrale primo del moto .

Dividendo la (4.9) per C e la (4.10) per V e ponendo $x = \log C$, $y = \log V$, si ottiene:

$$\dot{x} = \alpha - \beta e^y \quad (4.11)$$

$$\dot{y} = -\gamma + \delta e^x \quad (4.12)$$

Dato che la \dot{x} non dipende da x e \dot{y} non dipende da y , possiamo cercare di scrivere le equazioni (4.11),(4.12) nella forma

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.13)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.14)$$

dove H e' la somma di una funzione di x ed una di y . Abbiamo posto il nostro sistema sotto forma di equazioni canoniche, dove le variabili coniugate, che fanno

impulso

il ruolo di posizione e ~~velocità~~ nei sistemi meccanici, sono il numero delle volpi e dei conigli! Aver messo il sistema di equazioni in forma hamiltoniana ci permette di usufruire della ricca teoria già nota per tali sistemi.

Si può verificare che, a meno di una costante additiva inessenziale nel seguito, H è della forma:

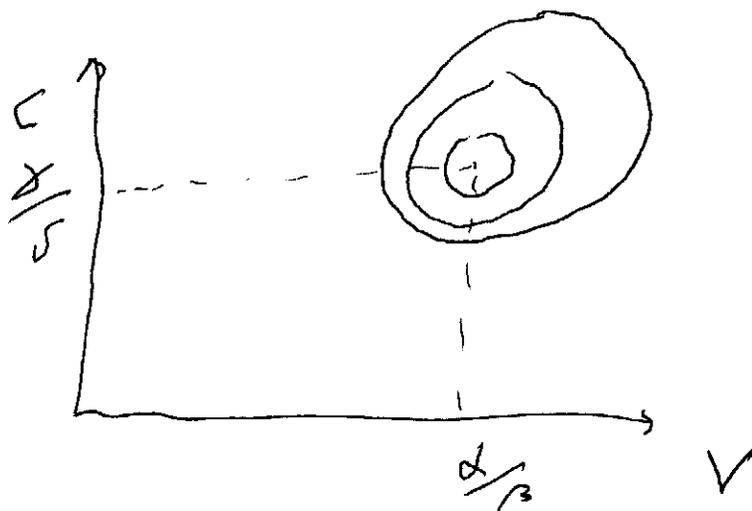
$$H = \delta e^x - \gamma x + \beta e^y - \alpha y \quad (4.15)$$

Poiché H non dipende esplicitamente dal tempo, è l'integrale primo cercato.

Ritornando ora alle variabili di partenza C, V , l'integrale primo si scrive:

$$H = \delta C - \gamma \log C + \beta V - \alpha \log V = \text{costante} \quad (4.16)$$

Il moto quindi percorre le linee di livello (4.16). Esse nel piano C, V appaiono :



Dalle (4.9), (4.10) si vede bene che vi è un punto di equilibrio quando

$$V = \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad C = \frac{\gamma}{\delta} \quad (4.17)$$

Studiando l'integrale primo (4.16) attorno a tale punto, si vede che l'equilibrio è stabile e quindi piccole perturbazioni danno piccoli moti; inoltre tutti ^(i moti) sono periodici con una ampiezza che cresce allontanandosi dall'equilibrio.

Questo fenomeno oscillatorio e' assai interessante e nasce da un ritardo tra l'evoluzione dei conigli e delle volpi. Per esempio le volpi crescono, allora i conigli diminuiscono per la caccia che subiscono, ma allora molte volpi muoiono di fame per la difficolta' di reperire il cibo. Di conseguenza i conigli, soggetti a minore pressione dalle volpi, crescono, trascinando una crescita del cibo e quindi delle volpi stesse, e cosi' via.

Puo' essere interessante vedere quanto valga il numero medio delle volpi e dei conigli. Ovviamente all'equilibrio esso e' fissato a $C = \gamma/\delta$ e $V = \alpha/\beta$. Negli altri casi lo si puo' dedurre facilmente. La (4.9), che divisa per C da':

$$d(\log C) = (\alpha - \beta V) dt \quad (4.18)$$

cioe', integrando dal valore iniziale $C(t_0)$ a quello generico, si ottiene:

$$\log \frac{C(t)}{C(t_0)} = \alpha(t - t_0) - \beta \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

Poiche' il moto e' periodico, chiamando T il periodo, ed usando la (4.19) e il fatto che $C(t_0 + T) = C(t_0)$, si ottiene:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V(\tau) d\tau = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.20)$$

La stessa cosa vale per la media dei conigli. Cioe' abbiamo dimostrato che le due medie non dipendono dalle condizioni iniziali, ma le oscillazioni delle popolazioni in media si compensano, dando sempre lo stesso valore.

La realta' ci fornisce moltissimi esempi di ecosistemi con due specie strettamente connesse e che si evolvono approssimativamente nel modo ora descritto.

Giusto come curiosita' per completare un po' l'argomento, ammettiamo ora di voler intervenire su questo equilibrio naturale per deprimere una delle due specie. Facciamo un esempio concreto e realistico: le prede sia date da un parassita della

frutta, che il contadino vuol diminuire, ed i predatori da un insetto che mangia ~~il predatore~~ ^{le prede} e per il resto e' innocuo. Un metodo classico (e spesso per fortuna vecchio), consiste nel cospargere il frutteto con insetticidi, che hanno l'effetto di uccidere sia le prede sia i predatori. Possiamo modellizzare la nuova situazione con il sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{C} = \alpha C - \beta C V - \mu C \quad (4.21)$$

$$\dot{V} = -\gamma V + \delta C V - \mu V \quad (4.22)$$

ove $\mu > 0$, esprime l'effetto dell'insetticida. Siamo ricondotti al caso precedente, sostituendo α con $\alpha - \mu$ e γ con $\gamma + \mu$. L'equilibrio si ha per

$$C = \frac{\gamma + \mu}{\delta} \quad (4.23)$$

da cui si vede che l'insetticida ha come effetto di aumentare i parassiti! (D'altra parte una osservazione analoga era stata proprio alla base del modello, quando si era osservato che la diminuzione della pesca nel Mar Adriatico dovuta alla prima guerra mondiale, aveva anche, sorprendentemente, diminuito la resa del pescato di una singola barca.) Naturalmente il contadino puo' mettere tanto di quell'insetticida da smorzare sul nascere le oscillazioni preda-predatore, ma l'uso massiccio di fitofarmici non e' proprio consigliato per la salute umana!

Attualmente varii coltivatori della frutta usano insetticidi naturali, cospargendo i frutteti con insetti predatori in gran numero. Essi mangiano tutte le prede (prima che le oscillazioni preda-predatore avvengano) e poi scompaiono per fame.

Concludiamo l'esempio, ponendoci ora il problema su cosa succeda in presenza di un secondo predatore L (lupi) in concorrenza con le volpi nel mangiare i conigli, ma senza altre interazioni fra i due. A titolo di esempio, anche se non realistico,

assumiamo che le due specie abbiano la stessa efficienza nella caccia e nella riproduzione, ma i lupi abbiano una differente mortalita' spontanea γ' . Le equazioni del modello diventano:

$$\dot{C} = \alpha C - \beta (C V + C L) \quad (4.24)$$

$$\dot{V} = -\gamma V + \delta C V \quad (4.25)$$

$$\dot{L} = -\gamma' L + \delta C L \quad (4.26)$$

Si vede che se $\gamma' > \gamma$ (cioe' se i lupi hanno una mortalita' piu' alta delle volpi) i lupi si estinguono rapidamente nel tempo (esponenzialmente).

E' un fatto quindi, che nella competizione per la vita non possono esistere a lungo due specie in gara fra loro, ma quella piu' avvantaggiata distrugge (involontariamente) l'altra. Per evitare di estinguersi, le specie che vediamo hanno scelto una loro "nicchia ecologica", cioe' un habitat fisico e delle abitudini alimentari, nella quale abbiano poco concorrenza. Quando questa "nicchia" viene violata, per esempio con l'arrivo di nuovi animali in una regione isolata, l'effetto puo' essere catastrofico.

Naturalmente un realistico studio della dinamica delle popolazioni dovrebbe tener conto anche di altri fattori, che possono essere molto importanti, perche' l'ecologia e' una realta' estremamente piu' complessa, con una interazione complicata di molte specie, che non e' per niente facile modellizzare realisticamente. Bisognerebbe tener conto anche di altri fenomeni interessanti, e spesso fra loro correlati, come le migrazioni, le fluttuazioni stocastiche, i ritardi, la dipendenza spaziale, la dipendenza dall'eta', ecc. ecc. ma qui volevo solo mostrare come i metodi introdotti in questo corso possono essere utili anche in contesti differenti dalla fisica.

7° esempio. Vortici puntiformi piani.

Supponiamo di avere un fluido incompressibile, non viscoso, per esempio l'acqua nella quale si trascuri la viscosità. Ammettiamo di essere o a tre dimensioni con una simmetria piana o direttamente a due dimensioni (per esempio in un lago poco profondo). Supponiamo di avere N vortici di intensità a_i , la cui vorticità sia inizialmente molto concentrata in N punti $(x_i(0), y_i(0))$. Lasciamoli evolvere secondo le equazioni del moto di un tale fluido, che qui ovviamente non scriviamo né discutiamo. Si può dimostrare in modo formalmente ragionevole, ma rigorosamente complicato, che i vortici rimangono puntiformi, concentrati nei punti $(x_i(t), y_i(t))$ definiti dal seguente sistema di equazioni:

$$a_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} ; \quad a_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (4.27)$$

ove

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N a_i a_j \log[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \quad (4.28)$$

Con una scelta opportuna delle coordinate coniugate, questo sistema ha forma hamiltoniana. Infatti scelte come primo gruppo di variabili le grandezze $\sqrt{|a_i|}x_i$, e come variabili coniugate le $\sqrt{|a_i|}y_i$, le equazioni diventano le equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H . Possiamo applicare a questo sistema tutta la tecnologia che stiamo studiando per i sistemi hamiltoniani.

Osservate che le variabili coniugate, altre volte posizione e ~~velocità~~ ^{impulso}, qui diventano ascissa ed ordinata!

(fine non necessario esame).

1. Definizione e proprieta'.

Definiamo parentesi di Poisson delle due funzioni $f(q|p|t)$, $g(q|p|t)$ la seguente espressione:

$$[f, g] = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q^h} \right) \quad (1.1)$$

Valgono le seguenti proprieta' d'immediata verifica:

a) *Antisimmetria*:

$$[f, g] = -[g, f] \quad (1.2)$$

b) *Bilinearita'*:

$$[\alpha f, g] = \alpha [f, g] ; [f, \alpha g] = \alpha [f, g] ; \alpha = cost$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] ; [f, g_1 + g_2] = [f, g_1] + [f, g_2] \quad (1.3)$$

c) *Identita' ciclica di Jacobi*:

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0 \quad (1.4)$$

Sottolineamo queste proprieta' perche' non solo valgono, ma anche servono ad una caratterizzazione delle parentesi di Poisson. E' un po' come avete studiato nel caso dello spazio vettoriale: i vettori, intesi come segmenti orientati nello spazio tridimensionale, godono di 10 proprieta' di immediata verifica; ogni spazio che soddisfi queste proprieta' viene chiamato vettoriale. Per esempio le funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ formano uno spazio vettoriale, a cui si puo' dare una struttura euclidea introducendo il prodotto scalare (e quindi gli angoli) tramite un opportuno integrale, ecc.ecc.

Lo spazio delle fasi con una struttura data dalle parentesi di Poisson viene chiamato spazio simplettico. Non investighiamo questo argomento.

Vediamo ora il caso particolare delle cosiddette parentesi di Poisson fondamentali, la cui verifica discende immediatamente dalla definizione:

$$[q^h, q^k] = 0 \quad ; \quad [p_h, p_k] = 0 \quad ; \quad [q^h, p_k] = \delta_k^h \quad (1.5)$$

ove, per definizione, $\delta_k^h = 0$ se $h \neq k$, $= 1$ se $h = k$.

Vedremo piu' in la' un uso di questa relazione. In realta' il suo significato piu' profondo sta' in una profonda analogia fra le parentesi di Poisson ed una grandezza in Meccanica Quantistica che vedrete in corsi successivi, i commutatori. In questa caso l'analogo della (1.5) sara' il celebre "Principio di indeterminazione" (o di Heisenberg).

Le parentesi di Poisson possono essere usate per scrivere in forma piu' compatta (ed apparentemente simmetrica rispetto allo scambio delle variabili coniugate) le equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}^h = [q^h, H] \quad ; \quad \dot{p}_h = [p_h, H] \quad (1.6)$$

Se ne trae che per una generica grandezza $X(p|q|t)$:

$$\dot{X}(p|q|t) = [X, H] + \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.7)$$

Dalla (1.7) consegue immediatamente il seguente

Teorema 1

"Condizione necessaria e sufficiente perche' una grandezza $X(p|q|t)$ sia una costante del moto e' che $[X, H] + \frac{\partial X}{\partial t} = 0$."

Segue come

Corollario:

”Condizione necessaria e sufficiente perche’ una grandezza X , funzione solo di q e p (e non di t), sia una costante del moto e’ che $[X, H] = 0$.”

Vale anche il seguente

Teorema 2 (Poisson)

”Se due grandezze $X(p|q|t)$, $Y(p|q|t)$ sono costanti del moto, allora anche $[X, Y]$ e’ una costante del moto.”

La dimostrazione segue immediatamente dal teorema precedente e dalla identita’ di Jacobi applicata alle funzioni X, Y, H .

Il teorema di Poisson consente talora di ricavare un nuovo integrale primo da altri gia’ noti. Non sempre, tuttavia il risultato e’ significativo, potendo essere o banale (per esempio lo zero) o dipendente dagli integrali primi gia’ noti.

Come esempio se $\underline{l} = (l_x, l_y, l_z)$ e’ il momento angolare di un punto materiale si riconosce facilmente che

$$l_z = [l_x, l_y] \quad (1.8)$$

Ne segue che se l_x ed l_y sono costanti del moto, allora anche l_z e’ una costante del moto.

2. Grandezze compatibili.

Per definizione, due grandezze X e Y sono dette *compatibili* se la loro parentesi di Poisson e’ nulla, cioe’ $[X, Y] = 0$. (Vedrete nei corsi successivi che l’analogo di questa proprieta’ in Meccanica Quantistica, sara’ la possibilita’ di eseguire una simultanea misura fisica delle due grandezze).

Questa proprieta’ di compatibilita’ puo’ verificarsi in situazioni tra loro molto diverse, o quando le due grandezze non presentano fra loro alcun legame o quando l’una e’ una funzione univoca dell’altra. Valgono infatti i seguenti teoremi la cui

dimostrazione e' una immediata conseguenza della definizione di parentesi di Poisson:

Teorema 1

"Date due grandezze X e Y ciascuna non contenente le variabili coniugate delle variabili contenute nell'altra, la loro parentesi di Poisson e' nulla."

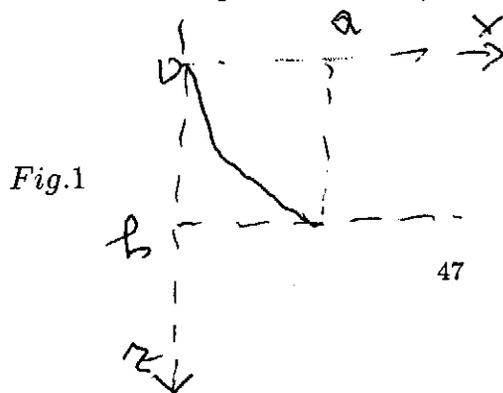
Teorema 2

"Se due funzioni $X(p|q|t)$, $Y(p|q|t)$ sono funzioni dipendenti fra loro (cioe' $Y = \phi(X)$) allora la loro parentesi di Poisson e' identicamente nulla."

CAP. 6. I PRINCIPI VARIAZIONALI

1. Premessa.

Partiamo da un esempio concreto. Consideriamo un punto materiale pesante di massa m che si muove in un piano verticale con assi cartesiani Oxz , z verticale discendente, ed e' obbligato a scorrere lungo una guida liscia di equazione $z = z(x)$. Inizialmente e' fermo nell'origine e sotto l'azione della forza gravitazionale mg arriva al tempo T nel punto $P = (a, h)$, ($a, h > 0$). Ci domandiamo quale sia la forma della curva $z = z(x)$ per la quale T e' minimo. Il problema corrisponde al gioco per ragazzi dello scivolo (depauperato di alcuni requisiti di sicurezza e comodita', come la richiesta di una partenza dolce).



$$; T = \int ds \frac{1}{v(x)} \quad (1.1)$$

Usando la conservazione dell'energia si ha: $v(x) = \sqrt{2g z(x)}$. Dal legame geometrico tra l'ascissa curvilinea s ed x dato dal teorema di Pitagora: $ds = dx \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}$ si ha;

$$T = \int_0^a dx \sqrt{\frac{1 + (\frac{dz}{dx})^2}{2g z(x)}} \quad (1.2)$$

Se ci pensate un attimo cercare, a mano, il minimo di questa funzione non e' per niente banale. Si potrebbe provare a fare una guida verticale fino alla quota h e poi orizzontale. In questa situazione il punto raggiunge la massima velocita' piu' rapidamente possibile, ma il cammino risulta lungo. Viceversa se il cammino viene scelto piu' corto possibile, cioe' una retta passante per l'origine ed il punto P e' la velocita' a crescere lentamente. Abbiamo introdotto il classico problema della "brachistocrona". Vedremo piu' in la' la sua soluzione. Per ora osserviamo soltanto che il problema e' una generalizzazione della ricerca del minimo di una funzione di N variabili, che avete gia' studiato in analisi. Qui abbiamo una grandezza, T , che e' una funzione di una funzione di $z(x)$.

Cerchiamo di generalizzare questo esempio in un contesto piu' ampio.

2. Funzionale e sua variazione prima.

Sia $L(q, q', t)$ una funzione $\in C^2$, (cioe' continua con le derivate prime e seconde continue), dei suoi tre argomenti. Considerata una generica funzione $q(t) \in C^2$ in (a, b) , la sostituzione di $q(t)$ in L in luogo di q e della sua derivata prima \dot{q} in luogo di q' da' luogo ad una funzione della sola variabile t . Ha senso allora l'integrale:

$$\mathcal{I}[q] = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.1)$$

il cui valore numerico discende dalla funzione $q(t)$ da noi scelta. Tale grandezza viene chiamato anche *funzionale* della funzione indipendente $q(t)$. (In altri termini si puo' vedere che le funzioni formano uno spazio vettoriale ed un "funzionale" non e' altro che una funzione su tale spazio).

Restringiamo la scelta delle funzioni $q(t) \in C^2$ a quelle che assumono un determinato valore A in a ed un valore pure determinato B in b .

Fatta una particolare scelta $\bar{q}(t)$, scegliamo una seconda funzione *infinitamente prossima*

$$q(t) = \bar{q}(t) + \alpha \eta(t) \quad (2.2)$$

ove $\eta(t)$ e' una qualunque funzione di classe C^2 nulla in a e b ed α e' un parametro numerico infinitesimo.

Spesso si pone

$$\delta q(t) = \alpha \eta(t) \quad (2.3)$$

chiamando $\delta q(t)$ *variazione prima* della funzione indipendente $q(t)$.

In corrispondenza della funzione (2.2), fissata la $\eta(t)$ in modo arbitrario, $\mathcal{I}[q]$ si presenta come una funzione del parametro α :

$$\mathcal{I}(\alpha) = \int_a^b L(\bar{q}(t) + \alpha \eta(t), \dot{\bar{q}}(t) + \alpha \dot{\eta}(t), t) dt \quad (2.4)$$

ed il suo valore per $\alpha = 0$ e' $\mathcal{I}[\bar{q}]$.

Chiamiamo *variazione prima* di $\mathcal{I}[\bar{q}]$ e la indichiamo con $\delta\mathcal{I}$, il differenziale:

$$\delta\mathcal{I} = \alpha \left(\frac{d\mathcal{I}}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \quad (2.5)$$

Essa rappresenta la parte principale dell'incremento che $\mathcal{I}[q]$ subisce nel passaggio dalla funzione indipendente da $\bar{q}(t)$ a $\bar{q}(t) + \delta q(t)$.

Per il calcolo effettivo di $\delta\mathcal{I}$, basta partire dalla (2.4) e fare le operazioni indicate in (2.5). Si ha:

$$\delta\mathcal{I} = \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt \quad (2.6)$$

e con una integrazione per parti

$$\delta\mathcal{I} = \left[\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta \right]_a^b + \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt \quad (2.7)$$

Infine, essendo $\eta(a) = \eta(b) = 0$, il primo termine del secondo membro scompare e si ha:

$$\delta\mathcal{I} = \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt \quad (2.8)$$

Useremo questa espressione tra poco; permettetemi ora di introdurre un Lemma, di cui faremo uso tra poco.

3. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

Sia $\Phi(t)$ una funzione continua in (a, b) ; e sia $\eta(t)$ una funzione $\in C^2$ definita nello stesso intervallo e *nulla agli estremi*.

Il Lemma dice:

”Condizione necessaria e sufficiente perche’ sia

$$\int_a^b \Phi(t) \eta(t) dt = 0$$

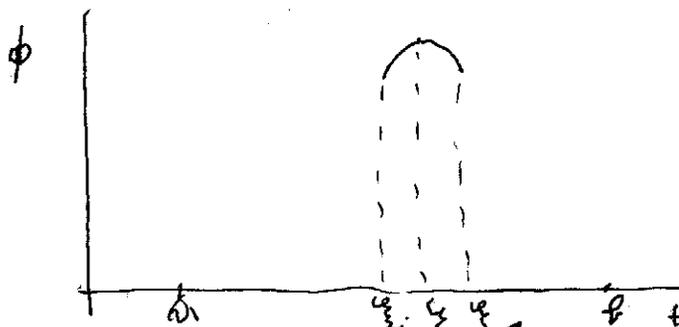
per ogni scelta della funzione $\eta(t) \in C^2$ e nulla agli estremi, e’ che sia $\Phi(t) = 0$ in tutto l’intervallo (a, b) .”

Dimostrazione. La sufficienza e’ banale. La necessita’ si prova per assurdo. Se in un punto $\bar{\xi}$ fosse per esempio $\Phi(\bar{\xi}) > 0$, sarebbe $\Phi(t) > 0$ in tutto un intorno di

$\bar{\xi}$, (ξ_1, ξ_2) strettamente contenuto in (a, b) (cio' essendo la funzione Φ continua: si chiama teorema della permanenza del segno). Scelta allora:

$$\eta(t) = 0 \text{ se } a \leq t \leq \xi_1 ; = (t-\xi_1)^m (\xi_2-t)^m \text{ se } \xi_1 \leq t \leq \xi_2 ; = 0 \text{ se } \xi_2 \leq t \leq b \quad (3.1)$$

con $(m > 2)$ perche' sia di classe C^2 .



Tale funzione soddisfa alle ipotesi volute ed, evidentemente, l'integrale e' diverso da zero. Siamo arrivati cosi' ad un assurdo.

Il Lemma si estende in via naturale a piu' funzioni:

"Condizione necessaria e sufficiente perche' sia

$$\int_a^b [\Phi_1(t) \eta_1(t) + \dots + \Phi_h(t) \eta_h(t) \dots + \Phi_n(t) \eta_n(t)] dt = 0$$

per ogni scelta delle $\eta_h \in C^2$ nulle agli estremi, e che tutte le $\Phi_h(t)$, supposte continue, si annullino identicamente nell'intervallo (a, b) .

Osservate che il teorema vale qualunque sia la regolarita' di η ; l'abbiamo scelta di classe C^2 , perche' cosi' ci serve nel seguito. Notiamo inoltre che questo Lemma e' usato non solo qui, ma in tante altre parti della fisica teorica.

4. Stazionarietà ed equazioni di Eulero.

Si dice che $\mathcal{I}[q]$ è *stazionario* in corrispondenza ad una certa funzione $q(t)$ se

$$\delta\mathcal{I} = 0 \quad (4.1)$$

per ogni variazione C^2 della funzione $q(t)$ nulla agli estremi.

Si può trovare una condizione sulla $q(t)$ perché renda stazionario un funzionale dato. Infatti, dalla espressione (2.8), usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, si ottiene che

Condizione Necessaria e Sufficiente per rendere stazionario il funzionale \mathcal{I} , è che la $q(t)$ soddisfi all'equazione:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (4.2)$$

Tale equazione viene detta di *Eulero* (o talvolta di Eulero-Lagrange) associata alla equazione variazionale (4.1). È una equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita $q(t)$, la cui soluzione è univocamente determinata non appena si tenga conto delle condizioni prefissate agli estremi

$$q(a) = A \quad ; \quad q(b) = B \quad (4.3)$$

(Non necessario esame) Questo problema differenziale è un po' diverso da quello che abbiamo incontrato all'inizio del corso, alla base stessa delle equazioni di Newton. Lì la soluzione era determinata dal valore in un punto di ~~lei~~ e della sua derivata prima (il cosiddetto problema di Cauchy). Qui invece diamo il valore al bordo della funzione (problema chiamato in alcuni contesti di Dirichlet). Mentre nel primo caso la soluzione, almeno per piccoli t c'è sempre, qui l'esistenza va presa con cautela, come potrete rendervene conto, quando, fra poco, vedremo il significato fisico di questo metodo variazionale. (Fine non necessario esame).

La ricerca delle funzioni che rendono stazionario $\mathcal{I}[q]$ e' un passo preliminare al problema, piu' complesso, di ricercare le eventuali funzioni che rendono minimo o massimo il funzionale stesso (in stretta analogia con il caso di una funzione di n variabili: per cercare il minimo di una funzione a piu' variabili, prima cerchiamo i punti di stazionarieta' e poi studiamo le derivate ulteriori. Qui prima studiamo la variazione prima, e poi eventualmente quelle ulteriori).. Questo problema di ricerca dei minimi, che e' il problema fondamentale del "Calcolo delle Variazioni", esce dal quadro di questo corso. A noi basta il concetto di stazionarieta'.

Le considerazioni precedenti si estendono subito a funzionali dipendenti da piu' funzioni indipendenti del tipo:

$$\mathcal{I}[q^1, \dots, q^n] = \int_a^b L(q^1(t), \dot{q}^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^n(t), t) dt \quad (4.4)$$

per il quale la condizione di stazionarieta'

$$\delta\mathcal{I} = 0 \quad (4.5)$$

in corrispondenza di variazioni arbitrarie $\delta q^1(t), \dots, \delta q^n(t)$, nulle agli estremi delle funzioni indipendenti equivale, per le funzioni medesime, a quella di soddisfare il sistema *euleriano*:

$$\frac{\partial L}{\partial q^h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} = 0 \quad ; \quad (h = 1, \dots, n) \quad . \quad (4.6)$$

Le soluzioni di questo sistema vengono chiamate *estremali* del ~~principio vari-~~ ^{funzionale} ~~azionale~~ (4.6).

4

5. Principio variazionale di Hamilton.

Siamo ora in grado di mostrare la rilevanza fisica delle considerazioni matematiche svolte prima. Prendiamo come funzione L nelle considerazioni precedenti proprio la funzione di Lagrange. Allora il funzionale \mathcal{I} prende il nome di *Azione* o *Azione Hamiltoniana* e le considerazioni dei paragrafi precedenti hanno dimostrato il seguente

Teorema 5.1, detto *Principio variazionale di Hamilton*:

”Ogni moto naturale (cioè soddisfacente le equazioni di Lagrange) di un sistema olonomo a vincoli perfetti soggetto a forze derivanti da un potenziale e’ caratterizzato nella classe dei moti variati sincroni (cioè che avvengono fra gli stessi intervalli di tempo) e che si svolgono fra le stesse configurazioni estreme dalla proprietà di rendere stazionaria l’azione hamiltoniana

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad ” \quad . \quad (5.1)$$

Meditiamo un attimo sul significato di quanto abbiamo ottenuto: una formulazione diversa ed equivalente delle leggi di Newton. Alcuni testi, forse esagerando, assumono il principio variazionale come definizione del modello della meccanica classica. Nel caso di sistemi conservativi a vincoli perfetti e’ proprio equivalente, ma naturalmente e’ carente nei sistemi fisici con attrito.

Una considerazione utile sia qui, sia nel seguito del corso: stiamo trovando formulazioni diverse ma equivalenti delle stesse leggi fisiche del moto. Oltre avere un interesse nella meccanica classica si prestano a generalizzazioni ad altre meccaniche, non più necessariamente equivalenti. Per esempio le equazioni canoniche si prestano meglio ad una generalizzazione alla Meccanica Quantistica di quelle di Lagrange.

Abbiamo visto che le equazioni di Lagrange sono equivalenti alla stazionarietà dell'azione. Sorge spontanea una domanda: durante il moto naturale questa azione è minima? La risposta è sì, per intervalli temporali non troppo grandi, altrimenti non sempre, ma non indaghiamo ulteriormente questo argomento.

6. Soluzione della premessa.

Ritorniamo all'esempio del primo paragrafo. Per cercare il tempo minimo dobbiamo innanzi tutto cercare la curva che rende stazionario il funzionale (1.2). Potremmo applicare l'equazione di Eulero (4.2), ma possiamo fare di meglio. Poiché integrando è equivalente alla Lagrangiana, possiamo usare i risultati della Meccanica Analitica fin qui ottenuti. In particolare possiamo osservare che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente e quindi l'energia generalizzata si conserva:

$$\mathcal{H} = z' \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1 + (z')^2}{2g z} \right]^{1/2} - \left[\frac{1 + (z')^2}{2g z} \right]^{1/2} = \text{cost} \quad ; \quad z' = \frac{dz}{dx} \quad . \quad (6.1)$$

Risolvendo la (6.1), con alcuni conti che non facciamo, si ottiene la forma della curva. (Non necessario esame) Per curiosità del lettore la scrivo in forma parametrica:

$$z = r(1 - \cos \theta) \quad ; \quad x = r(\theta - \sin \theta) \quad ; \quad \theta \geq 0 \quad ; \quad r = \text{cost} \quad . \quad (6.2)$$

Tale curva si chiama cicloide, era nota fin dagli antichi greci, e rappresenta il luogo dei punti descritti da un punto di una ruota, che rotoli senza strisciare lungo una retta. Come curiosità faccio osservare che se l'ascissa del punto di arrivo è troppo grande rispetto al salto di quota, questa curva potrebbe non passare per

il punto di arrivo. In questo caso abbiamo una non-esistenza, di cui abbiamo accennato nel paragrafo 4, ed il problema va studiato con piu' cura. (Fine non necessario esame).

7. Principio di Hamilton ampliato equivalente alle equazioni canoniche.

Nel paragrafo 5 abbiamo enunciato un principio variazionale equivalente alle equazioni di Lagrange. Qui vogliamo formulare un principio variazionale equivalente all'equazioni di Hamilton.

Come abbiamo gia' detto, dal punto di vista hamiltoniano lo stato di un sistema e' individuato da $2n$ variabili, (q^h, p_h) a priori indipendenti. La traiettoria percorsa dal sistema e' una curva nello spazio delle fasi e perturbarla in un modo generico vuol dire variare sia le q sia le p aggiungendovi δq^h e δp_h , indipendenti fra di loro. Possiamo enuciare il seguente

Teorema 7.1 (Principio di Hamilton ampliato):

" Ogni moto naturale e' caratterizzato, nella classe dei moti variati che si svolgono nello stesso intervallo di tempo e fra le stesse configurazioni estreme (cioe' $\delta q^h(t_0) = 0$ e $\delta q^h(t_1) = 0$) dalla proprieta' di rendere stazionaria l'azione ampliata

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^n p_h \dot{q}^h - H \right) dt \quad .'' \quad (7.1)$$

Notare che l'azione A' si identifica con l'azione A soltanto per quei moti che rispettano tra le $q^h(t)$ e le $p_h(t)$ il legame $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h}$. Poiche' molti moti variati non rispettano questo legame, il principio variazionale ora formulato e' piu' ampio di quello precedente.

Dimostrazione.

Il procedimento e' analogo a quello del paragrafo 5. Prendiamo A' , ne facciamo la variazione prima:

$$\delta A' = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n (p_h \delta \dot{q}^h + \dot{q}^h \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial q^h} \delta q^h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h) dt \quad (7.2)$$

Integriamo per parti il primo termine del secondo membro, ricordando che, ovviamente, la variazione si scambia con la derivata. Otteniamo:

$$\delta A' = \sum_{h=1}^n [p_h \delta q^h]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n [(\dot{q}^h - \frac{\partial H}{\partial p_h}) \delta p_h - (\dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial q^h}) \delta q^h] dt \quad (7.3)$$

Il termine noto si annulla, usando il fatto che le variazioni δq^h agli estremi sono nulle. Usiamo poi il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni ed otteniamo:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} ; \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \quad (7.4)$$

che sono proprio le equazioni di Hamilton. \square

Osserviamo che i punti iniziali e finali nello spazio delle fasi non possono essere scelti a caso, perche' basta il dato iniziale (nello spazio delle fasi) per determinare il moto, quindi o il punto finale e' scelto sulla traiettoria naturale oppure il funzionale che compare nella azione ampliata non ha punti di stazionarieta'.

Tuttavia, adesso sono assegnati i valori iniziali e finali delle q^h , mentre nessuna condizione e' posta sulle p_h iniziali. In pratica, le p_h iniziali vanno scelte in modo che le q^h finali abbiano il valore assegnato.

Abbiamo chiamato correttamente i principi variazionali, principi di azione stazionaria. Comunemente vengono anche chiamati principi di minima azione. Infatti si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che per intervalli di tempo piccoli l'azione e' effettivamente minima.

8. Principio di Maupertuis e ottica geometrica.

E' stato il primo principio variazionale formulato a meta' del 1700 da Maupertuis in modo non rigoroso, che ebbe qualche tempo dopo la sua formulazione definitiva. Il principio si occupa di sistemi in cui l'Hamiltoniana H non dipende esplicitamente dal tempo, e quindi si conserva lungo il moto.

Il Teorema 8.1 (*Principio di Maupertuis*) afferma:

"Data una funzione di Hamilton che non dipende esplicitamente dal tempo (cioe' $H(p_h, q^h)$) ogni moto naturale e' caratterizzato, nella classe dei moti asincroni isoenergetici svolgentesi tra le stesse configurazioni estreme, come quello che rende stazionaria l'azione ridotta (o azione di Maupertuis)

$$A'' = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}^h dt \quad . \quad (8.1)$$

Notare che i moti variati sono solo quelli isoenergetici. A questo punto sarebbe troppo restrittivo richiedere che si svolgano nello stesso intervallo di tempo. Ammettiamo quindi che i moti variati possano svolgersi in un intervallo di tempo un po' variato, cioe' siano *asincroni*.

Non diamo la dimostrazione di questo principio, ma ne vediamo una notevole formulazione.

Nel caso dinamico con vincoli indipendenti dal tempo si ha $H = T + U$ e $p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}$ per cui $\sum_{h=1}^n p_h \dot{q}^h = 2 T$ e quindi

$$A'' = \int_{t_0}^{t_1} 2 T dt \quad (8.2)$$

cioe' l'azione ridotta (che minimizziamo) e' proprio l'integrale temporale dell'energia cinetica.

Vi e' una analogia molto forte con l'ottica geometrica. Vi ricordo il principio di Fermat (della seconda meta' del 1600): un raggio luminoso nell'andare tra la sorgente S e l'osservatore O percorre il cammino ottico l minimo, ove l e' cosi' definito:

$$l = \int_S^O n ds \quad (8.3)$$

ove n e' l'indice di rifrazione, che puo' variare punto per punto, e l'integrale e' un integrale di linea lungo un cammino da S a O .

Cioe' l e' la lunghezza della traiettoria percorsa dal raggio luminoso, misurata in unita' dell'indice di rifrazione. Da questo principio si possono ricavare le leggi dell'ottica geometrica ben note a voi dal liceo, che il rapporto dei seni dell'angolo di incidenza e di rifrazione sono uguali al rapporto degli indici di rifrazione. Ricaviamo questa legge a titolo di esempio. Prima pero' confrontiamo il principio di Maupertuis con quello di Fermat. Prediamo un punto materiale di massa unitaria e di energia totale E , che si muove in un campo di forze di energia potenziale U ; allora $T = E - U$. Poiche' la velocita' $v = \sqrt{2T}$ e $ds = v dt$, possiamo scrivere l'azione ridotta A'' per andare dal punto S al punto O come:

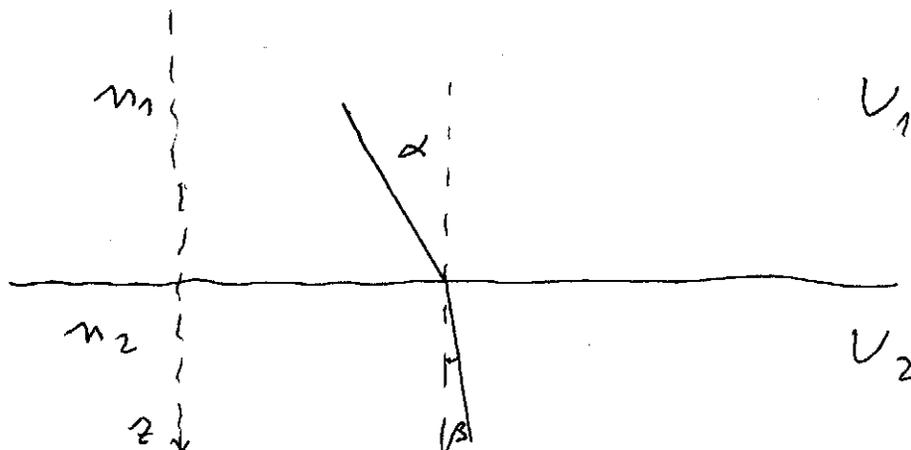
$$A'' = \int_S^O \sqrt{2(E - U)} ds \quad (8.4)$$

Vedete che abbiamo ottenuto il Principio di Fermat, pur di identificare l'indice di rifrazione del mezzo n con

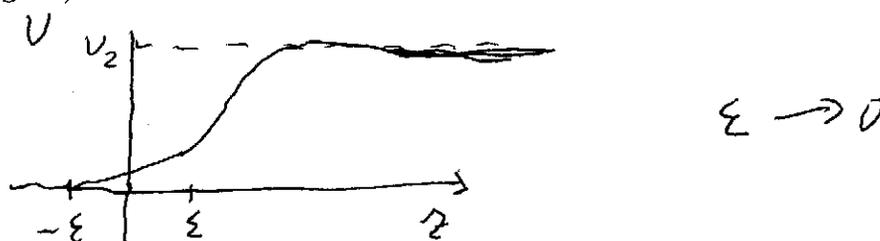
$$n = \sqrt{2(E - U)} \quad (8.5)$$

Vediamo le leggi della rifrazione, usando questa analogia e le leggi della meccanica. (Non necessario esame).

Mettiamo di avere una situazione come in figura, nel semipiano superiore aria ed in quello inferiore acqua. Un raggio luminoso incide la superficie di separazione aria/acqua e passando dall'aria all'acqua viene rifratto.



Corrisponde ad una particella di massa unitaria e velocita' v_1 che si muova in un potenziale costante U_1 . Incide sulla superficie di separazione passando bruscamente ad un potenziale U_2 . (Fisicamente si puo' pensare ad un potenziale $U_\epsilon(z)$ mandando $\epsilon \rightarrow 0$ (vedi figura):



Nel passaggio la quantita' di moto si conserva, poiche' il potenziale non dipende da x . Usando poi la conservazione dell'energia e la (8.5), si ottiene la ben nota legge della rifrazione:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad . \quad (8.6)$$

(Fine non necessario esame).

Abbiamo visto la stretta analogia fra meccanica classica ed ottica geometrica. D'altra parte sappiamo che l'ottica geometrica e' una approssimazione dell'ottica ondulatoria, quando le lunghezze d'onda sono piccolissime rispetto alle dimensioni degli oggetti in gioco. Per curiosita' possiamo domandarci se esiste una "meccanica" analoga alla ottica ondulatoria, cosi' come la meccanica classica era simile

all'ottica geometrica. La risposta e' si', e' la "meccanica quantistica", che studierete in corsi successivi. Naturalmente in questo caso bisogna stabilire cosa si intenda per "lunghezza d'onda piccola", cosa che richiedera' una profonda rivoluzione interpretativa.

Digressioni.

Una nota linguistica: abbiamo parlato di "Principi variazionali", ma in realta', assumendo la legge di Newton, abbiamo dimostrato dei teoremi. (Un teorema e' una conseguenza rigorosa, mentre un principio e' la sintesi generale di tante osservazioni particolari, assunto a base di una teoria). Naturalmente il nome "principio" e' storico. Quando nel millesettecento si e' incominciato ad osservarli su esempi particolari, vi e' stato molto stupore ed interesse. In particolare quello di Maupertuis, che sembra dire che la natura nel determinare il moto segue un principio di economia cercando di minimizzare l'azione, ovvero l'integrale dell'energia cinetica (cosi' come in ottica un raggio luminoso cercava il cammino ottico minimo). Naturalmente non e' il caso di attribuire troppi significati filosofici a questi principi, anche se e' sempre forte e ricorrente la tentazione di affermare che "tutto va nel migliore dei modi nel migliore dei mondi possibili"! (Prendo questa affermazione tra virgolette dal saggio satirico "Candide" di Voltaire, che ironizzava sul protagonista, Candide appunto, che pur succedendogli tante disgrazie, si lamentava dell'assenza del suo maestro, che gli avrebbe saputo dimostrare che "tutto andava") Attenzione pero' a non pensare che questa ingenua certezza che "tutto il mondo non possa andare altro che cosi'" sia una cosa ormai superata. Si ripresenta costantemente (nell'economia, nei rapporti sociali) e talvolta e' piu' profonda di quanto non sembri.

(Non necessari esame) Nei paragrafi precedenti abbiamo usato nei principi variazionali la cosiddetta derivata di Gateaux. Esiste un'altra formulazione, che usa la cosiddetta derivata di Frechet. Le due formulazioni sono leggermente differenti, ma i risultati nei casi fisici, che ci interessano, sono equivalenti (Fine non necessario esame).

9. Funzione principale di Hamilton.

In questo paragrafo introdurremo alcune nozioni, il cui notevole interesse apparirà nei Capitoli successivi.

Consideriamo l'azione Hamiltoniana A' introdotta in (7.1):

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^n p_h \dot{q}^h - H \right) dt \quad (9.1)$$

e la si calcoli sostituendo in luogo delle $q^h(t)$, $p_h(t)$ una soluzione del sistema canonico:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad ; \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \quad (9.2)$$

Dette allora q_0^h e q_1^h e valori assunti dalle $q^h(t)$ nei due istanti t_0 e t_1 , valori che in generale *bastano ad individuare* la soluzione stessa, almeno per moti non troppo differenti fra di loro (non discutiamo e non dimostriamo questo punto, per qualche considerazione rimandiamo alla fine del paragrafo), l'integrale (9.1) si riconosce essere

una funzione determinata di (q_o^h, t_o) e (q_1^h, t_1) od anche, omettendo l'indice 1 e cambiando nome alla variabile di integrazione:

$$S(q, t|q_o, t_o) = \int_{t_o}^t \left(\sum_{h=1}^n p_h(\tau) \frac{dq^h(\tau)}{d\tau} - H(q(\tau), p(\tau), \tau) \right) d\tau \quad (9.3)$$

Questa funzione suole chiamarsi *funzione caratteristica o principale di Hamilton*.

Naturalmente per conoscerla esplicitamente bisognerebbe conoscere il moto.

Siamo interessati ad alcune sue proprieta' che vedremo sia ora, sia nei prossimi capitoli.

Vogliamo stabilire una notevole equazione a cui soddisfa S . Perturbiamo infinitesimalmente le posizioni iniziali e finali, ed anche i tempi iniziali e finali (Fig.1):

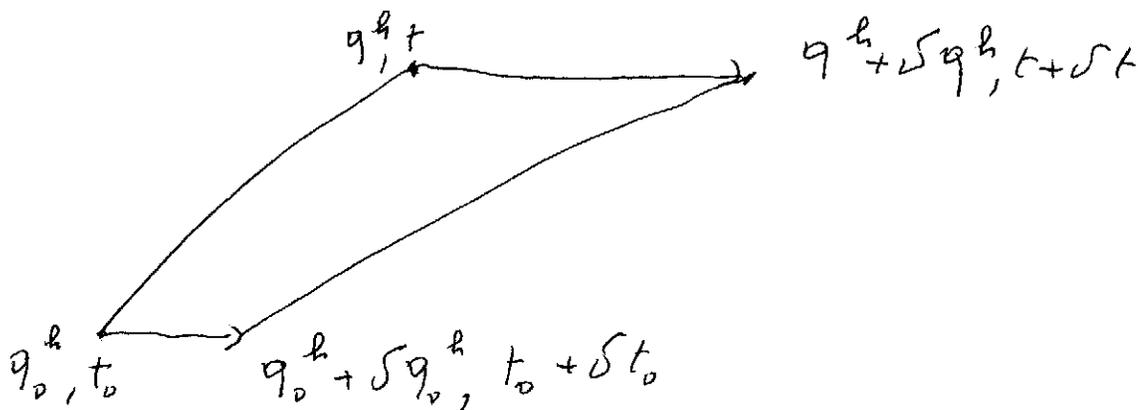


Fig.1

Vediamo come cio' si riflette sulla (9.3). Le perturbazioni spaziali erano gia' state considerate nella (7.2) dove ora l'integrale scompare, perche' lo si stima seguendo il moto e quindi valgono le equazioni di Hamilton, e rimane solo il primo termine del secondo membro. Pero' ora stiamo perturbando anche gli estremi di integrazione. Senza ripetere i calcoli, osserviamo che le variazioni obbediscono alla stessa legge delle derivate e la derivata di un espressione integrale rispetto all'estremo di integrazione da' l'integrando (teorema fondamentale del calcolo), cioe':

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t) ; \quad \frac{d}{dt} \int_t^0 f(s) ds = -f(t) \quad . \quad (9.4)$$

Quindi

$$\delta S = \sum_{h=1}^n p_h \delta q^h - H(q, p, t) \delta t - \sum_{h=1}^n p_{h,o} \delta q_o^h + H(q_o, p_o, t) \delta t_o \quad . \quad (9.5)$$

D'altronde S e' una funzione delle $2n + 2$ variabili indipendenti (q^h, t, q_o^h, t_o) e quindi:

$$\delta S = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q^h} \delta q^h + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t + \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_o^h} \delta q_o^h + \frac{\partial S}{\partial t_o} \delta t_o \quad . \quad (9.6)$$

Identificando si trae:

$$\frac{\partial S}{\partial q^h} = p_h \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_o^h} = -p_{h,o} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial t_o} = H(q_o, p_o, t) \quad (9.8)$$

Le (9.7) vengono chiamate equazioni di *Hamilton - Jacobi* del sistema.

In teoria studiando le (9.7) e (9.8) si potrebbe trovare l'integrale generale delle equazioni di Hamilton e quindi risolvere il moto. Ma apparentemente abbiamo molto complicato il problema: prima dovevamo studiare $2n$ equazioni differenziali ordinarie, mentre ora dobbiamo studiare un sistema alle derivate parziali. Ora e' ben noto che trovare l'integrale generale di una equazione alle derivate parziali e' molto piu' complicato ed in generale dipende dal valore che assume la funzione incognita a qualche tempo, cioe' da infiniti dati. Per fortuna, come vedremo, per risolvere il problema non abbiamo bisogno di conoscere l'integrale generale dell'equazione di Hamilton-Jacobi, ma basta trovare (quando esiste e siamo capaci) un integrale particolare dipendente in modo essenziale da n parametri.

Finisco il paragrafo dicendo che l'equazione di Hamilton-Jacobi trova notevoli applicazioni in un contesto differente dalla meccanica analitica, la teoria matematica del controllo.

(Non necessario esame) Come vi avevo già annunciato, discutiamo un attimo se le posizioni ed i tempi iniziali e finali individuano univocamente la Funzione Principale di Hamilton. Partiamo da un esempio semplicissimo: una particella in moto libero in \mathbb{R}^3 . È chiaro allora che vi è un solo moto congiungente due punti in un tempo fissato. È anche intuitivo che in \mathbb{R}^3 se i punti sono abbastanza vicini, i tempi ragionevoli e le forze generiche c'è un solo moto (salvo dati iniziali e finali particolari). La cosa è più complicata con altre topologie dello spazio in cui avviene il moto. Vediamo un esempio: prendiamo un punto vincolato a muoversi senza attrito su una sfera. Prendiamo i punti iniziali e finali abbastanza prossimi (se la sfera è la Terra, Roma e Milano). Fissiamo un intervallo ragionevole di tempo (diciamo una ora). Allora vi sono due moti che congiungono gli estremi: o un aereo da Roma a Milano, o un missile che passi vicino ai Poli, prima Sud poi Nord. Poi se i punti di partenza e di arrivo sono agli estremi della sfera, vi sono infiniti modi che li congiungono. D'altra parte la proprietà che abbiamo sfruttato in questo paragrafo non è l'unicità per ogni moto, ma solo quella di unicità rispetto a moti abbastanza vicini, e questa, se i punti iniziali e finali non sono molto lontani è assicurata. (Fine non necessario esame).

CAP. 7. LE TRASFORMAZIONI CANONICHE

1. Definizione e condizione di Lie.

Si consideri un sistema fisico retto da equazioni canoniche di Hamiltoniana $H(q, p, t)$:

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad ; \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \quad (1.1)$$

Poiche' non sono le variabili (q, p) ad avere significato intrinseco, bensì' gli "stati fisici" che esse rappresentano e' chiaro che gli stati medesimi potranno ugualmente essere rappresentati da altre $2n$ variabili che con le (q, p) si trovino in corrispondenza biunivoca, corrispondenza eventualmente dipendente da t .

Si consideri allora una corrispondenza *invertibile* che dalle $2n$ variabili di stato (q^h, p_h) faccia passare a nuove $2n$ variabili di stato (Q^r, P_r) con l'eventuale intervento del tempo come parametro:

$$Q^r = Q_r(q^1, p_1, \dots, q^n, p_n, t) \quad ; \quad P_r = P_r(q^1, p_1, \dots, q^n, p_n, t) \quad ; \quad (r = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

ovvero le trasformazioni inverse

$$q^h = q^h(Q^1, P_1, \dots, Q^n, P_n, t) \quad ; \quad p_h = p_h(Q^1, P_1, \dots, Q^n, P_n, t) \quad ; \quad (h = 1, \dots, n) \quad (1.3)$$

E' implicita la condizione, che garantisce l'inversibilita', che lo Jacobiano sia diverso da zero:

$$\det\left(\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}\right) \neq 0 \quad . \quad (1.4)$$

La trasformazione (1.2) trasforma il sistema (1.1) in un altro sistema differenziale del primo ordine nelle nuove funzioni incognite $Q^r(t), P_r(t)$, che

in generale non ha piu' la forma Hamiltoniana.

Diremo che la trasformazione (1.2) e' *canonica* se applicata ad un sistema Hamiltoniano (1.1) lo trasforma *qualunque sia la sua Hamiltoniana* $H(q, p, t)$, in un sistema Hamiltoniano, cioe' se esiste una funzione $H'(Q, P, t)$ tale che:

$$\dot{Q}^r = \frac{\partial H'}{\partial P_r} \quad ; \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H'}{\partial Q^r} \quad (1.5)$$

nel quale le variabili Q^r, P_r fungono da nuove coppie di variabili coniugate.

Nella precedente definizione non si richiede che la nuova Hamiltoniana $H'(Q, P, t)$ sia la trasformata diretta della Hamiltoniana originaria $H(q, p, t)$ per effetto della trasformazione (1.2). Se questo accade, cioè se si ha

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \quad (1.6)$$

e cioè si verifica qualunque sia l'Hamiltoniana originaria H , allora la trasformazione in questione si dice *completamente canonica*.

Si intuisce facilmente l'importanza delle trasformazioni canoniche che, lasciando invariato un carattere importante del sistema differenziale di evoluzione quale è la sua canonicità, caratterizza implicitamente tutta una classe privilegiata di variabili di stato.

Si pone ora il problema di caratterizzare le trasformazioni canoniche. Vedremo nel prossimo paragrafo, come, tramite questa caratterizzazione, si possa anche "generare" ~~le~~ ^{no} trasformazioni canoniche.

Introduciamo la seguente caratterizzazione di *Lie*.

Teorema 1.1:

"Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione invertibile (1.2) sia canonica è che essa trasformi la forma lineare $\sum_{h=1}^n p_h dq_h$ nella forma differenziale $\lambda(\sum_{r=1}^n P_r dQ_r) + \Psi dt + dF$, ove λ è un qualunque numero reale e Ψ e F sono due qualunque funzioni dello spazio della fase e del tempo."

In altre parole la trasformazione è canonica, se esiste un λ per cui la forma differenziale:

$$\sum_{h=1}^n [p_h dq^h - \lambda P_h dQ^h] - \Psi dt \stackrel{?}{=} dF \quad (1.7)$$

cioè è un differenziale esatto.

Non dimostreremo la necessità e discuteremo la sufficienza fra poco.

Come si vede λ e' semplicemente un fattore di scala nelle unita' di misura dei nuovi impulsi P_h . Spesso lo si pone uguale ad 1, e cosi' anche noi faremo nel prosieguo del corso. Quindi d'ora innanzi chiameremo trasformazione canonica quella in cui vale la (7.1) con $\lambda = 1$.

(Non necessario esame). Con un semplice esempio ci possiamo rendere conto conto che per avere la necessita' dobbiamo porre un λ nella (1.7). Scegliamo la trasformazione $Q = p; P = q$; vediamo immediatamente che e' canonica con $H' = -H$ e quindi soddisfa la (7.1) con $\lambda = -1$. D'altra parte lo discussione della sufficienza, che verra' svolta fra un attimo, suggerisce la formula (1.7) completa (cioe' con λ generico). (Fine non necessario esame).

Dimostriamo la sufficienza della (1.7) con $\lambda = 1$ cioe' la condizione (Lie)

$$\sum_{h=1}^n [p_h dq^h - P_h dQ^h] = \Psi dt + dF_* \quad (1.7')$$

Assumiamo di aver espresso F in funzione delle q^h e delle Q^h .

Partiamo dal problema variazionale di Hamilton ampliato, in una versione leggermente differente, che afferma che le equazioni di Hamilton sono equivalenti dal principio variazionale

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^n p_h \dot{q}^h - H(q, p, t) \right) dt = 0 \quad (1.8)$$

arbitrarie

con variazioni $\delta p_h, \delta q^h$ nulle agli estremi. (La dimostrazione e' la stessa di quello formulato nel Cap.6).

Prendiamo la (1.7) e sostituiamola nella (1.8), ponendo $H' = H - \Psi$. Si ha:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^n P_h \dot{Q}^h - H'(q, p, t) \right) dt + \delta[F]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (1.9)$$

Poiche' le variazioni δq^h e δQ^h sono nulle agli estremi, il termine $\delta[F]_{t_0}^{t_1}$ e' nullo e dal principio variazionale si hanno le equazioni di Hamilton nelle (Q, P) . \square

Il problema di vedere se una trasformazione sia canonica, e', come problema matematico, uguale a quello di vedere se un campo di forze sia conservativo. In fondo al capitolo ci sono alcuni esercizi sull'argomento. Dico subito che come le forze conservative sono rare (ma importanti!) fra tutti i campi di forze, cosi' qui le trasformazioni canoniche sono rare (ma importanti).

2. Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

In questo paragrafo daremo dei procedimenti sistematici per la costruzione effettiva di trasformazioni canoniche.

i) Funzione genetratrice nelle variabili (q, Q, t) : $F_1(q, Q, t)$.

Una prima possibilita' consiste nello scegliere a piacere una funzione, che indichiamo con F_1 , che figura nella (1.7') come funzione del gruppo (q) delle vecchie variabili, (Q) delle nuove ed eventualmente del tempo con l'unica condizione:

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^h \partial Q^k}\right) \neq 0 \quad (2.1)$$

Esprimendo entrambi i membri nella $(2n + 1)$ variabili indipendenti (q, Q, t) , la medesima (1.7') si scrivera':

$$\sum_{h=1}^n [p_h dq_h - P_h dQ_h] = \Psi dt + \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial F_1}{\partial Q^h} dQ^h \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (2.2)$$

Una tale identita' implica:

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q^h} \quad ; \quad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^h} \quad ; \quad \Psi = -\frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (2.3)$$

Ricordando che $H' = H - \Psi$, si ha che F_1 genera una trasformazione canonica data come soluzione delle equazioni algebriche (2.3) in cui la nuova Hamiltoniana e' data da:

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (2.4)$$

ii) Funzione generatrice nelle variabili (q, P, t) : $F_2(q, P, t)$.

Chiamiamo

$$F_2 = F_1 + \sum_{h=1}^n P_h Q^h \quad (2.5)$$

Supponiamo F_2 funzione delle (q, P, t) con la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^h \partial P_k}\right) \neq 0 \quad (2.6)$$

La (1.7') diventa, svolgendo il facile calcolo (ricordando che $d(qp) = pdq + qdp$):

$$\sum_{h=1}^n [p_h dq^h + Q^h dP_h] = \Psi dt + \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial F_2}{\partial P_h} dP_h \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.7)$$

Identita' che implica

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q^h} ; \quad Q^h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} ; \quad \Psi = -\frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.8)$$

La F_2 genera una trasformazione canonica data come soluzione delle equazioni algebriche (2.8) in cui la nuova Hamiltoniana e' data da:

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.9)$$

iii) Funzione generatrice nelle variabili (p, Q, t) : $F_3(p, Q, t)$.

Chiamiamo

$$F_3 = F_1 - \sum_{h=1}^n p_h q^h \quad (2.10)$$

Supponiamo F_3 funzione delle (p, Q, t) con la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_h \partial Q^k}\right) \neq 0 \quad (2.11)$$

La (1.7') diventa, svolgendo il facile calcolo (ricordando che $d(qp) = pdq + qdp$):

$$\sum_{h=1}^n [q^h dp_h + P_h dQ^h] = -\Psi dt - \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_h} dp_h + \frac{\partial F_3}{\partial Q^h} dQ^h \right) - \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (2.12)$$

Identita' che implica

$$q^h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} ; \quad P_h = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^h} ; \quad \Psi = -\frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (2.13)$$

La F_3 genera una trasformazione canonica data come soluzione delle equazioni algebriche (2.13) in cui la nuova Hamiltoniana e' data da:

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (2.14)$$

iv) Funzione generatrice nelle variabili (p, P, t) : $F_4(p, P, t)$.

Chiamiamo

$$F_4 = F_1 + \sum_{h=1}^n (-p_h q^h + P_h Q^h) \quad (2.15)$$

Supponiamo F_4 funzione delle (p, P, t) con la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_h \partial P_k}\right) \neq 0 \quad (2.16)$$

La (1.7') diventa, svolgendo il facile calcolo (ricordando che $d(qp) = pdq + qdp$):

$$\sum_{h=1}^n [q^h dp_h - Q^h dP_h] = -\Psi dt - \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_h} dp_h + \frac{\partial F_4}{\partial P_h} dP_h \right) - \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (2.17)$$

Identita' che implica

$$q^h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} ; \quad Q^h = \frac{\partial F_4}{\partial P_h} ; \quad \Psi = -\frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (2.18)$$

La F_4 genera una trasformazione canonica data come soluzione delle equazioni algebriche (2.18) in cui la nuova Hamiltoniana e' data da:

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (2.19)$$

Osservazione: Dalle formule precedenti appare chiaramente che in tutti e quattro i casi se la funzione generatrice non dipende dal tempo la corrispondente trasformazione (essa stessa indipendente dal tempo) e' *completamente canonica*. Si tratta di una proprieta' generale, valida per qualsiasi trasformazione canonica indipendente dal tempo, qualunque sia il modo in cui essa e' stata costruita. Sussiste infatti un teorema generale che ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione:

Teorema:

"Se una trasformazione e' canonica ed indipendente dal tempo, allora essa e' completamente canonica".

3. Esempi di trasformazioni canoniche.

In questo paragrafo daremo alcuni esempi di trasformazioni canoniche, dipendenti o no dal tempo, di particolare interesse. Ciascuna di queste verra' costruita da una particolare scelta della funzione generatrice.

i) Si scelga come generatrice la funzione seguente:

$$F_2 = \sum_{h=1}^n q^h P_h \quad . \quad (3.1)$$

A essa corrisponde la trasformazione completamente canonica:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q^h} \quad ; \quad Q^r = \frac{\partial F_2}{\partial P_r} \quad (3.2)$$

e cioè

$$p_h = P_h \quad ; \quad Q^r = q^r \quad . \quad (3.3)$$

Si tratta, come si vede, di una trasformazione canonica banale, la *trasformazione identica*.

i) Si assuma come funzione generatrice

$$F_2(q, P, t) = \sum_{r=1}^n f^r(q, t) P_r \quad (3.4)$$

essendo le f^r funzioni regolari arbitrarie. La corrispondente trasformazione canonica è:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q^h} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f^r}{\partial q^h} P_r \quad ; \quad Q^r = \frac{\partial F_2}{\partial P_r} = f^r \quad (3.5)$$

Risulta essere la più generale trasformazione, dipendente dal tempo, operante sulle sole coordinate lagrangiane q^h (coordinate di posizione). (Tali trasformazioni vengono chiamate talvolta *di contatto*).

Queste trasformazioni sono le sole che si prendono in considerazione nel formalismo lagrangiano; e come esse lasciano invariata la forma lagrangiana delle equazioni del moto così, come era ben prevedibile, ne lasciano invariata anche la forma hamiltoniana, purché le P_h siano scelte convenientemente.

iii) Alla funzione generatrice:

$$F_1(q, Q) = \sum_{r=1}^n q^r Q^r \quad (3.6)$$

corrisponde la trasformazione completamente canonica

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q^h} = Q^h \quad ; \quad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^h} = -q^h \quad (3.7)$$

Essa assume come nuove "coordinate" gli antichi "momenti" e come nuovi "momenti" le antiche "coordinate" cambiate di segno. Che una tale trasformazione fosse canonica era constatabile a vista, trattandosi di un semplice cambiamento di nome nell'ambito delle $2n$ variabili di stato (q, p) . Essa vale a mettere in evidenza una volta di piu' che nel formalismo hamiltoniano la distinzione fra "coordinate" e momenti non ha un significato invariante di fronte a tutti i cambiamenti di variabile che rispettano la forma canonica dell'equazioni del moto. Cio' che permane e' invece la divisione delle $2n$ variabili di stato in due gruppi, ad ogni variabile di un gruppo corrisponde una determinata variabile dell'altro gruppo (coppia di variabili coniugate).

iv) Fissati due istanti t_o e t si consideri il generico moto naturale che parte dalla posizione q_o ed arriva alla posizione q . Chiamiamo $S(q, t, q_o, t_o)$ la Funzione Principale di Hamilton, discussa nel capitolo precedente. (Essa rappresenta l'azione definita lungo il moto naturale). Prendiamola come funzione generatrice di una trasformazione canonica (ovc $Q = q_o$). La trasformazione sara' data da:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q^h} \quad ; \quad P_h = -\frac{\partial S}{\partial Q^h} \quad (3.8)$$

che sono proprio le relazioni trovate nell'ultimo paragrafo del Precedente capitolo. Quindi abbiamo dimostrato che " l'evoluzione temporale da' una trasformazione canonica di cui la Funzione Principale di Hamilton e' la funzione generatrice".

La nuova Hamiltoniana H' risulta:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.9)$$

Deve essere $H' = 0$, perché S soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi. Scrivendo le corrispondenti equazioni di Hamilton si ottiene:

$$q_o^h = cost \quad ; \quad p_{h,o} = cost \quad (3.10)$$

cosa ovvia, rappresentando le (q_o, p_o) i dati iniziali. Discuteremo più' approfonditamente l'equazione di Hamilton-Jacobi nel prossimo capitolo.

Alla fine del paragrafo facciamo una osservazione (ovvia, ma non banale).

Le trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo giocano un ruolo importante nella teoria. In particolare conservano la caratteristica dell'Hamiltoniana di un sistema di non dipendere esplicitamente dal tempo (e quindi di essere conservata nel moto).

4. Invarianza delle parentesi di Poisson di fronte ad ogni trasformazione canonica.

Ricordiamo la definizione di parentesi di Poisson, introdotta nel Cap.5. Siano f e g due grandezze dinamiche funzioni delle variabili canoniche (q, p) , $f = f(q, p)$, $g = g(q, p)$, definiamo Parentesi di Poisson la grandezza:

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q^h} \right) \quad (4.1)$$

Consideriamo ora una trasformazione canonica indipendente dal tempo, e quindi completamente canonica:

$$q^h = q^h(Q, P) \quad , \quad p_h = p_h(Q, P) \quad ; \quad Q^r = Q^r(q, p) \quad , \quad P_r = P_r(q, p) \quad (4.2)$$

Per effetto di queste trasformazioni le funzioni f e g si trasformano in due funzioni f' e g' delle variabili (Q, P) :

$$f' = f'(Q, P) = f(q(Q, P), p(Q, P)) \quad ; \quad g' = g'(Q, P) = g(q(Q, P), p(Q, P)) \quad (4.3)$$

e si può calcolare la nuova Parentesi di Poisson:

$$[f', g']_{Q, P} = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial f'}{\partial Q^h} \frac{\partial g'}{\partial P_h} - \frac{\partial f'}{\partial P_h} \frac{\partial g'}{\partial Q^h} \right) \quad (4.4)$$

Come ora dimostreremo sussiste l'uguaglianza:

$$[f', g']_{Q, P} = [f, g]_{q, p} \quad (4.5)$$

cioè

Teorema 4.1:

”La parentesi di Poisson di due grandezze dipendenti esclusivamente dalle variabili canoniche (q, p) è invariante in valore di fronte ad ogni trasformazione canonica indipendente dal tempo”.

Il Teorema vale anche per trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo, ma noi lo dimostreremo solo per quelle indipendenti dal tempo.

Dimostrazione. Per dimostrarlo nel modo più rapido si assuma la $g(q, p)$ come funzione Hamiltoniana di un ipotetico sistema fisico. La $[f, g]_{q, p}$ rappresenta (Cap.5 ,par.1) la derivata totale di f lungo le soluzioni del sistema canonico di Hamiltoniana g :

$$[f, g]_{q, p} = \frac{d}{dt} f(q, p) \quad (4.6)$$

Stante il carattere completamente canonico della trasformazione la funzione g' è l'Hamiltoniana del sistema trasformato. Ne segue che la parentesi di Poisson

$[f', g']_{Q,P}$ rappresenta la derivata totale di f' lungo le soluzioni del sistema canonico di Hamiltoniana $g'(Q, P)$:

$$[f', g']_{Q,P} = \frac{d}{dt} f'(Q, P) \quad (4.7)$$

Poiche' d'altra parte le soluzioni di un sistema sono le dirette trasformate dell'altro, $\frac{d}{dt} f'$ non puo' che essere uguale a $\frac{d}{dt} f$, e da qui il teorema. \square

Da questo teorema seguono in particolare delle relazioni sulle Parentesi di Poisson fondamentali:

$$[Q^r, Q^s]_{q,p} = [Q^r, Q^s]_{Q,P} ; [Q^r, P_s]_{q,p} = [Q^r, P_s]_{Q,P} ; [P_r, P_s]_{q,p} = [P_r, P_s]_{Q,P} \quad (4.8)$$

ossia, tenuti presenti i valori delle Parentesi di Poisson fondamentali relativi ad un sistema di coordinate canoniche:

$$[Q^r, Q^s]_{q,p} = 0 ; [Q^r, P_s]_{q,p} = \delta_s^r ; [P_r, P_s]_{q,p} = 0 \quad (4.9)$$

Le (4.9) esprimono una condizione *neccessaria* affinche' una trasformazione indipendente dal tempo sia canonica. Si potrebbe dimostrare che essa e' anche sufficiente. Enunceremo pertanto il teorema seguente:

Teorema 4.2:

"Condizione necessaria e sufficiente affinche' una trasformazione indipendente dal tempo sia canonica e' che la Parentesi di Poisson delle funzioni $Q^r(q, p), P_r(q, p)$ assumano i valori (4.9)."

Spesso questa proprieta' viene usata negli esercizi. In realta' per verificare la canonicita' i conti svolti usando questa proprieta' e quelli guardando se la forma di Lie e' un differenziale esatto (cioe' esplicitando le derivate in croce) sono veramente gli stessi.

5. Jacobiano di una trasformazione canonica.

Consideriamo ~~lo~~^{il} determinante Jacobiano di una generica trasformazione invertibile del tipo (1.2):

$$J = \frac{\partial(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)} \quad (5.1)$$

Passiamo dalle (q, p) alle (Q, P) per gradi prima passando per le (q, P) e così via. Una ben nota proprietà delle Jacobiano è che lo Jacobiano del prodotto di due trasformazioni è il prodotto degli Jacobiani (come deve essere perché il determinante Jacobiano rappresenta la trasformazione dell'elemento di volume). Quindi lo Jacobiano dell'inverso è l'inverso dello Jacobiano. Pertanto possiamo scrivere successivamente:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n)} \frac{\partial(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)} = \\ &= \frac{\partial(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n)} \left[\frac{\partial(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n)} \right]^{-1} = \\ &= \frac{\partial(Q^1, \dots, Q^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} \Big|_{P=\text{cost}} \left[\frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \Big|_{q=\text{cost}} \right]^{-1} = \det\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\right) \left[\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Supponiamo ora che la trasformazione sia canonica e provenga da una funzione generatrice $F_2(q, P, t)$. Dalle (2.8) si ricava

$$\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q^k \partial P_i} \quad ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_k \partial q^i} \quad (5.3)$$

Ne segue

$$\det\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\right) = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right) \quad . \quad (5.4)$$

Dalle (5.2) e (5.4) segue

$$J = 1 \quad . \quad (5.5)$$

Il risultato rientra in un risultato generale che ci limitiamo ad enunciare:

Teorema 5.1:

"Il modulo dello Jacobiano di una qualunque trasformazione canonica vale 1."

Useremo questa importante proprietà fra due capitoli.

6. Qualche esercizio sulle trasformazioni canoniche.

i) Data la trasformazione

$$Q = (2)^{-1/2} p^{1/2} q^\beta \quad ; \quad P = -(2)^{1/2} p^{1/2} q^{3/2} \quad ; \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

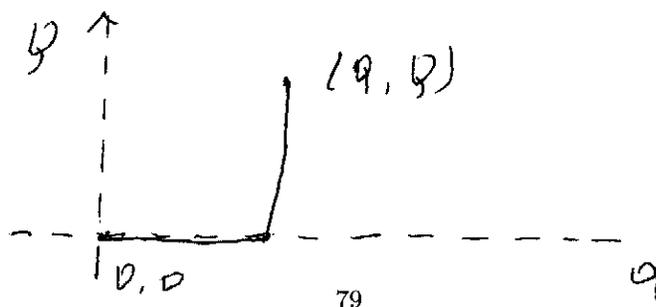
Trovare il valore di β per cui essa è canonica e per tale valore trovare la funzione generatrice nelle (q, Q) .

Risoluzione.

Deve essere $[Q, P]_{q,p} = 1$, da cui svolgendo i facili conti $\beta = -\frac{1}{2}$. Per la ricerca di F si ha:

$$dF = pdq - PdQ \quad ; \quad p = 2qQ^2 \quad ; \quad P = -2q^2Q \quad (6.2)$$

Partendo dall'origine ed integrando lungo la spezzata in figura



si ottiene $F = q^2 Q^2$. Consiglio di verificare l'esattezza del risultato ottenuto.

□

Gli esercizi sono molto simili. Ne do' il testo di un altro lasciando al lettore la soluzione. Ne troverete altri negli esercizi ricapitolativi.

ii) Data la trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$:

$$Q = -q + \alpha \log\left(\frac{p}{1+q}\right) ; P = \frac{-pq}{1+q} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

trovare il valore di α per cui essa e' canonica e la sua funzione generatrice in (q, Q) .

CAP. 8. IL METODO DI HAMILTON-JACOBI

1. L'equazione di Hamilton-Jacobi.

Introduciamo ora un metodo (un po' particolare) per risolvere le equazioni di Hamilton. Diro' subito che l'interesse principale di questo metodo non e' pratico (salvo casi rarissimi), ma concettuale. Cerchiamo una trasformazione canonica dipendente dal tempo che faccia passare dalle vecchie (p, q) alle nuove (β, π) ed in cui la nuova Hamiltoniana H' sia nulla. Chiamiamo $S(q, \pi, t)$ la funzione generatrice di questa trasformazione. Deve esserci:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} ; p_h = \frac{\partial S}{\partial q^h} \quad (1.1)$$

Se imponiamo ora $H' = 0$, si vede che la S deve soddisfare l'equazione, detta di *Hamilton - Jacobi*:

$$H(q^1, \dots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

equazione che avevamo gia' incontrato nel Cap.7 in un contesto con molte analogie.

Come avevamo già detto, la ricerca della soluzione generale di questa equazione è un problema di difficoltà ben superiore a quello di risolvere le equazioni del moto. In realtà noi non siamo interessati a trovare l'integrale *generale* della (1.2), ma solo un integrale *completo*, cioè una funzione che soddisfi la (1.2) e che dipenda in modo essenziale da n costanti arbitrarie π_h , ($h = 1, \dots, n$) non additive, tali che

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^h \partial \pi_k}\right) \neq 0 \quad (1.3)$$

Discuteremo tra un attimo sull'esistenza di un tale integrale completo. Ammettiamo ora di averlo trovato: abbiamo risolto il problema. Infatti le nuove variabili β^h, π_k si evolvono tramite la nuova Hamiltoniana H' che è nulla. Quindi le equazioni di Hamilton diventano:

$$\dot{\beta}^h = 0 \quad ; \quad \dot{\pi}_k = 0 \quad (1.4)$$

e quindi sono costanti.

D'altra parte:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q^h} \quad ; \quad \beta^h = \frac{\partial S}{\partial \pi_h} \quad (1.5)$$

e quindi invertendo

$$q^h = q^h(\beta, \pi, t) \quad ; \quad p_h = p_h(\beta, \pi, t) \quad (1.6)$$

che costituiscono l'integrale generale del sistema canonico.

Discutiamo ora se questo integrale completo esiste, ed eventualmente come trovarlo.

Un primo passo è sempre fattibile se ci limitiamo a considerare una classe di sistemi fisici molto importante, quelli con Hamiltoniana H non dipendente dal tempo. Allora possiamo cercare una soluzione della (1.2) della forma:

$$S\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = W\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - E t \quad (1.7)$$

La (1.2) diventa;

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E \quad (1.8)$$

ove E e' una costante (che abbiamo chiamato π_1 nella esposizione generale), che ha ovviamente il significato di energia.

Per sistemi ad un grado di liberta' questo metodo (chiamato di separazione delle variabili) ha ricondotto il problema ad una equazione ordinaria, molto piu' trattabile. Vedremo fra poco un esempio in cui si puo' completamente risolvere.

Per sistemi a piu' gradi di liberta' il problema e' piu' complicato. In generale *non* esiste un integrale completo, ed i casi in cui lo si puo' trovare sono rari ma importanti. Il problema e' collegato ai cosiddetti *sistemi integrabili*, che qui solo accenno. Sono sistemi fisici per cui esiste una trasformazione canonica che li trasforma o in particelle libere o in oscillatori armonici. Mi spiego meglio, per un breve periodo di tempo questa trasformazione esiste (quasi) sempre; ma qui vogliamo una cosa diversa, che esista per *ogni* tempo, ovvero come si suol dire *globalmente* nel tempo. Sistemi cosi' fatti sono rari (concetto impreciso!) ma importanti. Un esempio lo daremo nel seguito con il problema dei due corpi, o con sistemi di oscillatori (piccole oscillazioni). Qualche altro caso sara' discusso nel paragrafo successivo. In generale se avete un sistema fisico reale, a meno di essere molto fortunati, non sara' un sistema integrabile. L'interesse consiste nell'approssimare un sistema reale con un sistema integrabile. Un esempio verra' fornito nel prossimo capitolo. In generale l'argomento fa parte dei cosiddetti metodi *perturbativi* e potrebbe essere oggetto di interi corsi.

2. Esempi.

Esempio (oscillatore armonico).

Sia $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$. La (8.8) diventa

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 = E \quad . \quad (2.1)$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria, che puo' essere facilmente risolta per separazione delle variabili. Si ha:

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} \quad (. \quad 2.2)$$

che posta nella (8.7) da':

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} - Et \quad (2.3)$$

Ricordando che per la (8.5)

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int dq \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}} - t \quad . \quad (2.4)$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$t + \beta = -\frac{m}{k} \arccos\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right) \quad (2.5)$$

da cui

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \omega(t + \beta) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

che e' proprio il moto aspettato.

Come già detto, il caso a più gradi di libertà è molto più complicato ed il metodo di Hamilton-Jacobi ha successo solo nel caso di variabili separabili, che ora brevemente illustriamo.

(Non necessario esame). Per spiegare il concetto partiamo da un caso particolare. Ammettiamo che la coordinata q^1 e la derivata corrispondente $\frac{\partial S}{\partial q^1}$ entrino nella equazione di Hamilton-Jacobi solo sotto forma di una combinazione del tipo $\phi(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1})$ che non contiene altre coordinate, né altre derivate né il tempo. Intendo dire che l'equazione appare della forma:

$$\Phi\left\{q^h, t, \frac{\partial S}{\partial q^h}, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right)\right\} = 0 \quad ; \quad (h = 2, \dots, n) \quad . \quad (2.7)$$

Cerchiamo una soluzione della forma:

$$S = S' + S_1(q^1) \quad . \quad (2.8)$$

Sostituiamo nella (2.7) e chiediamo di soddisfarla per ogni valore di q^1 . La (2.7) si scinde in due equazioni, che possiamo studiare in successione:

$$\phi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right) = \pi_1 \quad ; \quad \Phi\left\{q^h, t, \frac{\partial S}{\partial q^h}, \frac{\partial S}{\partial t}, \pi_1\right\} = 0 \quad ; \quad (h = 2, \dots, n) \quad . \quad (2.9)$$

La prima della (2.9) è una equazione ordinaria, che speriamo risolvere. Passiamo alla seconda; le variabili saranno separabili quando il procedimento sarà eseguibile tante volte quanto sono i gradi di libertà. La S sarà la somma di funzioni distinte, ognuna dipendente da una sola variabile o dal tempo.

Illustro il metodo con un esempio, che fornisce anche un (raro) caso in cui il metodo di Hamilton-Jacobi suggerisce anche un integrale primo del moto, altrimenti non evidente.

Consideriamo un punto materiale che si muove nel piano, viene descritto in coordinate polari (r, θ) ed è soggetto ad una forza di energia potenziale $U = \frac{f(\theta)}{r^2}$.

L'Hamiltoniana diventa.

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{f(\theta)}{r^2} \quad (2.10)$$

Usando il metodo ora descritto si vede subito che:

$$\frac{p_\theta^2}{2m} + f(\theta) = \text{costante} \quad (2.11)$$

Poiche' anche l'energia totale si conserva, il problema puo' essere risolto tramite opportuni integrali (come si suol dire, e' stato portato alle quadrature).

(Fine non necessario esame).

CAP. 9. TEOREMA DI LIOUVILLE E RICORRENZA DI POINCARÉ

1. Teorema di Liouville.

Abbiamo gia' introdotto lo spazio delle fasi di un sistema Γ^{2n} , come quello spazio di punti a $2n$ dimensioni nel quale ogni punto rappresenta uno stato del sistema, ovvero una scelta di (q, p) . Vogliamo dare a questo spazio una struttura di spazio di misura (matematica) assegnando ad ogni regione C di questo spazio un volume $V(C)$. Data una regione C di Γ^{2n} definiamo *volume* di tale regione la grandezza:

$$V(C) = \int_C dq^1 \dots dq^n dp_1 \dots dp_n \quad (1.1)$$

Senza entrare in sottigliezze matematiche, che impongono una regolarita' alla regione C perche' la definizione abbia senso, la (1.1) equivale a definire sullo spazio delle fasi l'usuale misura di Lebesgue.

Discutiamo cosa rappresenti fisicamente una regione C : abbiamo infinite copie (i punti) di un sistema fisico, strutturalmente identiche, ma che differiscono solo per le

condizioni iniziali. Ogni punto e' la posizione di partenza della traiettoria fisica. Il secondo membro delle equazioni di Hamilton $(\frac{\partial H}{\partial q^k}, -\frac{\partial H}{\partial p_k})$ rappresentano il campo delle "forze" che generano il moto. Notiamo che se l'Hamiltoniana non dipende dal tempo il campo di "forze" e' temporalmente invariante e per ogni punto dello spazio delle fase passa una sola traiettoria naturale (Useremo questa osservazione nel prossimo paragrafo).

Torniamo alla nostra misura. La definizione (9.1) dipende dalla scelta delle variabili (q, p) e non e' invariante per una trasformazione delle coordinate $Q = Q(q, p, t), P = P(q, p, t)$. Infatti in generale se C' e' la regione trasformata di C si ha (vedi i corsi di analisi):

$$\int_C dq^1 \dots dq^n dp_1 \dots dp_n = \int_{C'} \left| \det \frac{\partial(q^1, \dots, p_n)}{\partial(Q^1, \dots, P_n)} \right| dQ^1 \dots dQ^n dP_1 \dots dP_n \quad (1.2)$$

Poiche' abbiamo visto nel Cap.7, che il modulo dello Jacobiano di una trasformazione canonica e' uguale ad 1, la definizione (1.1) e' invariante per trasformazioni canoniche, cioe':

$$\int_C dq^1 \dots dq^n dp_1 \dots dp_n = \int_{C'} dQ^1 \dots dQ^n dP_1 \dots dP_n \quad (1.3)$$

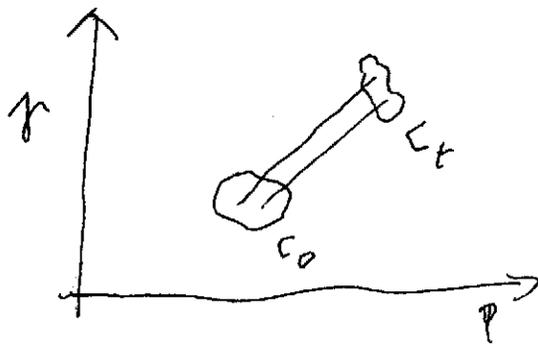
se la trasformazione e' canonica.

Una conseguenza ancora piu' importante del fatto che il modulo della Jacobiano e' uguale ad 1, e' dato dal seguente Teorema: prendiamo una regione C_o ed evolviamola secondo il moto naturale nella regione C_t . Allora:

Teorema 9.1 (Liouville):

"Il volume di C_t e' uguale a quello di C_o , cioe':

$$V(C_t) = V(C_o) \quad ". \quad (1.4)$$



Dimostrazione. A questo punto, dopo gli strumenti che si siamo costruiti nel Cap.7 e' quasi ovvia: abbiamo dimostrato che l'evoluzione temporale e' una trasformazione canonica tra i dati iniziali e quelli al tempo t e quindi il suo determinante Jacobiano ha modulo uguale ad 1, da cui la (1.4). \square

Capite bene che l'ottica con cui guardiamo i problemi in questo capitolo e' molto differente da quella i precedenti (e seguenti): prima guardavamo l'evoluzione temporale di *uno* stato, ora guardiamo l'evoluzione temporale di infinite copie, strutturalmente identiche, del sistema con diversi stati. E' il primo passo verso una "meccanica statistica", che verra' sviluppata in corsi successivi. In questa ottica, il Teorema di Liouville ci dice che il "fluido" che rappresenta gli stati del sistema fisico in esame si evolve come un fluido incompressibile, cioe' conservando il volume di una regione.

(Non necessario esame). Vi e' anche un'altra dimostrazione di questo Teorema di Liouville, di lunghezza equivalente, che prescinde dalle considerazioni del Cap.7. Ne accenniamo soltanto. Prendiamo la regione C , ne consideriamo il flusso entrante od uscente tramite le equazioni di Hamilton, lo trasformiamo in un integrale di volume tramite il teorema della divergenza, otteniamo una relazione integrale e poi, usando un lemma analogo a quello fondamentale del calcolo delle variazioni, arriviamo alla (9.4). Chi conosca la Meccanica dei ~~Continui (che in forma rigorosa sara' oggetto di uno studio al quarto anno)~~ riconosca' che la dimostrazione del corso e' uguale a quella di continuita' dal punto di vista Lagrangiano, mentre l'altra, solo accennata, a quella di continuita' dal punto di vista Euleriano. (Fine non necessario esame).

Diamo nel paragrafo successivo una conseguenza paradossale di questo Teorema

2. Ricorrenza di Poincare'.

Vogliamo vedere una interessante ed in un certo senso paradossale conseguenza del teorema di Liouville da poco discusso.

Teorema 2.1 (Poincare')

"Consideriamo un sistema hamiltoniano autonomo (cioe' con hamiltoniana non dipendente dal tempo) per il quale sia accessibile soltanto una regione Λ limitata dello spazio delle delle fasi. Prendiamo un punto qualunque x_o e consideriamo un intorno U_o comunque piccolo di tale punto (cioe' un insieme aperto che contenga tale punto). Facciamo evolvere tale intorno secondo le equazioni del moto di Hamilton: $U_o \rightarrow U(t)$. Allora qualunque sia τ esiste un $t^* > \tau$ tale che $U(t^*) \cap U(t_o) \neq \emptyset$."

Prima della dimostrazione (semplice) del teorema, vediamo cosa esso esprime. Preso un punto qualunque x_o ed ϵ comunque piccolo, esiste un altro punto x_* a distanza da x_o minore di ϵ che dopo un tempo (eventualmente molto grande) ritorna a meno di ϵ da x_o . Si ha cioe' una sorta di ricorrenza. Si noti che questo teorema non dice che il punto x_o torna in se stesso, ma esistono punti vicini che tornano vicini. Infatti x_o stesso puo' essere un punto "cattivo" che se ne va via. Un corollario, che non enunciamo esattamente, afferma che tali punti "cattivi" sono "eccezionali".

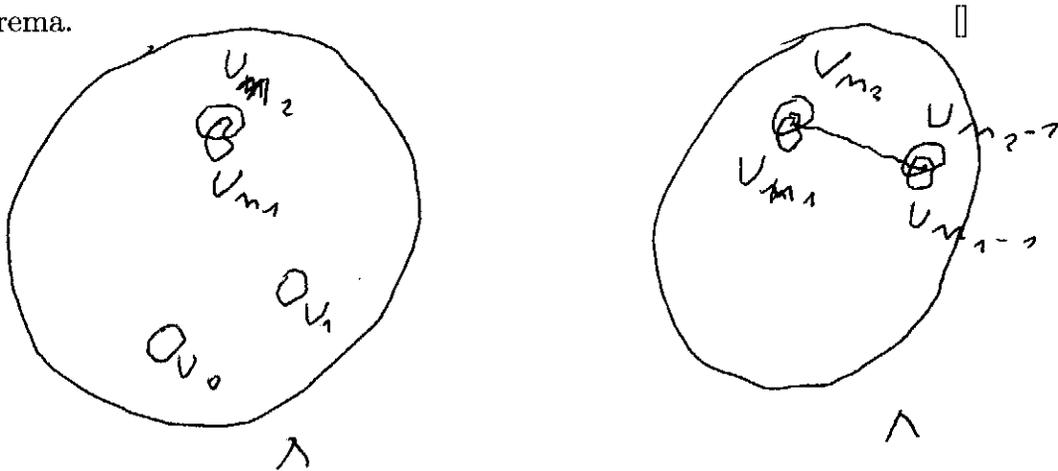
Dimostrazione.

Innanzitutto dimostriamo il teorema per una successione di tempi discreti t_n multipli di un tempo unitario scelto a piacere, per esempio τ . La dimostrazione con i tempi continui e' una conseguenza ovvia. Indichiamo con U_n l'evoluto di U_o al tempo t_n : $U_n = U(t_n)$. E' chiaro che devono esistere due n_1, n_2 distinti per i quali

gli insiemi U_{n_1}, U_{n_2} hanno intersezione non nulla, altrimenti si arriva ad un assurdo. Infatti se gli insiemi fossero tutti con intersezione reciproca nulla la misura di

$$\mu(\cup_{i=1\dots n} U_i) = \sum_{i=1\dots n} \mu(U_i) \quad (2.1)$$

ove con $\mu(\cdot)$ indichiamo la misura dell'insieme. Per il teorema di Liouville tutti gli U_i hanno la stessa misura e quindi per $n \rightarrow \infty$ il membro a destra della (2.1) tende all'infinito. Dall'altra parte $\cup_{i=1\dots n} U_i \subseteq \Lambda$ e quindi $\mu(\cup_{i=1\dots n} U_i) \leq \mu(\Lambda)$ e questo ultimo e' minore di infinito per ipotesi. Il membro a destra della (2.1) e' quindi finito e siamo arrivati ad un assurdo. Abbiamo quindi dimostrato che esistono due evoluti distinti con una intersezione non nulla. Osserviamo ora che $\mu(U_{n_1} \cap U_{n_2}) = \mu(U_{n_1-k} \cap U_{n_2-k})$ per $\forall k$ perche' il sistema e' autonomo e quindi il campo delle velocita' nello spazio delle fasi non cambia nel tempo e l'intersezione va nella intersezione. Infine basta scegliere k come il minore tra n_1 ed n_2 per aver dimostrato il teorema.



Notare che l'ipotesi della limitatezza dello spazio delle fasi accessibile e' stata essenziale. Per esempio per una particella libera cio' non sarebbe vero ed infatti basta dare un po' di velocita' al punto perche' lui non ritorni! Abitualmente ~~e'~~ **sono** l'interazione e la conservazione dell'energia che limitano lo spazio accessibile.

Vediamo subito un paradosso (cioè una cosa vera che sembra falsa). Applichiamo questo teorema alla termodinamica. Pensiamo di avere un recipiente diviso in due parti A e B fra loro non in comunicazione ed un numero grande $N=10^{23}$ di molecole messe tutte in A. Togliamo la separazione fra le due parti e l'esperienza ci indica che le molecole diffonderanno dalla parte piena a quella vuota. Il teorema di ricorrenza ci dice che, salvo caso eccezionali, vi sarà un tempo in cui tutte le molecole sono ritornate in A lasciando B vuota. Naturalmente questo comportamento antitermodinamico contrasta con l'esperienza e la nostra intuizione fisica. La risposta è che il tempo perché ciò avvenga è spaventosamente grande ben superiore all'età dell'universo. Una stima molto rozza di ciò è la seguente: l'insieme in cui tutte le particelle sono dalla stessa parte ha misura piccolissima. Infatti, guardando solo alle posizioni, se A e B hanno lo stesso volume, la probabilità di avere una particella in A è $1/2$ e quindi tutte le particelle in A è $2^{-10^{23}}$ e quindi il tempo necessario a ricoprire il possibile spazio delle fasi con insiemi così piccoli, è lunghissimo.

In conclusione questo teorema (ovviamente vero) non ha rilevanza in meccanica statistica e termodinamica. È però interessante per sistemi ad un numero piccolo di gradi di libertà come, per esempio, quelli studiati dalla meccanica celeste.

3. Digressione linguistica.

A questo punto rispondo alla domanda linguistica posta nella introduzione: perché la materia si chiama "meccanica analitica"? Il fatto nasce alla fine del settecento dal trattato di Lagrange, nel quale si afferma che nell'intero libro si usano solo formule di analisi per descrivere il moto senza mai ricorrere a figure.

Fino ad allora i notevoli calcoli di meccanica (soprattutto della statica) si svolgevano essenzialmente con disegni, scomponendo le forze. Alcuni risultati erano rilevanti, pensiamo a cupole come quella di S.Maria in Fiore a Firenze fatta dal Brunelleschi, svolta con disegni e modellini. Fino all'avvento dei calcolatori, gli ingegneri procedevano molto per disegni e vi era anche come materia di insegnamento la "statica grafica". E' stato quindi un notevole passo concettuale formalizzare le equazioni di evoluzione, prescindendo dai disegni geometrici. Per ironia della sorte, come talvolta avviene nella scienza, oggi gli studi avanzati di "meccanica analitica" sono fra i piu' geometrici della fisica-matematica, usando non piu' la geometria euclidea che ben conoscete, ma una geometria piu' avanzata, quella differenziale.

CAP. 10. PICCOLE OSCILLAZIONI

Introduciamo un metodo approssimato per studiare l'evoluzione di un sistema meccanico. L'idea di fondo e' di sviluppare in serie di Taylor la Lagrangiana di un sistema, di fermarsi all'ordine piu' basso e di approssimare i moti veri con i piccoli moti che ne risultano. Se partiamo da un punto qualsiasi l'approssimazione ottenuta vale per tempi molto piccoli e poi si distrugge. E' molto interessante invece osservare che se partiamo nell'intorno di un punto di equilibrio stabile, l'approssimazione vale per un tempo molto piu' lungo, specialmente per alcune caratteristiche del moto. Torneremo su questo punto alla fine del capitolo.

Consideriamo un sistema descritto da una Lagrangiana $L = T - U$ con T che sia una forma quadratica nelle \dot{q}^h (cioe' per un sistema meccanico, sia soggetto a vincoli non dipendenti dal tempo), e $U(q)$ non dipenda dal tempo.

Prendiamo un punto di equilibrio stabile \bar{q}^h . Qui ricordiamo che cosa voglia dire

un punto di equilibrio, ed un punto di equilibrio stabile.

1. Richiami sulla stabilita' dei punti di equilibrio.

Chiamiamo posizione di *equilibrio*, una posizione tale che, trovandosi in essa il sistema con atto di moto nullo, vi permane indefinitivamente.

Questa definizione e' equivalente a cercare i punti *critici* della U , \bar{q}^h cioe' i punti tali che:

$$\frac{\partial U}{\partial q^h} \Big|_{q^h = \bar{q}^h} = 0 \quad (1.1)$$

Un punto di equilibrio vien detto stabile se dato un ϵ arbitrario esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^n (|q^h(0) - \bar{q}^h|^2 + \alpha | \dot{q}^h(0) |^2) < \delta_\epsilon \quad (1.2)$$

dove le costanti α_h β_h sono costanti
(α e' un numero messo solo per ragioni dimensionali)

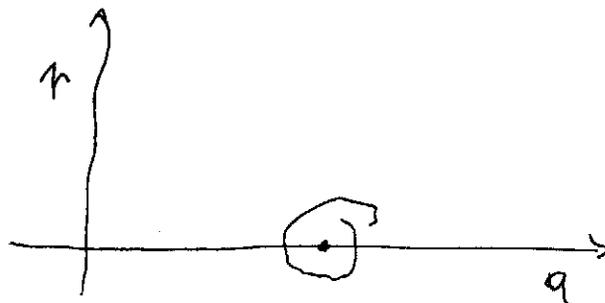
implica per ogni t

$$\sum_{h=1}^n (|q^h(t) - \bar{q}^h|^2 + \alpha | \dot{q}^h(t) |^2) < \delta_\epsilon \quad (1.3)$$

In parole povere un punto di equilibrio si dice stabile se una piccola perturbazione nello spazio delle fasi (cioe' in posizione e velocita') lascia il sistema indefinitivamente vicino alla posizione di equilibrio.

Un punto di equilibrio non stabile, viene chiamato instabile. (Fig.1)

Fig.1



Vi e' un teorema, la cui dimostrazione viene ricordata nei richiami (Teorema di Dirichelet), che da' una condizione sufficiente per la stabilita': basta che il punto sia una posizione di minimo isolato del potenziale. Questa condizione e' anche necessaria in tutti i casi in cui il minimo si riconosca tramite derivate di ordine finito (cioe' in tutti i casi che incontrerete nella vostra vita professionale !). Molto interessante e' il caso in cui basta arrivare al secondo ordine nelle derivate per riconoscere il minimo. Prendiamo un punto critico ed approssimiamo la funzione con una forma quadratica; si hanno diversi casi: l'approssimazione e' 1) e' un paraboloide rivolto verso l'altro, si ha un minimo, 2) e' un paraboloide rivolto verso il basso, si ha un massimo 3) si ha un punto di sella (minimo in qualche ~~dimensione~~ ^{direzione} e massimo in altre). Solo nel primo caso il punto e' stabilibile.

Per vedere se la forma quadratica che approssima la funzione e' un paraboloide o meno, guardiamo gli autovalori. Se tutti sono positivi si ha un punto stabile, altrimenti no (l'autovalore nullo e' un caso limite in cui l'approssimazione al secondo ordine non basta a stabilire la stabilita' o meno).. Ricordo un facile criterio, che avete svolto nei corsi precedenti di matematica, che agevola il calcolo nei sistemi a due gradi di liberta': per vedere se una forma quadratica simmetrica $U = U_{11}x^2 + U_{12}xy + U_{21}yx + U_{22}y^2$ ha un minimo in zero, basta guardare l'Hessiano H , definito come $H = U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}$, e U_{11} : se ambedue sono positivi vi e' un minimo nell'origine. (In realta' se l'Hessiano e' positivo la forma e' definita in segno per cui si ha un minimo o un massimo, se negativo un punto di sella. Se nullo, questo criterio non dice niente e bisogna studiare la funzione con altri metodi.)

Torneremo su questo punto nel prossimo paragrafo.

2. Linearizzazione del moto.

Incominciamo a considerare l'energia potenziale $U(q^1, \dots, q^n)$ ed sviluppiamola in serie di Taylor attorno ad un punto di equilibrio stabile \bar{q} ; chiamato $\eta^h = q^h - \bar{q}^h$:

$$U(q^1, \dots, q^n) = U(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U}{\partial q^h} \Big|_{\substack{(q^h = \bar{q}^h) \\ q = \bar{q}}} \eta^h + \frac{1}{2} \sum_{h=1, k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q^h \partial q^k} \Big|_{\substack{(q^h = \bar{q}^h, q^k = \bar{q}^k) \\ q = \bar{q}}} \eta^h \eta^k + \text{termini ordine superiore} \quad (2.1)$$

Il primo termine del secondo membro e' costante. Poiche' l'energia potenziale e' sempre definita a meno di una costante, possiamo prendere tale termine nullo, senza perdita di generalita'. Il secondo termine e' nullo, essendo per ipotesi la posizione \bar{q} di equilibrio. Quindi, trascurando i termini di ordine superiore al secondo, l'energia potenziale puo' essere scritta:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{h=1, k=1}^n U_{hk} \eta^h \eta^k ; \text{ ove } U_{hk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^h \partial q^k} \Big|_{\substack{(q^h = \bar{q}^h, q^k = \bar{q}^k) \\ q = \bar{q}}} \quad (2.2)$$

Sviluppiamo allo stesso ordine l'energia cinetica T . In generale essa ha la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1, k=1}^n a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k \quad (2.3)$$

per cui l'ordine piu' basso si ha calcolando a_{hk} nella posizione di equilibrio. Poiche' evidentemente $\dot{\eta} = \dot{q}$, si ha in questa approssimazione:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1, k=1}^n T_{hk} \dot{\eta}^h \dot{\eta}^k ; \text{ ove } T_{hk} = a_{hk} \Big|_{\substack{(q^h = \bar{q}^h, q^k = \bar{q}^k) \\ q = \bar{q}}} \quad (2.4)$$

In conclusione nella approssimazione dei moti linearizzati (detti anche piccole oscillazioni) si ha:

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{h=1, k=1}^n (T_{hk} \dot{\eta}^h \dot{\eta}^k - U_{hk} \eta^h \eta^k) \quad (2.5)$$

Posta la L così' ottenuta nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^h} - \frac{\partial L}{\partial \eta^h} = 0 \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

si ottengono le equazioni del moto:

$$\sum_{k=1}^n (T_{hk} \ddot{\eta}^k + U_{hk} \eta^k) = 0 \quad ; \quad (h = 1, \dots, n) \quad . \quad (2.7)$$

Si tratta di un sistema differenziale lineare a coefficienti costanti di n equazioni in n funzioni incognite.

3. Frequenze delle piccole oscillazioni.

Cerchiamo la soluzione generale del sistema (2.7). Osserviamo che essendo il sistema differenziale lineare la combinazione di due soluzioni e' ancora una soluzione (Ovviamente se fosse non lineare questa proprieta' si perderebbe). Basta cercare quindi n soluzioni particolari indipendenti, ognuna delle quali dipenda da due parametri, per ottenere come combinazione lineare la soluzione generale del problema.

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della (2.7) della forma:

$$a_k e^{i \omega t} \quad (3.1)$$

ove a_k e ω sono costanti da determinare, i e' l'unita' complessa, $i^2 = -1$ e della (3.1) prendiamo solo la parte reale. (Ricordo che $e^{ix} = \cos x + i \sin x$). L'uso dei numeri complessi e' solo comodo, ma non indispensabile. Potete svolgere i conti del resto del paragrafo anche senza farne uso.

Poniamo la (3.1) nella (2.7), semplifichiamo il termine moltiplicativo comune che supponiamo non nullo, e si ha:

$$\sum_{k=1}^n (-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}) a_k = 0 \quad ; \quad (h = 1, \dots, n) \quad . \quad (3.2)$$

Si tratta di un sistema di n equazioni algebriche nelle incognite a_k con ω come parametro (da determinare). Una soluzione è quella banale in cui ogni $a_k = 0$. Naturalmente questa soluzione non fa fare passi avanti nella ricerca della soluzione generale del sistema differenziale (2.7). Dobbiamo cercare quindi soluzioni non nulle. Ma un ben noto teorema sui sistemi lineari di equazioni algebriche assicura che, se il determinante dei coefficienti è diverso da zero, la soluzione è unica (e quindi tutta nulla). Dobbiamo quindi imporre che il determinante dei coefficienti sia uguale a zero. Quindi:

$$\det(-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}) = 0 \quad (3.3)$$

Si ha quindi una equazione algebrica di grado n nelle ω^2 .

(Non necessario esame)(Tale equazione viene chiamata "secolare" per reminiscenze storiche con la meccanica celeste in cui compare). (Fine non necessario esame).

Risolta si trovano gli ω per cui l'ipotesi (3.1) ha successo. Queste ω (ovvero le frequenze associate) vengono chiamate con vari nomi equivalenti: frequenze proprie, frequenze normali, frequenze delle piccole oscillazioni.

Poiché l'equazione (3.3) è di grado n , essa avrà n soluzioni distinte od eventualmente coincidenti. Quest'ultimo caso necessiterebbe di una breve, ma ulteriore, discussione e per mancanza di tempo non la facciamo.

Si può dimostrare che se il punto era di equilibrio stabile riconoscibile dalle derivate seconde, tutte le ω^2 trovate vengono positive (se non vi viene così, avete sbagliato i conti!) e quindi la soluzione particolare trovata corrispondente a un ω_h è della forma:

$$a_k^h \cos(\omega_h t + \phi_h) \quad (3.4)$$

per cui la soluzione generale e' (scambiando gli indici muti h e k):

$$\eta_h = \sum_{k=1}^n a_h^k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (3.5)$$

Potremmo fare un cambiamento di variabili in cui le soluzioni diventano proprio moti armonici (di differente frequenza in ogni variabile), detti moti normali, ma ci fermiamo qui per ragioni di tempo.

(Non necessario esame).

Ci possiamo domandare quale sia la bonta' dell'approssimazione svolta. Dipende in modo essenziale da quale grandezza vogliamo considerare. Diro' una affermazione che qui rimane incomprensibile, ma potrete riconsiderare quando farete la meccanica quantistica: a causa delle piccole oscillazioni gli spettri osservati vengono spessissimo lineari. (Fine non necessario esame).

Applicazioni delle piccole oscillazioni verranno spesso negli esercizi. Un esempio svolto verra' dato nel Cap.14 .

CAP. 11. IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Vogliamo studiare un esempio di grande interesse: il moto di due corpi puntiformi interagenti fra loro tramite una forza di energia potenziale dipendente solo dalla mutua distanza. Come e' ben noto, da questo problema ha avuto origine il modello di Newton, cercando di spiegare la dinamica del sistema solare. Pertanto il prototipo dei due corpi in questione sono il Sole e la Terra. Naturalmente il metodo e' molto piu' generale, investe molta parte della Meccanica Celeste. Il problema dei due corpi si incontra anche nella meccanica atomica, ove pero' la soluzione classica da' solo un suggerimento alla soluzione piu' esatta dovuta alla Meccanica Quantistica.

1. Riduzione ad un problema piano.

Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 , di massa m_1 e m_2 rispettivamente. Tali punti interagiscono soltanto tra di loro tramite una forza di energia potenziale U dipendente solo dal modulo della loro mutua distanza. Presa un origine O arbitraria e posto $OP_1 = \underline{r}_1$, $OP_2 = \underline{r}_2$, la Lagrangiana del sistema e':

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \quad (1.1)$$

Prendiamo come nuove variabili la mutua distanza e la posizione del baricentro

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad ; \quad \underline{R} = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2)$$

In queste nuove variabili la Lagrangiana risulta:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\underline{r}}^2 - U(r) \quad ; \quad r = |\underline{r}| \quad (1.3)$$

ove μ , chiamata *massa ridotta*, e' $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, ovvero $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. (Si vede quindi che la massa ridotta coincide con quella usuale se le due masse sono molto diverse, come nel caso Terra-Sole, mentre diventa meta' se le due masse sono uguali).

Si vede bene dalla (1.3) che il baricentro si muove come un punto libero e la Lagrangiana rimanente e' quella di un punto (fittizio) di massa μ soggetto ad una campo esterno $U(r)$. Dimentichiamoci del baricentro, il cui moto rettilineo uniforme non presenta alcuna difficolt', e concentriamoci sul moto di questo punto, *fittizio*.

La forza a cui e' soggetto il punto e' sempre diretta verso il punto O corrispondente a $r = 0$. Dalla seconda equazione cardinale segue che il momento della quantita' di moto del punto si conserva, cioe':

$$\mu \underline{r} \wedge \dot{\underline{r}} = \underline{K}_O = \text{cost} \quad (1.4)$$

cioe' il moto si svolge nel piano ortogonale a \underline{K}_O . (Nel caso del sistema Terra-Sole questo piano viene chiamato piano della eclittica).

2. Potenziali centrali.

Nel piano del moto introduciamo un sistema di coordinate polari (r, θ) , nelle quali la Lagrangiana diventa:

$$L = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (2.1)$$

Poiche' la variabile θ nella L e' ignorabile, si ha un integrale primo del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l = \text{cost} \quad (2.2)$$

la componente del che e' appunto il momento della quantita' di moto. *(perpendicolare al piano del moto. Poiche' il moto e' piano, questa e' l'unica componente non nulla.)*

Ricavando $\dot{\theta}$ dalla (2.2) e sostituendolo nella (2.1) si ottiene:

$$L = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - \left[\frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) \right] \quad (2.3)$$

Il termine $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ viene chiamato potenziale "centrifugo". Abbiamo trovato il moto unidimensionale di un punto (fittizio) di massa μ che si muove in un campo di forze (fittizie) di energia potenziale U_{eff} (detto potenziale efficace):

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad (2.4)$$

Il problema dato dalla (2.3) e' facilmente risolvibile per separazione delle variabili. Infatti la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, e quindi l'energia totale si conserva:

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E = \text{cost} \quad (2.5)$$

da cui

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(r))} \quad (2.6)$$

e

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}} \quad (2.7)$$

Abbiamo trovato tramite integrali t in funzione di r . Invertendo si può trovare l'evoluzione di r . Il \pm deriva dall'aver fatto uso di una grandezza conservata (l'energia) quadratica nella velocità. La questione va ~~derivata~~ ^{affrontata} usando direttamente le equazioni del moto. Anche l'inversione è ~~un minimo~~ delicata, avviene a tratti e poi le soluzioni vanno raccordate. Non entro in questo punto, che spero sarà più chiaro dopo il prossimo paragrafo. Trovata la $r(t)$ la (2.2), dopo una integrazione, ci dà la $\theta(t)$.

Per trovare la forma della traiettoria, basta eliminare il tempo dalle due leggi parametriche del moto, ora trovate. Conviene però fare direttamente il conto; la (2.3) può essere scritta come

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (2.8)$$

che assieme alla (2.6) dà:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\mu r^2}{l} \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{eff}(r))} \quad (2.9)$$

La (2.9) si può risolvere per separazione delle variabili e dà la traiettoria cercata (il \pm va sempre risolto direttamente con le equazioni del moto, raccordando eventualmente i pezzi delle traiettorie trovate).

3. Il moto newtoniano.

Lasciamo ora il caso generale e concentriamoci su quello newtoniano:

$$U = -\frac{k}{r}, \quad k > 0 \quad (3.1)$$

(Anche il caso di $k < 0$, caso di Coulomb, è interessante, specie nell'ambito microscopico. La discussione segue immediatamente dalle conclusioni di questo paragrafo).

Vogliamo trovare la forma della traiettoria. Prendiamo la (2.9) con l'energia potenziale (3.1), separiamo le variabili r e θ . Si ha:

$$\theta(r) - \theta_o = \pm \int_{r_o}^r \frac{ld\rho}{\mu\rho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{l^2}{2\mu\rho^2} - \frac{k}{\rho})}} \quad (3.2)$$

L'integrazione da' un *arcos*, invertiamo poi le equazioni trovate e saltando i calcoli un po' tediosi, si ottiene:

$$\frac{1}{r} = b \left[1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_o) \right] \quad (3.3)$$

con

$$b = \frac{\mu k}{l^2} ; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{E}{E_1}} ; \quad E_1 = \frac{\mu k^2}{2l^2} \quad (3.4)$$

La (3.3) e' una conica, scritta in coordinate polari con l'origine in uno dei fuochi, di cui ϵ e' l'eccentricita'. La conica puo' essere un'ellisse, una parabola od una iperbole a secondo del valore di ϵ . Infatti per $\epsilon < 1$ il secondo membro della (3.3) non puo' essere mai nullo e quindi r non puo' mai andare all'infinito e la conica e' una ellisse. Simile ragionamento per la parabola ($\epsilon = 1$) che diverge per un solo valore di θ . Per $\epsilon > 1$ infine si ha una iperbole, che infatti diverge per due valori di θ simmetrici rispetto a θ_o . Riassumendo:

$$\begin{aligned} \epsilon < 1 \text{ cioe' } E < 0 & : \text{ ellissi} \\ \epsilon = 1 \text{ cioe' } E = 0 & : \text{ parabola} \\ \epsilon > 1 \text{ cioe' } E > 0 & : \text{ iperbole} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Come caso particolare, per $\epsilon = 0$ si ha un cerchio.

Abbiamo visto che il valore dell'energia totale E determina il tipo di moto. Naturalmente qui la E non e' definita a meno di una costante additiva, perche' tale costante e' stata scelta nella (3.1): l'energia potenziale e' nulla all'infinito.

Abbiamo trovato le due prime leggi di Keplero:

I Legge di Keplero:

”I pianeti descrivono orbite ellettiche ed uno dei fuoché e' occupato dal Sole”.

II legge di Keplero

”Il raggio r durante il moto spazza aree uguali in tempi uguali”. (Cioe' si ha la costante della velocita' areolare $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$).

Vi e' anche una terza legge, anche questa osservata da Keplero sperimentalmente sui 6 pianeti visibili ad occhio nudo.

III legge di Keplero:

” Il rapporto il cubo del semiasse maggiore ed il quadrato del periodo di rivoluzione e' indipendente dal pianeta considerato”.

La dimostrazione di questa legge, usando le equazioni trovate in questo paragrafo e supponendo k proporzionale a μ , e' un facile calcolo, che omettiamo per brevitá'. Facciamo notare che nel sistema solare le prime due leggi sono rigorose (trascuranto ovviamente le perturbazioni degli altri pianeti), mentre la terza legge e' approssimata, perche' in realta' per la legge di gravitazione universale k e' proporzionale alla massa del pianeta, che coincide con quella ridotta solo se la massa del pianeta e' trascurabile rispetto a quella del Sole. Per i pianeti piu' vicini al Sole (e quindi anche per la Terra) cio' e' vero, mentre non e' completamente vero per Giove (una stella mancata!) che ha una massa circa un centesimo di quella del Sole.

(Non necessario esame) A titolo di curiosita' osserviamo che una legge di scala analoga alla terza Legge di Keplero era prevedibile per orbite in scala, usando la similitudine meccanica. Infatti la legge del moto da':

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k \frac{r}{r^3} \quad (3.6)$$

Scalando

$$r' = \alpha r \ ; \ t' = \beta t \quad (3.7)$$

la legge del moto e' invariante per $\frac{\alpha^3}{\beta^2} = 1$. (Fine non necessario esame).

4. Brevissimi cenni sui problemi inversi.

Un problema molto naturale che si pone e' di risalire dal moto alle forze che lo generano. Naturalmente se conoscessimo tutta la traiettoria con assoluta esattezza, basterebbe farne le derivate seconde e risalire alla forza, ma nella pratica non e' cosi'. Conosciamo solo alcune caratteristiche del moto e ci domandiamo se sono sufficienti a risalire alle forze e per quale via. Lo studio che si apre e' chiamato *problema inverso* ed e' di estremo interesse per la fisica e la matematica applicata in genere. Nella nostra vita di tutti i giorni incontriamo tantissimi problemi inversi, da quelli medici (radiografie, TAC, Risonanza Magnetica), a quelli tecnici (per esempio sonar), alla visione stessa. Non li discutiamo qui per mancanza di tempo; voglio solo dire poche parole sull'argomento. Un tipico problema inverso e' cercare di risalire dall'effetto della diffusione di un fascio di particelle microscopiche incidente su di un bersaglio ai dettagli della interazione. Lo studierete in corsi successivi, usando la meccanica piu' adeguata alle dimensioni microscopiche, quella quantistica. Qui voglio solo osservare che nello studio dei problemi inversi nasce spontaneo un problema di grande rilevanza fisica: i *problemi mal posti*. In questo corso siamo abituati ad avere dati iniziali sufficienti perche' la soluzione sia unica. Nella vita non e' cosi': per esempio gli angoli della TAC sono in numero finito e i risultati non possono darci l'immagine del corpo umano perfetta, cioe' i dati disponibili non danno una unica soluzione. Pero' l'importante che le soluzioni differiscano meno della precisione medica o chirurgica; se vi e' un tumore e' inutile localizzarlo al centesimo di millimitro, ma basta la precisione necessaria all'intervento.

Capite bene la relazione di questi concetti, con la stabilita' descritta al precedente capitolo e soprattutto la instabilita' del moto. In quest'ultimo caso, piccoli errori sui dati iniziali possono avere effetti catastrofici dopo qualche tempo rendendo le previsioni aleatorie (come le previsioni metereologiche a distanza di qualche settimana). Ci fermiamo qua, rinviando lo studio di questi fenomeni ad altri corsi.

CAP. 12. MOTI RELATIVI E FORZE APPARENTI

Riprendiamo in questo Capitolo un argomento che avete gia' svolto al primo anno. Vogliamo familiarizzarci un poco con un problema che giochera' un ruolo fondamentale nella seconda parte del corso.

1. Cinematica relativa.

Consideriamo due sistemi di riferimento S ed S' l'uno in moto rispetto all'altro e convenzionalmente chiamiamo assolute le grandezze riferite al primo e relative le grandezze riferite al secondo. Vogliamo vedere il legame fra le grandezze cinematiche, velocita' ed accelerazione, scritte rispetto al primo ed al secondo. Sia O l'origine del primo sistema di riferimento ed O' l'origine del secondo. Ovviamente si ha

$$OP = OO' + O'P \quad ; \quad OP = (x, y, z) \quad ; \quad O'P = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k} \quad (1.1)$$

ove $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono i versori dei tre assi coordinati del sistema S' . Derivando rispetto al tempo:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_r + \underline{v}_\tau \quad (1.2)$$

ove $\underline{v}_a = \frac{d}{dt}OP$ viene detta velocita' assoluta, $\underline{v}_r = \dot{x}'\underline{i} + \dot{y}'\underline{j} + \dot{z}'\underline{k}$ velocita' relativa e $\frac{d}{dt}OO' + x'\frac{d}{dt}\underline{i} + y'\frac{d}{dt}\underline{j} + z'\frac{d}{dt}\underline{k}$ velocita' di trascinamento. Il significato di quest'ultima

grandezza e' chiaro: si tratta della velocita' che possiede il punto geometrico del sistema mobile che si trova sovrapposto in quell'istante al punto fisico P . (In modo suggestivo si puo' dire la velocita' di trascinamento e' quella velocita' che avrebbe il punto P se fosse incollato al sistema mobile in quell'istante). (Attenzione ad una possibile imprecisione: talvolta viene detto dagli studenti che la velocita' di trascinamento e' la velocita del sistema mobile rispetto a quello fisso. Naturalmente questa definizione e' incompleta, perche' solo nel caso di un moto traslatorio tutti i punti del sistema mobile hanno la stessa velocita').

Derivando una altra volta si ottiene:

$$\underline{a} = \underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c \quad (1.3)$$

ove il significato delle accelerazioni assoluta, relativa e di trascinamento e' ovvio. Il termine $\underline{a}_c = 2\underline{\omega} \wedge \underline{v}_r$, ove $\underline{\omega}$ indica la velocita' angolare di S' , viene chiamata velocita' complementare o di Coriolis.

2. Forze apparenti.

Fino a qui abbiamo fatto della cinematica. Passiamo ora alla dinamica. E' un fatto sperimentale che in un sistema di riferimento fermo rispetto alle stelle fisse vale la legge di Newton:

$$m\underline{a} = \underline{f} \quad (2.1)$$

ove \underline{f} rappresentano le forze che agiscono sul punto materiale. Ci domandiamo cosa succede alla legge (2.1) cambiando sistema di riferimento. Essa diventa:

$$m\underline{a}_a = \underline{f} = m(\underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c) \quad (2.2)$$

cioe'

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{f} - m\mathbf{a}_\tau - m\mathbf{a}_c \quad (2.3)$$

Osserviamo subito che se S' si muove di moto traslatorio uniforme le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis sono nulle e quindi le leggi del moto restano invariate. Si tratta della famosa legge di Relativita' Galileiana. (E' celebre il brano del "Dialogo dei massimi sistemi" di Galilei che osserva che una persona nella stiva di una nave ed impossibilitata a vedere all'esterno, non puo' accorgersi se la nave sia ferma o si muova uniformemente rispetto alla costa). (Osserviamo che ormai ~~che~~ questa proprieta' di relativita' ci e' ben familiare, ma nel passato ha urtato molto col senso comune. Per esempio a molti sembrava assurdo che la terra si movesse e noi non ci accorgessimo subito del suo moto).

Consideriamo ora un sistema in moto non traslatorio uniforme rispetto alle stelle fisse (detto sistema non inerziale) e vogliamo formulare anche in questo una legge analoga all (2.1). Essa vale se definiamo due nuove forze $\mathbf{f}_\tau = -m\mathbf{a}_\tau$ e $\mathbf{f}_c = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$ dette apparenti o non inerziali:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{f} + \mathbf{f}_\tau + \mathbf{f}_c \quad (2.4)$$

Quindi si puo' svolgere in un sistema non inerziale tutta la meccanica trattata nei capitoli precedenti pur di tener conto delle forze apparenti. Naturalmente non e' indispensabile fare un cambiamento di riferimento, ma puo' essere molto comodo in tanti casi. Per esempio noi viviamo sulla terra e siamo portati a considerare un sistema solidale ad essa. Tale sistema, a causa della sua rotazione della terra, e' non inerziale e quindi dobbiamo tener conto delle forze apparenti. Quanto sono grandi? Dipende dal problema in esame. Se giochiamo a calcio od a tennis sono irrilevanti. La deviazione dei gravi verso oriente , dovuta alla forza di Coriolis, per un grave che cade di pochi metri e' piccola (millimetri per centinaia di metri

di caduta). Se trattiamo un problema missilistico e' fondamentale. Come gioco scherzoso, consideriamo un missile lanciato al polo che arrivi dopo mezz'ora a colpire un bersaglio all'equatore. Se trascuriamo la forza di Coriolis quanto sbagliamo? Il conto e' immediato, passando ad un sistema fermo rispetto alle stelle fisse, nel quale in mezz'ora il bersaglio all'equatore si e' spostato di una grandezza pari alla lunghezza dell'equatore diviso 48, cioe' sbagliamo di circa 830 KM ! ~~Un altro~~ Altri campi in cui l'effetto della rotazione terrestre e' apparentemente piccolo, ma in effetti molto sensibile, ^{sono} la meteorologia e l'oceanografia.

Osserviamo che ci sono due eventi coincidenti: in un sistema non inerziale le stelle fisse non si muovono di moto traslatorio uniforme e contemporaneamente ci sono delle forze apparenti. E' una pura coincidenza casuale o vi e' un rapporto causale? La relativita' generale, che non svolgeremo in questo corso, risponde : c'e' un rapporto di causa ed effetto. Approfitto per farvi osservare, che, se a questa domanda si risponde, molte altre domande rimangono spesso senza risposta. Non avendola, la filosofia (dominio di cui la fisica fa parte come filosofia naturale), per un umano desiderio di completezza, cerca di dare una risposta in ogni caso, anche se non suffragata da molti elementi.

CAP. 13. RICHIAMI

In questo capitolo abbiamo riassunto alcune nozioni, da voi gia' studiate al primo anno e di cui facciamo uso in questo corso. Richiamiamo i concetti esaminando un sistema di N punti materiali. Il passaggio al continuo e' abbastanza immediato.

1. Risultante e momento risultante.

Dato un sistema di N vettori applicati \underline{E}_i con punti di applicazione P_i , vengono

definiti risultante \underline{R} e momento risultante rispetto al polo O , \underline{M}_o i vettori:

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \quad ; \quad \underline{M}_o = \sum_{i=1}^N OP_i \wedge \underline{F}_i \quad (1.1)$$

2. Terza legge di Newton.

E' un fatto sperimentale, che pone delle limitazioni alla mutua interazione dei corpi. Afferma che dati due punti materiali P_i, P_j la forza \underline{F}_{ij} che il primo esercita sul secondo e' uguale e contraria a quella \underline{F}_{ji} che secondo esercita sul primo, cioe': $\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$; inoltre le due forze sono dirette lungo la congiungente. (L'insieme delle due proprieta' precedenti equivale a dire che le due interazioni formano una coppia di braccio nullo). Tale principio viene chiamato anche di azione-reazione.

Questo principio e' quasi sempre valido nella nostra realta' fisica, ma si possono immaginare teorie coerenti anche senza l'azione-reazione. In realta' nella meccanica analitica questo principio entra solo nella formulazione della Lagrangiana e si possono immaginare funzioni Lagrangiane diverse dall'energia cinetica meno quella potenziale coerenti, che prescindano da questo principio. Come curiosita' diamo un esempio nella parte facoltativa del Capitolo 4.

Dal principio di azione-reazione si ha una conseguenza immediata ma notevole. Consideriamo le forze interne ad un sistema $\underline{F}_i^{(i)}$, cioe' le mutue interazioni dei punti materiali che lo compongono. il risultante ed il momento risultante delle forze interne e' nullo:

$$\underline{R}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(i)} = 0 \quad ; \quad \underline{M}_o^{(i)} = \sum_{i=1}^N OP_i \wedge \underline{F}_i^{(i)} = 0 \quad (2.1)$$

3. Equazioni Cardinali.

Consideriamo un sistema di N punti materiali, ognuno di massa m_i e soggetto sia a forze interne, sia a forze esterne al sistema $\underline{F}_i^{(e)}$. Ogni punto e' soggetto alle

legge di Newton:

$$m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i^{(e)} + \underline{F}_i^{(i)} \quad (3.1)$$

Definiamo ora quantita' di moto del sistema \underline{Q} e momento della quantita' di moto rispetto al polo 0, \underline{K}_o :

$$\underline{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \quad ; \quad \underline{K}_o = \sum_{i=1}^N OP_i \wedge m_i \underline{v}_i \quad (3.2)$$

Dalla (3.1), sommando su i , tenendo conto della prima delle (2.1), si ha immediatamente la Prima Equazione Cardinale:

$$\dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(e)} \quad (3.3)$$

che, usando il concetto di baricentro $OG = \sum_{i=1}^N OP_i$ e massa totale $M = \sum_{i=1}^N m_i$ puo' anche scriversi:

$$M \dot{v}_G = \underline{R}^{(e)} \quad (3.4)$$

Moltiplicando vettorialmente la (3.1) per OP_i e sommando su i e tenendo conto della seconda delle (2.1), si ottiene la Seconda Equazione Cardinale della Meccanica:

$$\dot{\underline{K}}_o = \underline{M}_o^{(e)} - \underline{v}_o \wedge \underline{Q} \quad (3.5)$$

Quando $\underline{v}_o = 0$, cioe' il punto O e' fermo, l'ultimo termine nella (3.5) scompare. La dimostrazione della (3.5) e' facile, svolgendo il termine $\dot{\underline{K}}_o$ e ricordando che il prodotto vettoriale di \underline{v}_i per se stesso e' nullo.

Le equazioni cardinali costituiscono un sistema di due equazioni vettoriali, cioe' sei equazioni scalari. Esse sono dense di significato fisico, necessarie ma non sufficiente per determinare il moto. Vi e' un caso notevole in cui queste equazioni diventano anche sufficienti: il corpo rigido. Ci si puo' rendere conto di questo fatto osservando che il corpo rigido ha proprio sei gradi di liberta', e quindi si hanno tante

equazioni, quante incognite ed il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni del moto induce la sufficienza.

Non è lo scopo di questo corso discutere le equazioni cardinali, anzi in meccanica analitica vogliamo fornire un metodo molto automatico che le aggiri. Un confronto pratico fra i due verrà svolto in un esercizio del capitolo 14.

Osserviamo due conseguenze notevoli delle equazioni cardinali: se non vi sono forze esterne, la velocità del baricentro ed il momento della quantità di moto si conservano. Sono due proprietà incredibilmente ben verificate dalla osservazione quotidiana. Ricordo solo, come esempio, che la rotazione terrestre esprime la conservazione del momento della quantità di moto su un arco di tempo di alcuni milioni di anni, (naturalmente con correzioni dovute all'interazione terra-luna, terra sole, ecc.ecc. importanti, ma non decisive). Quanto alla conservazione della quantità di moto (detta anche teorema del baricentro) è ben nota la impossibilità, trovandoci sul ghiaccio, di alterare il moto del baricentro con forze muscolari, che sono evidentemente forze interne. (Naturalmente in situazioni diverse, pur usando solo forze interne di origine muscolare possiamo ben camminare, alterando la forma del corpo, quindi la forza esterna data dalla reazione vincolare di attrito scarpa-suolo)!

4. Teorema di Koenig.

Questo teorema fornisce una espressione molto interessante della energia cinetica di un corpo. Dati N punti materiali di massa m_i e velocità \underline{v}_i chiamiamo energia cinetica T del sistema la grandezza

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (4.1)$$

Ci domandiamo come essa vari passando dal riferimento convenzionalmente chiamato fisso ed indicato senza apice a quello mobile (indicato con l'apice), quando il

secondo si muova rispetto al primo di un moto traslatorio con velocità \underline{v}_τ . Dal teorema dei moti relativi (per il quale $\underline{v}_i = \underline{v}'_i + \underline{v}_\tau$) si ha, semplicemente:

$$T' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \underline{v}'_i{}^2 = T + \frac{1}{2} M \underline{v}_\tau^2 + M \underline{v}_G \cdot \underline{v}_\tau \quad (4.2)$$

Scegliendo un sistema mobile nel quale il baricentro è fermo, ~~l'ultimo termine nella (4.2) è nullo~~ e si ottiene il Teorema di Koenig:

$$T = T' + \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 \quad (4.3)$$

Una applicazione molto comoda di questo teorema, di uso assai comune negli esercizi, si ha, come vedremo, nel corpo rigido.

5. Momento d'inerzia.

Prendiamo un asse u e sia δ_i la distanza del punto i -esimo da tale asse. Definiamo momento d'inerzia di un sistema di punti rispetto all'asse u la grandezza:

$$I_u = \sum_{i=1}^N m_i \delta_i^2 \quad (5.1)$$

È molto naturale vedere come cambia il momento d'inerzia considerando un asse u' parallelo a u . In modo particolare scegliamo u' asse baricentrale, cioè passante per il baricentro. Allora si ha, in modo semplice:

$$I_u = I_{u'} + M d^2 \quad (5.2)$$

ove d è la distanza dei due assi. Quindi per calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, basta calcolarlo rispetto a quello baricentrale e poi aggiungere il termine $M d^2$. Poiché questo ultimo termine è positivo, si vede subito che il momento d'inerzia è minimo fra gli assi paralleli se calcolato rispetto all'asse baricentrale. Sarebbe interessante studiare cosa succede se u ed u' non sono paralleli

in vista di studiare sistemi in moto nello spazio tridimensionale. Il corso però è troppo breve per farlo e tutti gli esercizi trattati si riferiscono a moti piani (salvo poche semplici eccezioni).

Se il sistema è continuo il calcolo del momento di inerzia di un solido fissato si riduce al calcolo di un integrale definito. Diamo due esempi, utili negli esercizi.

1°. Consideriamo una asta omogenea di massa M e lunghezza L . Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il baricentro G ed ortogonale alla sbarra stessa:

$$I_G = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} s^2 ds = \frac{1}{12} ML^2 \quad (5.3)$$

2°. Consideriamo un disco omogeneo di massa M e raggio R e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il baricentro (cioè il centro) ed ortogonale al disco stesso. Usiamo un sistema di coordinate polari piane centrate nel centro del disco ed otteniamo:

$$I_G = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{M}{\pi R^2} r^3 = \frac{1}{2} MR^2 \quad (5.4)$$

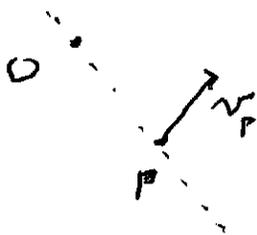
6. Corpo rigido e Teorema del Mozzi piano.

Un moto rigido è un moto nel quale la distanza fra due punti qualsiasi rimane fissa nel tempo. Un corpo rigido è un corpo che ammette solo moti rigidi. Quindi la caratteristica di un corpo rigido è la presenza di un vincolo (detto di rigidità) che impone alla grandezza $l_{i,j} = |\underline{x}_i - \underline{x}_j|$ di rimanere costante. Si può vedere che l'unica maniera di ottenere ciò è imporre la seguente relazione cinematica :

$$\underline{v}_i = \underline{v}_o + \underline{\omega} \wedge OP_i \quad (6.1)$$

ove O e P_i sono punti qualsiasi del sistema rigido, ed $\underline{\omega}$, detta velocità angolare, è un vettore definito dalla (6.1). Il suo significato è chiaro: la variazione istantanea dell'orientamento ~~mento~~ ^{zione} del corpo.

Nel corso formuliamo esempi ed esercizi principalmente nel caso piano, abbastanza semplice da trattare, ma non banale. Si vede subito dalla (6.1) che, in questo caso, il piano in cui si svolge il moto e' ortogonale ad $\underline{\omega}$. Inoltre dalla (6.1) si rende conto semplicemente che in ogni istante il moto del corpo rigido e' puramente rotatorio attorno ad un punto, chiamato centro istantaneo di rotazione. Per vedere cio', prendiamo un punto P a caso di velocita \underline{v}_P e moviamoci lungo una retta passante per P ed ortogonale a \underline{v}_P . Poiche' la variazione della velocita' e' diretta come \underline{v}_P , arriviamo ad uno ed un sol punto O fermo. Esso e' il centro istantaneo di rotazione.



Naturalmente tale centro varia istante per istante, in modo tale che la precedente osservazione (ogni moto rigido piano e' un moto rotatorio), spesso non e' utile negli esercizi di questo corso, dove l'equazione di Lagrange ci richiede solo la ricerca della energia cinetica. (Non necessario esame). Riveste una grande importanza nella meccanica delle macchine (alla Leonardo da Vinci per intenderci). Infatti chiamato base il luogo dei punti dei centri istantanei di rotazione, e rulletta lo stesso luogo visto nel sistema solidale al corpo rigido, l'osservazione precedente ci dice che la rulletta ruota senza strisciare sulla base (da qui il nome). Quindi se vogliamo realizzare con ingranaggi un moto rigido determinato, dobbiamo determinare i centri istantanei di rotazione e porre li' le ruote dentate. (Fine non necessario esame).

Nel caso di un moto piano rotatorio attorno ad un centro O il momento della

quantita' di moto rispetto a tale punto risulta:

$$M_o = I_o \underline{\omega} \quad (6.2)$$

In questo stesso caso l'energia cinetica diventa:

$$T = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad (6.3)$$

ove con ω abbiamo indicato il $|\underline{\omega}|$.

Vedete l'interesse pratico del teorema di Koenig per calcolare l'energia cinetica di un corpo rigido. Un qualunque moto rigido piano, ai fini del calcolo della energia cinetica, viene ridotto alla somma di due termini: l'energia come tutta la massa fosse concentrata nel baricentro + l'energia di un moto rotatorio attorno al baricentro. Osserviamo che tale moto ha la stessa velocita' angolare del moto completo, perche' il sistema baricentrale si muove di un moto traslatorio rispetta a quello fisso. Quindi gli orientamenti restano invariati e con essi la velocita' angolare.

7. Forze conservative.

Per comodita' siamo nello spazio usuale e studiamo la meccanica del punto a due dimensioni. Generalizzazioni a piu' dimensioni od a sistemi di punti sono ovvie.

Un campo di forze $\underline{F}(\underline{x})$ si dice conservativo se esiste una funzione di $U(\underline{x})$ (a un sol valore) detta *energia potenziale* tale che

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\nabla U(\underline{x}) \quad (7.1)$$

Gli esempi piu' noti sono la forza peso, la forza elastica, quella gravitazionale.

Vediamo come verificare che un campo di forze e' conservativo. Consideriamo la forma differenziale lavoro $dL = F_x dx + F_y dy$; dire che il campo di forze e' conservativo equivale a dire che essa e' integrabile, cioe':

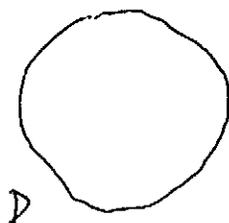
$$dL = F_x dx + F_y dy = -dU \quad (7.2)$$

se il dominio di definizione del campo di forze e' un dominio semplicemente connesso. Se non vi ricordate che cosa sia un dominio semplicemente connesso, per semplicita' pensate al campo di forze definito su tutto \mathbb{R}^2 . In questo caso e' facile trovare una condizione necessaria e sufficiente perche' il lavoro sia un differenziale esatto, devono essere uguali le derivate in croce, cioe':

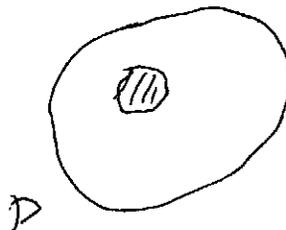
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (7.3)$$

(La necessita' e' ovvia, la sufficienza e' un teorema di analisi).

(Non necessario esame) Due parole sui domini non semplicemente connessi. Innanzi tutto ricordo la definizione di dominio D semplicemente connesso: prendiamo in D una curva chiusa e deformiamola con continuita'. Se ogni curva chiusa puo' essere ridotta con deformazioni continue ad un punto, chiamiamo il dominio semplicemente connesso. Un dominio connesso, ma che non gode di questa proprieta', *non* e' semplicemente connesso. In sostanza l'essere semplicemente connesso e' legato alla esistenza o meno di isole:



semplicemente connesso



non semplicemente connesso

Nella vita pratica ed in fisica si incontrano molti domini con questa proprieta'. Nella vita pratica basta pensare ad un lago senza isole o con isole. Un esempio tratta dalla fisica ha grande importanza. Supponiamo di avere un filo elettrico

percorso da corrente; si genera un campo magnetico che discende da un potenziale tramite la (7.1), ma il dominio non e' semplicemente connesso (c'e' il filo elettrico) ed il potenziale U e' a piu' valori, cioe' ricorda il numero di giri che facciamo attorno il filo: e' il teorema della circuitazione. (Fine non necessario esame).

Vediamo come da un campo di forze conservativo si possa trovare il potenziale. Si tratta di trovare il secondo membro della (7.1), conoscendo il primo. E' un problema che avete risolto nei corsi di analisi, con metodi, che qui ricordo bevamente. Ci sono due metodi equivalenti.

i) risolvere prima l'integrazione rispetto ad x , trovando la U a meno di una funzione di y , da determinare imponendo che la (7.1) sia soddisfatta.

ii) osservare che la forma differenziale $dL = F_x dx + F_y dy$ (lavoro) e' un differenziale esatto, per cui non dipende dal cammino percorso. Partiamo quindi da un punto fisso (a caso, perche' la U e' definita a meno di una costante; in genere si sceglie l'origine), integriamo lungo una spezzata, arrivando al punto generico (vedi Fig.1):

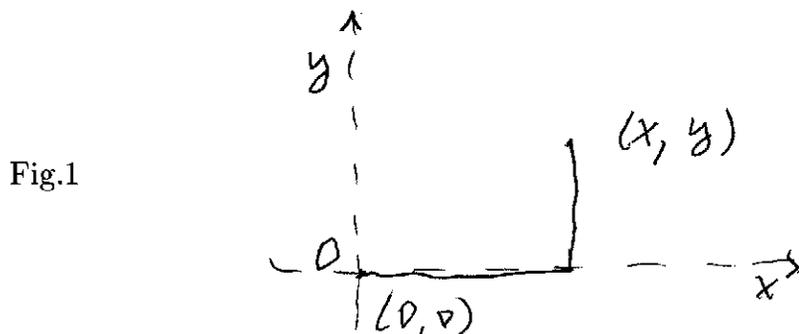


Fig.1

Se siamo a tre dimensioni, le derivate in croce da controllare perche' la forza sia conservativa diventano tre e la spezzata di cui sopra vive nello spazio a tre dimensioni.

Se in particolare $\underline{F} = m\underline{g}$ con $\underline{g} = (0, g)$ si ha $U = -mgy$. Se $\underline{F} = -kOP$, $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. In coordinate polari piane (r, θ) se $\underline{F} = \frac{-k}{r^3}OP$, allora $U = \frac{-k}{r}$.

Se un punto e' soggetto ad una forza conservativa, vale l'integrale primo dell'energia:

$$T + U = E = \text{cost} \quad (7.2)$$

8. Stabilita' e teorema di Dirichlet.

Nel Capitolo 10 abbiamo gia' ricordato i concetti di equilibrio e di stabilita'. Qui ricordiamo un notevole teorema che da' una condizione sufficiente (e quasi sempre necessaria) di stabilita'.

Teorema 8.1 (Dirichlet)

"Consideriamo un sistema meccanico con vincoli, funzione di Lagrange ed energia potenziale indipendenti dal tempo. Consideriamo un punto di equilibrio P^* del sistema. Condizione sufficiente perche' tale equilibrio sia stabile e' che P^* sia un minimo isolato della energia potenziale."

Dimostrazione.

Svolgiamo la dimostrazione esplicita nel caso (semplice) di un punto materiale che si muove lungo l'asse x ed e' soggetto ad una forza di energia potenziale $U(x)$. Naturalmente in questo caso potremmo anche integrare esplicitamente il moto, ma noi diamo una dimostrazione che si adatta immediatamente al caso generale di n variabili lagrangiane.

Ricordiamo che un punto di equilibrio x^* si dice punto di equilibrio se trovandosi in esso con atto di moto nullo il sistema vi permane indefinitamente. Il punto di equilibrio viene detto *stabile* se:

dato un $\epsilon > 0$ scelto a piacere, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|x(0) - x^*|^2 + a|\dot{x}(0)|^2 < \delta_\epsilon$$

(ove a e' una costante determinata dalle unita' di misura delle lunghezze e delle

velocita' scelte) implica

$$|x(t) - x^*|^2 + a|\dot{x}(t)|^2 < \epsilon \quad (8.1)$$

Il significato della stabilita' e' ovvio: posso trovare una perturbazione iniziale cosi' piccola, che il mio moto successivo rimane vicino al punto di equilibrio. La vicinanza e' ovviamente considerata nello spazio delle fasi (x, \dot{x}) .

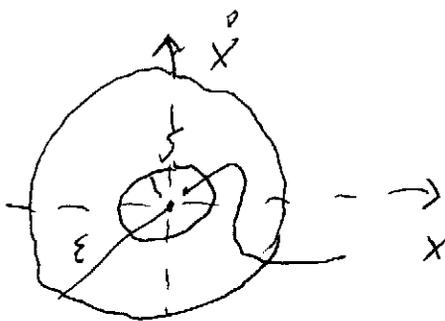
Passiamo alla dimostrazione. Senza perdere in generalita' facciamo un cambiamento di assi, portando il punto di equilibrio nell'origine. Inoltre assumiamo che il potenziale, definito in genere a meno di una costante, sia nullo nell'origine. Consideriamo la grandezza (energia totale)

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad (2)$$

Se la funzione $U(x)$ ha un minimo isolato nell'origine, E possiede le proprieta':

- 1) e' una funzione continua dello spazio delle fasi,
- 2) essa e' nulla se e solo se il punto in cui e' calcolata e' l'origine dello spazio delle fasi ed altrove e' positiva,
- 3) rimane costante lungo il moto (perche' la funzione di Lagrange non dipende dal tempo).

Queste proprieta' implicano la stabilita'. Infatti ragioniamo per assurdo, ammettiamo cioe' che il punto sia di equilibrio non stabile. Consideriamo i due intornoi dell'origine uno di raggio (al quadrato) ϵ scelto a piacere ed uno di raggio (al quadrato) δ_ϵ . (vedi Figura)



Se l'origine non è stabile, comunque piccolo scegliamo l'intorno interno esiste almeno un punto che esce dall'intorno più grande. D'altra parte valutiamo il valore di E lungo la frontiera dell'intorno più grande; essa è una funzione continua definita in un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 e quindi per un ben noto teorema (Weierstrass) essa ha un minimo che chiamiamo m . Poiché $E > 0$ su tale frontiera, anche $m > 0$. Quindi E della traiettoria che esce dall'intorno grande è $E \geq m > 0$, ad ogni tempo, perché E si conserva lungo il moto. Ciò è assurdo, perché si avrebbe $E \geq m$ anche inizialmente, quando il punto stava nell'intorno piccolo. Infatti posso scegliere δ_ϵ così piccolo che nell'intorno piccolo $E < \frac{m}{2}$ (ricordo che E è continua ed $E(0,0) = 0$). Si arriva quindi ad un assurdo, che si risolve solo supponendo l'origine stabile.

□

Osserviamo che un altro Teorema, che non dimostriamo, discute anche la necessità. Afferma che tale condizione di minimo è anche necessaria per la stabilità se consideriamo sistemi in cui l'Energia potenziale è regolare, nel senso che il minimo si riconosce dallo studio delle derivate parziali (e ciò accade in tutti i sistemi considerati in questo corso).

CAP. 14. ESERCIZI

In questo capitolo svolgiamo qualche esercizio, per illustrare concretamente i concetti fin qui espressi. Consiglio di svolgere pochi esercizi ma a fondo, esercitando il senso critico. È anche molto utile inventare gli esercizi, magari ponendoli agli amici. La ricerca di un esercizio non banale e solubile fa molto meditare sulla materia.

1. Esercizio 1.

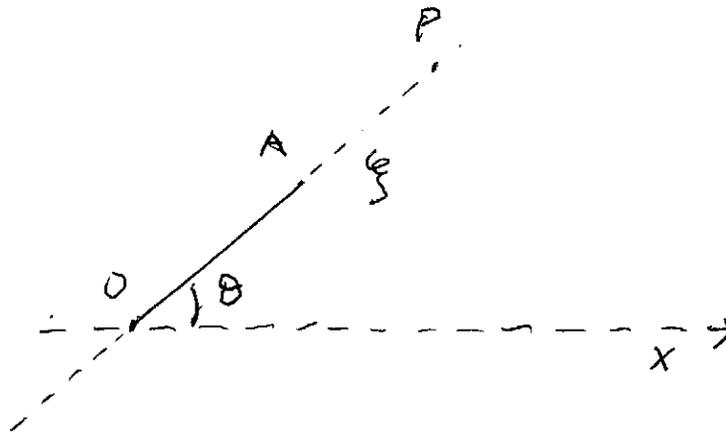
In un piano orizzontale una asta OA , omogenea di massa M e lunghezza L può ruotare senza attrito attorno al suo estremo fisso O . Solidalmente all'asta è posta una guida rettilinea illimitata r di massa trascurabile e su tale guida può scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m .

Scegliamo come variabili lagrangiane atte a determinare la generica posizione del sistema l'angolo θ , che OA forma con un asse fisso passante per O e la coordinata ξ di P su r (vedi Fig. 1).

Si risponda alle seguenti domande:

- 1) Scrivere la funzione di Lagrange del sistema e con essa le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- 3) Scrivere due integrali primi del moto e darne il significato fisico.
- 4) (Un po' più difficile). Scelte le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$, $\xi(0) = \xi_0 > 0$, $\dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0 = 0$, si domanda se $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$?

Fig.1



Risoluzione.

- 1) L'energia cinetica dell'asta T_a è:

$$T_a = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.1)$$

e l'energia cinetica del punto T_P vale:

$$T_P = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\theta}^2) \quad (1.2)$$

Le forze esterne sono assenti, per cui l'energia potenziale U e' uguale a costante. Tale costante puo' essere scelta nulla senza perdita di generalita'. In conclusione:

$$L = T - U = T = T_a + T_P = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\theta}^2) \quad (1.3)$$

Per scrivere le equazioni del moto calcoliamoci i vari termini:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{ML^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \xi} = m\xi \dot{\theta}^2 \quad (1.5)$$

Usando le equazioni di Lagrange otteniamo:

$$\left(\frac{ML^2}{3} + m\xi^2\right)\ddot{\theta} + \overbrace{2m\xi\dot{\theta}}^{\xi} = 0 \quad ; \quad m\ddot{\xi} - m\xi \dot{\theta}^2 = 0 \quad (1.6)$$

2) Riguardo all'equilibrio, poiche' le forze esterne attive sono nulle, ogni punto e' punto di equilibrio. Tale equilibrio *non* e' stabile, poiche' ogni punto *non* e' un minimo isolato del potenziale (in realta' e' quello che viene chiamato equilibrio indifferente).

3) Poiche' la variabile θ non compare nell Lagrangiana, cioe' e' ignorabile, il momento cinetico coniugato e' una costante del moto, cioe':

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{ML^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta} = cost \quad (1.7)$$

ove la costante va determinata dalle condizioni iniziali. Questa grandezza costante ha il significato di momento della quantita' di moto rispetto ad un asse passante per O ed ortogonale al piano (la verifica e' semplice).

Poiche' la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia e' una costante del moto. Poiche' non vi sono forze esterne attive, L'energia totale $E = T + U$ si riduce a quella cinetica, ed otteniamo il secondo integrale primo del moto:

$$\frac{1}{6}M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\theta}^2) = cost \quad (1.8)$$

che ha il significato di energia cinetica.

4) (Un po' piu' complicato).Diamo un cenno all'esame qualitativo del moto: l'asta inizialmente ruota ed il punto e' fermo inizialmente rispetto all'asta ed e' posto fuori dall'origine. Successivamente il punto inizia a muoversi, spinto verso l'esterno, acquista energia cinetica e la sottrae all'asta, la cui rotazione tende a rallentare. Asintoticamente nel tempo il punto tende ad andare all'infinito di moto uniforme (lungo la guida) assumendo tutta l'energia iniziale E e l'asta a fermarsi. La domanda (non ovvia) e' se l'angolo che l'asta forma con l'asse fisso tenda ad un valore limite o cresca indefinitivamente. Tradotta la domanda in modo piu' quantitativo equivale a vedere se la velocita' angolare $\dot{\theta}$ tenda a zero in modo integrabile o no. Calcoliamolo. Dalla conservazione del momento della quantita' di moto si ha:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cost}{\frac{ML^2}{3} + m\xi^2}$$

da cui

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds \frac{cost}{\frac{ML^2}{3} + m\xi^2(s)}$$

poiche' per tempi grandi $\xi(t) \approx cost + (\frac{2E}{m})^{1/2} t$ e dai corsi di analisi avete appreso che $\int_1^t ds s^\alpha \rightarrow cost < \infty$ se e solo se $\alpha < -1$, si ha che asintoticamente nel tempo l'angolo tende ad un valore finito.

□

2. Esercizio 2.

In un piano verticale e' posto un sistema cartesiano di assi (x, z) con l'asse x orizzontale e l'asse z lungo la verticale discendente. In tale piano si muove un'asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L . L'estremo A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida solidale con l'asse x . L'asta e' soggetta oltre alla forza peso ad un'altra forza attiva: $\underline{F} = -k\overline{OB}$, ($k > 0$), ove O e' il punto origine degli assi cartesiani (vedi Fig.1).

Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che l'asta AB forma con la verticale discendente.

Si risponda alle seguenti domande:

- 1) Trovare la funzione di Lagrange e scrivere le equazione del moto.
- 2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare dei parametri fisici del sistema (M, L, k, g) .

3) Scelti i valori $M = 1, k = 1, L = 1, g = 4$ in opportune unita' di misura, trovare una posizione di equilibrio stabile e le frequenze nodali delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

4) (Leggermente piu' difficile). Torniamo ai valori generali dei parametri e poniamo ora $k = 0$. Date le condizioni iniziali $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \theta_0 > 0$, trovare per quali valori di θ_0 l'asta fa un giro completo su se stessa.

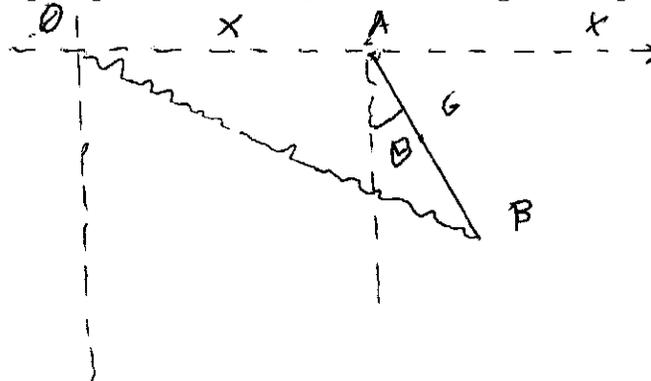


Fig.1

Risoluzione.

1) Scriviamo l'energia cinetica del sistema. Usando il teorema di Koenig si ha:

$$T = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2 \quad (2.1)$$

La velocita' angolare dell'asta e' uguale a $\dot{\theta}$, per cui $\omega = \dot{\theta}$. Inoltre

$$x_G = x + \frac{L}{2} \sin \theta \quad ; \quad z_G = \frac{L}{2} \cos \theta \quad (2.2)$$

da cui

$$\dot{x}_G = \dot{x} + \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} \quad ; \quad \dot{z}_G = -\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \quad (2.3)$$

e quindi

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \quad (2.4)$$

Ricordando che $I_G = \frac{1}{12}ML^2$ e sostituendo:

$$T = \frac{1}{2}[M\dot{x}^2 + M\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + ML \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}] \quad (2.5)$$

Calcoliamo l'energia potenziale U . Le forze attive sono due, la forza peso e la forza elastica. La prima va come se fosse applicata nel baricentro cioe' $-Mgz_G$, mentre la seconda l'abbiamo gia' calcolata (nei richiami) $\frac{1}{2}k(x_B^2 + z_B^2)$. In totale, poiche' $x_B = x + L \sin \theta$, $z_B = L \cos \theta$, si ha:

$$U = -Mg\frac{L}{2} \cos \theta + \frac{1}{2}k[x^2 + L^2 + 2Lx \sin \theta] \quad (2.6)$$

e quindi

$$L = T - U = \frac{1}{2}[M\dot{x}^2 + M\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + ML \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}] + \frac{MgL}{2} \cos \theta - \frac{1}{2}k[x^2 + L^2 + 2Lx \sin \theta] \quad (2.7)$$

Scriviamo le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} = 0 \quad ; \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (2.8)$$

Nel nostro caso diventano:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + \frac{ML}{2} \cos \theta \dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx - kL \sin \theta \quad (2.9)$$

da cui

$$M\ddot{x} - \frac{ML}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{ML}{2} \cos \theta \ddot{\theta} + kx + kL \sin \theta = 0 \quad ; \quad 1^\circ \text{ eq.} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M \frac{L^2}{3} \dot{\theta} + \frac{ML}{2} \cos \theta \dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{ML}{2} \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} - \frac{MgL}{2} \sin \theta - kLx \cos \theta \quad (2.11)$$

da cui

$$M \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{ML}{2} \cos \theta \ddot{x} + \frac{MgL}{2} \sin \theta + kLx \cos \theta = 0 \quad ; \quad 2^\circ \text{ eq.} \quad (2.12)$$

Consiglio di fare una verifica nei casi limite di facile soluzione. Per esempio se θ e' fissato si deve avere in x un moto armonico. (O.K.). Viceversa, fissato x e $k = 0$, in θ si deve avere un pendolo (O.K.).

2) Le posizioni di equilibrio sono i punto critici di U :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx + kL \sin \theta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = Mg \frac{L}{2} \sin \theta + kLx \cos \theta = 0 \quad (. \ 2.12)$$

Risolviamo la prima rispetto ad x e sostituiamola nella seconda. Otteniamo:

$$\sin \theta \left(\frac{Mg}{2} - kL \cos \theta \right) = 0 \quad (2.13)$$

da cui si hanno sempre almeno due soluzioni:

$$\sin \theta = 0 \implies \theta = 0 \text{ oppure } \theta = \pi \quad (2.14)$$

Altre due

$$\cos \theta = \frac{Mg}{2kL} \quad \text{se} \quad \frac{Mg}{2kL} < 1 \quad (2.15)$$

poiche' il coseno deve essere ≤ 1 . Nel caso di 1 siamo nel caso gia' considerato precedentemente.

Studiamo la stabilita'. Ci costruiamo la matrice delle derivate seconde del potenziale e la studiamo nei punti di equilibrio.

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = k ; \quad U_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \theta} = \frac{MgL}{2} \cos \theta - kLx \sin \theta ; \quad U_{x\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = kL \cos \theta \quad (2.16)$$

Prendiamo i quattro punti di equilibrio. Incominciamo dal primo:

i) $x = 0, \theta = 0$.

L'hessiano viene

$$H = \frac{kMgL}{2} - k^2 L^2 \quad (2.17)$$

per cui $H > 0$ se $\frac{Mg}{2kL} > 1$. Poiche' U_{xx} e' sempre positivo, il punto e' di equilibrio stabile se $\frac{Mg}{2kL} > 1$, instabile se $\frac{Mg}{2kL} < 1$, che e' proprio la condizione per cui gli altri due punti di equilibrio esistano. Il caso $\frac{Mg}{2kL} = 1$ e' un po' piu' delicato e lo discuteremo tra un attimo.

ii) $x = 0, \theta = \pi$.

Svolgendo i conti, analoghi al caso precedente si vede che sempre instabile.

iii) $x = -L \sin(\arccos \frac{Mg}{2kL})$, $\theta = \arccos \frac{Mg}{2kL}$.

Svolgendo i conti analoghi a quelli del caso precedente si vede che l'equilibrio, se esiste, e' stabile.

Resta da discutere il caso $\frac{Mg}{2kL} = 1$. L'equilibrio non e' riconoscibile dalle derivate seconde, ma non vuol dire che il problema sia insolubile. Vediamo se un minimo o meno. La $U(x, \theta)$, deve avere un minimo, o relativo nel dominio di definizione o assoluto ai bordi del dominio di definizione. Ma essa e' definita per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ e per $|x| \rightarrow \infty$ essa tende all'infinito. Quindi ha un minimo interno (naturalmente uno o piu' di uno). Ma i punti critici sono solo due, l'altro e' instabile, quindi si ha un minimo e per il Teorema di Dirichelet l'equilibrio e' stabile.

3) Per i valori dei parametri che questa domanda assegna, l'unico punto di equilibrio stabile corrisponde ad $x = 0, \theta = 0$. In questo punto i valori della matrice dell'energia potenziale sono stati gia' calcolati. E' facile farlo per l'energia cinetica:

$$T_{xx} = M \quad ; \quad T_{\theta\theta} = \frac{ML^2}{3} \quad ; \quad T_{x\theta} = \frac{ML}{2} \quad (2.18)$$

(attenti all' $\frac{1}{2}$ in $T_{x\theta}$).

Posta nell'equazione (3.3) del Cap. 10 si ha:

$$(k - M\omega^2)\left(\frac{MgL}{2} - \frac{ML^2}{3}\omega^2\right) - \left(kL - \frac{ML}{2}\omega^2\right)^2 = 0 \quad (2.19)$$

da cui

$$\omega_1^2 = 8 + \sqrt{52} \quad ; \quad \omega_2^2 = 8 - \sqrt{52} \quad (2.20)$$

4) Scriviamo la Lagrangiana L con $k = 0$:

$$L = T - U = \frac{1}{2}[M\dot{x}^2 + M\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + ML \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}] + \frac{MgL}{2} \cos \theta \quad (2.21)$$

Poiche' tale Lagrangiana non dipende ne' da x , ne' esplicitamente da t , si possono scrivere due integrali primi del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + \frac{ML}{2} \cos \theta \dot{\theta} = \frac{ML}{2} \dot{\theta}_0 \quad (2.22)$$

(quantita' di moto lungo x)

$$T + U = \frac{1}{2}[M\dot{x}^2 + M\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + ML \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}] - \frac{MgL}{2} \cos \theta = M\frac{L^2}{6}\dot{\theta}_0^2 - \frac{MgL}{2} \quad (2.23)$$

(energia totale).

Ricavando \dot{x} dal primo integrale primo e sostituendolo nel secondo si ottiene, formalmente, il moto di un punto soggetto ad un potenziale esterno. Quindi si ha un giro completo se

$$\dot{\theta}_o^2 > \frac{24g}{L} \quad (24)$$

Notare che essa e' maggiore di quella che si avrebbe con l'estremo A vincolato $\dot{\theta}_o^2 > \frac{6g}{L}$. Infatti nel nostro caso parte dell'energia cinetica iniziale va a conservare la quantita' di moto del sistema.

3. Esercizio 3.

In un piano verticale un disco omogeneo di raggio R e massa M e' obbligato a rotolare senza strisciare lungo una guida rettilinea orizzontale. Nel centro C del disco e' incernierata un'asta rettilinea omogenea pesante CA di massa m e lunghezza L libera di ruotare senza attrito attorno al punto C .

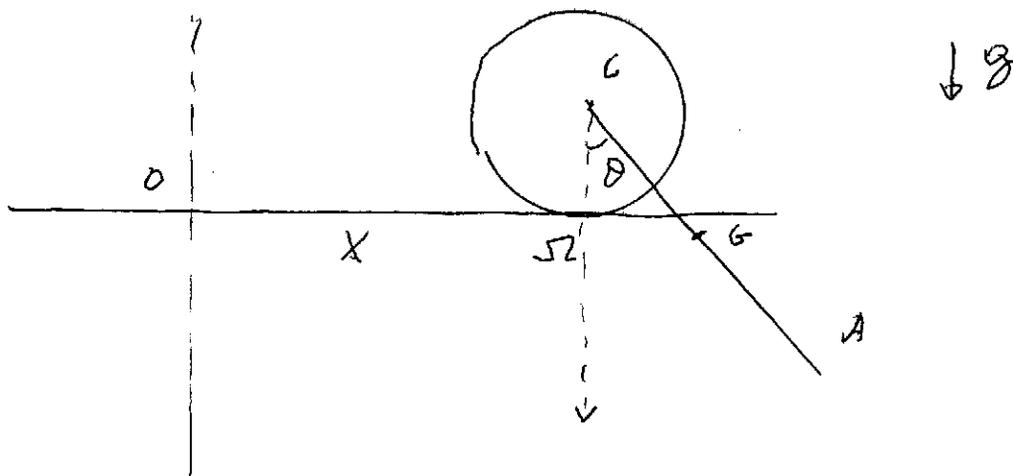
Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema, l'ascissa x del punto C , e l'angolo θ che l'asta CA forma con la verticale discendente (vedi Fig.1).

Si risponda alle seguenti domande:

- 1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e tramite di essa scrivere le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilita'.
- 3) Scrivere due integrali primi del moto e discuterne il significato fisico.
- 4) (Leggermente piu' difficile). Date le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \theta_o > 0$, trovare per quale valori di θ_o l'asta fa un giro completo.

5) (Un po' piu' difficile). Scrivere le equazioni del moto del sistema usando le equazioni cardinali. Verificare che il sistema trovato e' equivalente a quello scritto con il metodo di Lagrange.

Fig.1



Risoluzione.

1) Scriviamo la $L = T - U$. L'energia cinetica e' additiva, pertanto e' la somma di quella del disco T_{disco} piu' quella dell'asta. Usando il teorema di Koenig si ha

$$T_{disco} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \quad (3.1)$$

Poiche' il punto di contatto del disco con la guida e' fermo per il puro rotolamento, $\dot{x} = -R\omega$ e ricordando che $I_C = \frac{1}{2}MR^2$, si ha:

$$T_{disco} = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \quad (3.2)$$

Per l'asta vale il conto gia' discusso nel precedente esercizio e

$$T_{asta} = \frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2 + m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 + mL\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}\right] \quad (3.3)$$

$$U = -mg\frac{L}{2}\cos\theta \quad (3.5)$$

Sommando

$$L = T - U = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2}M + m \right) \dot{x}^2 + m \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \right] + mg \frac{L}{2} \cos \theta \quad (3.6)$$

Per trovare le equazione del moto, basta applicare le equazioni di Lagrange. Lascio i calcoli al lettore.

2) I calcoli sono semplicissimi. Le posizioni di equilibrio sono : ogni x e $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. Nessuna posizione e' stabile: infatti non dipendendo le posizioni di equilibrio da x , non possono essere un minimo *isolato* dell'energia potenziale. Condizionatamente alla variabile x , nella variabile θ si vede che $\theta = 0$ e' stabile, l'altro no.

3) Poiche' la Lagrangiana non dipende dalla x ne' esplicitamente dal tempo, e' facile trovare due integrali primi del moto. L'uno e' l'energia totale:

$$T + U = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2}M + m \right) \dot{x}^2 + m \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 + mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \right] - mg \frac{L}{2} \cos \theta = E = cost \quad (3.7)$$

L'altro e':

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{3}{2}M + m \right) \dot{x} + \frac{1}{2} mL \cos \theta \dot{\theta} = cost \quad (3.8)$$

Questa quantita' *non* e' la quantita' di moto lungo lasse x . (La quantita' di moto si scriverebbe $Q_x = (M + m)\dot{x} + \frac{1}{2} mL \cos \theta \dot{\theta}$). Quindi l'uso delle equazioni di Lagrange ci ha permesso di riconoscere un integrale primo non immediatamente visibile. (Ovviamente la componente lungo x della quantita' di moto totale del sistema non si conserva, perche' la reazione vincolare della guida sul disco puo' avere componente lungo x).

4) Il problema e' simile a quello discusso nel precedente esercizio e lascio i calcoli al lettore.

5) (Un po' piu' difficile). Do' solo qualche suggerimento, mentre lascio al lettore ogni dettaglio. Si tratta di applicare le equazioni cardinale per ogni pezzo del sistema.

Incominciamo dall'asta. Essa e' soggetta a due forze esterne, la forza peso e la reazione vincolare del disco sull'asta, vettore incognito applicato in C . Vedete come sia proprio la reazione vincolare la complicazione in piu' di questo metodo: nell'equazione di Lagrange scompariva, perche' il suo lavoro virtuale era nullo, mentre qui compare e va tenuta in conto.

Studiamo il disco. E' soggetto a due forze significative (il peso non conta): la reazione della guida sul disco e la reazione dell'asta sul disco. La prima e' un qualunque vettore incognito applicato nel punto di contatto disco/guida, quanto al secondo per la terza legge di Newton (azione/reazione) si ha : reazione asta su disco = - reazione disco su asta.

In conclusione, dobbiamo applicare le equazioni cardinali all'asta ed al disco ed il principio di azione e reazione. Il sistema che otteniamo si riduce a due equazioni differenziali che nel complesso sono equivalenti a quelle trovate con il metodo di Lagrange.

Ho suggerito questo problema, non per fare i conti (forse avendo voi poco tempo e' meglio usarlo altrimenti), ma per farvi toccare per mano i vantaggi pratici del metodo di Lagrange. Naturalmente se vi avessimo domandato di calcolare anche le reazioni vincolari, per esempio asta/disco allora questo metodo gia' le suggerisce, mentre con il metodo di Lagrange bisogna prima calcolarci l'accelerazione del baricentro dell'asta e quindi la reazione vincolare. \square

Nel prossimo esercizio (semplice ed in cui si puo' trovare la soluzione esplicita in termini funzioni elementari) voglio far vedere come i due metodi (metodo di Lagrange ed equazioni cardinali) siano differentemente sensibili a "sbagli" nella risoluzione del problema (intendo propri "sbagli", non errori intesi come approssi-

mazioni alla soluzione esatta). Infatti quando si ottengono con i due metodi risultati equivalenti, possiamo stare sicuri che il problema e' ben risolto (non mi e' mai capitata una eccezione). Vedremo anche che il metodo delle equazioni cardinali, in genere piu' lungo, e' piu' "fisico" nel senso che un eventuale "sbaglio", cambia i giusti valori numerici finali, ma puo' non alterare comportamenti qualitativi del moto, mentre una "sbaglio" nell'equazioni di Lagrange puo' avere piu' facilmente risultati distruttivi.

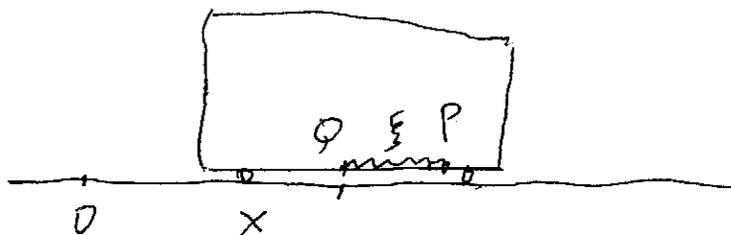
4 Esercizio 4.

Un vagone ferroviario di massa M scorre senza attrito lungo dei binari rettilinei orizzontali diretti come l'asse x . Su tale vagone e' posto un punto P di massa m , che scorre senza attrito parallelamente all'asse x ed e' attratto da un punto Q del vagone tramite una forza elastica di costante di richiamo $k > 0$.

Scelti come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto Q e la distanza ξ di P da Q , si risponda alle seguenti domande:

- 1) Scrivere le equazioni del moto col metodo di Lagrange.
- 2) Scrivere le equazioni del moto con le equazioni cardinali e generali leggi di conservazione.

Fig.1



Risoluzione.

1) Calcoliamo $L = T - U$.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 ; U = \frac{1}{2}k\xi^2 \quad (4.1)$$

ove la velocità v_P del punto P è data da:

$$x_P = x + \xi ; v_P = \dot{x} + \dot{\xi} \quad (4.2)$$

Quindi

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + m\dot{x}\dot{\xi} - \frac{1}{2}k\xi^2 \quad (4.3)$$

Applicando le equazioni di Lagrange, si ha:

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{\xi} = 0 ; m\ddot{\xi} + m\ddot{x} + k\xi = 0 \quad (4.4)$$

La cui esplicita soluzione è semplice. Ricavando \ddot{x} dalla prima e sostituendolo nella seconda, si ha:

$$\frac{Mm}{M + m}\ddot{\xi} + k\xi = 0 \quad (4.5)$$

da cui

$$\xi = A \sin(\omega t + \phi) , \omega^2 = \frac{k(M + m)}{Mm} ; x = x_o + \dot{x}_o t + B \sin(\omega t + \phi) \quad (4.6)$$

2) La prima equazione cardinale da':

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{\xi} = 0 \quad (4.7)$$

mentre la conservazione dell'energia da':

$$\frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + m\dot{x}\dot{\xi} + \frac{1}{2}k\xi^2 = cost \quad (4.8)$$

che derivata fornisce l'altra equazione.

Il nuovo sistema di due equazioni differenziali e' equivalente a quello precedente.

Vogliamo ora mostrare come uno "sbaglio" si ripercuota diversamente nei due metodi. Supponiamo (sbagliando!) di dimenticare un termine e scrivere $v_p = \dot{\xi}$. Nel primo caso la lagrangiana diventa: $L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}k\xi^2$ e le equazioni del moto non evidenziano alcun legame tra x e ξ , cioe' x si muove di moto uniforme (il che contrasta immediatamente con la nostra intuizione). Nel secondo metodo la conservazione della quantita' di moto da': $M\dot{x} + m\dot{\xi} = cost$ il che e' numericamente, ma non qualitativamente sbagliato se $M \gg m$. \square

APPUNTI DI MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA

CARLO MARCHIORO

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza".
Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma
marchior@mat.uniroma1.it
fax: 39-06-44701007

giugno 2004

PARTE 2

PARTE 2° : MECCANICA RELATIVISTICA

CAP. 1. STATO PRIMA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

1. Introduzione.

Una notevole proprieta' della meccanica di Newton era l'essere invariante per trasformazioni di Galileo, cioe' rimanere la stessa passando da un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse ad un altro di moto traslatorio uniforme rispetto al primo. Una simile proprieta' di invarianza non valeva per l'elettromagnetismo e quindi per uno dei suoi aspetti piu' interessanti: la luce. Nel corso del 19-esimo secolo l'elettromagnetismo si era venuto ben formulando fino ad essere ben compendato nelle famose equazioni di Maxwell. Guardando l'aspetto che piu' ci interessa, la luce obbediva a delle equazione propagatorie della forma:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \right] \phi = 0 \quad (1.1)$$

ove ϕ e' una componente del campo elettrico dell'onda luminosa e c e' la velocita' dell'onda. Sperimentalmente era stata misurata in $c=299.793$ Km/sec.

Si vede subito che la (1.1) non e' invariante per trasformazioni galileiane. Viene spontaneo domandarci quale sia il sistema di riferimento in cui le (1.1) valgono. Un altro problema analogo veniva formulato nel modo seguente: e' ragionevole supporre che, cosi' come le onde acustiche si propagano in un mezzo, anche le onde luminose si propagano in un altro mezzo opportuno. Veniva dato anche un nome

a questo fantomatico mezzo, *etere* (che ora sappiamo non esistere), che doveva essere dotato di varie strane proprietà'. Veniva spontaneo domandarsi, quale fosse il moto della terra rispetto all'etere, cioè a questa fantomatica sede dei fenomeni elettromagnetici. Nei prossimi paragrafi esaminiamo, schematicamente, lo stato sperimentale alla fine del 1800, per poi discutere nei prossimi capitoli gli elementi base della nuova teoria. Per sostenere l'esame basterà un cenno a due esperimenti, mentre per la curiosità del lettore ho descritto brevemente anche altri due fenomeni.

2. L'aberrazione stellare.

Gli antichi guardavano il cielo stellato e vedevano la posizione delle stelle immutabile nei giorni. Si è andati avanti così fino all'avvento del cannocchiale con il quale, per primi, gli astronomi inglesi nel 1728 hanno osservato un fenomeno di aberrazione astronomica. Vediamo che cosa è. Se due osservatori O ed O' , l'uno in moto rispetto all'altro, misurano l'angolo θ che il raggio luminoso proveniente da una stella A forma con la retta r del loro moto reciproco, le due misure danno in genere risultati leggermente diversi, con un divario che dipende dalla inclinazione θ medesima. Ne consegue che una medesima regione di cielo stellato osservata a sei mesi di distanza presenta una apparente deformazione.

Supponiamo il primo osservatore O in quiete rispetto all'etere, identificato a mo' di congettura con lo spazio delle stelle fisse. (Tale sistema è il primo naturale candidato al ruolo dello *spazio assoluto* della meccanica newtoniana).

Un secondo osservatore O' si muove rispetto al primo lungo una retta r con velocità costante v . Sia \underline{c} la velocità vettoriale osservata dall'osservatore O di un raggio luminoso proveniente da una stella A e θ l'angolo che essa forma con l'asse r (vedi Fig.1). Sia invece \underline{c}' la velocità del medesimo raggio osservata da O' e θ'

l'angolo che esso forma con r . Infine chiamiamo $\Delta\theta = \theta' - \theta$ il divario fra i due angoli (*angolo di aberrazione*).

Le velocità vettoriali $\underline{c}, \underline{c}', \underline{v}$, sono legate dalle classica legge di composizione:

$$\underline{c} = \underline{v} + \underline{c}' \quad (2.1)$$

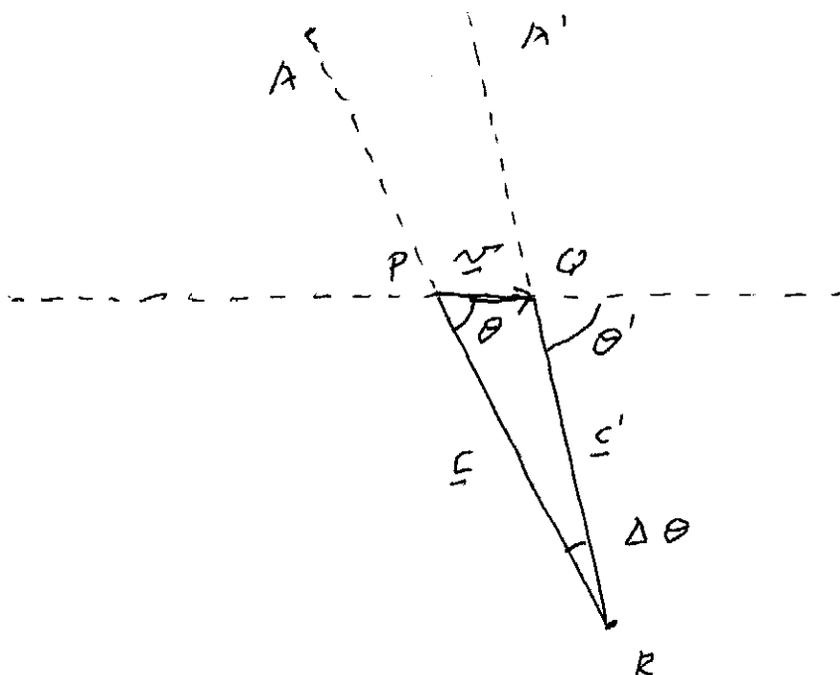


Fig.1

(AP direzione del raggio luminoso secondo l'osservatore O , AQ direzione del raggio luminoso secondo l'osservatore O').

Dalla Fig.1 si trae immediatamente (teorema del seno):

$$\sin \Delta\theta = \frac{v}{c} \sin(\pi - \theta') \quad (2.3)$$

e quindi, presupposto piccolo l'angolo $\Delta\theta$,

$$\Delta\theta \approx \frac{v}{c} \sin \theta \quad (2.4)$$

l'effetto e' dunque un effetto del primo ordine nel rapporto $\frac{v}{c}$. Supposto O' un osservatore terrestre (quindi approssimativamente in un breve periodo in un moto rettilineo uniforme), a v compete il valore della velocita' orbitale terrestre (≈ 30 Km/sec.) Con tale valore la formula approssimata (2.4) risulta essere in buon accordo con l'osservazione astronomica.

Tale accordo sembrerebbe confermare la plausibilita' dell'ipotesi che l'etere sia in quiete rispetto alle stelle fisse (e che valga la classica legge di composizione delle velocita'). Va tuttavia rilevato che la precisione delle osservazioni non e' sufficiente a confermare od a negare la validita' della formula esatta (2.3).

3. L'effetto Doppler.

(Non necessario esame). Consideriamo una sorgente luminosa in quiete rispetto all'etere , che emette una onda monocromatica di frequenza ν e lunghezza d'onda λ . Tra le due grandezze intercorre la nota relazione:

$$\lambda\nu = c \quad (3.1)$$

Consideriamo un secondo osservatore O' , che si muove con velocita' costante rispetto all'etere nella direzione dell'onda.



Fig.1

Nell'unita' di tempo O' riceve un tratto di onda lungo $c - v$, tratto che contiene $\frac{c-v}{\lambda}$ onde complete; questo rapporto coincide dunque con la frequenza ν' osservata da O' :

$$\nu' = \frac{c-v}{\lambda} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\nu \quad (3.2)$$

Questa frequenza risulta un po' piu' piccola di ν se O' si allontana, un po' piu' grande se si avvicina. Questo effetto viene chiamato Doppler, e' ben noto in acustica dove e' di facile osservazione ed e' ricco di applicazioni (per esempio quelle mediche per studiare il flusso del sangue). Supponendo l'etere solidale alle stelle fisse, si dovrebbe avere una variazione di frequenza in diversi periodi dell'anno. Per esempio supponiamo di esaminare la luce di una stella tale che in inverno la terra si allontani da essa, ed in estate si avvicini. La variazione di frequenza (e quindi di "colore" della luce) risulta dalla (3.2):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} \quad (3.3)$$

I risultati delle osservazioni sperimentali sono in accordo con la (3.3), quando si ponga $v \approx 30\text{Km/sec.}$, valore della velocita' orbitale terrestre. Anche l'effetto Doppler sembra dunque convalidare o almeno non smentire la presunzione di un etere in quiete rispetto alle stelle fisse.

4. L'effetto Fresnel-Fizeau.

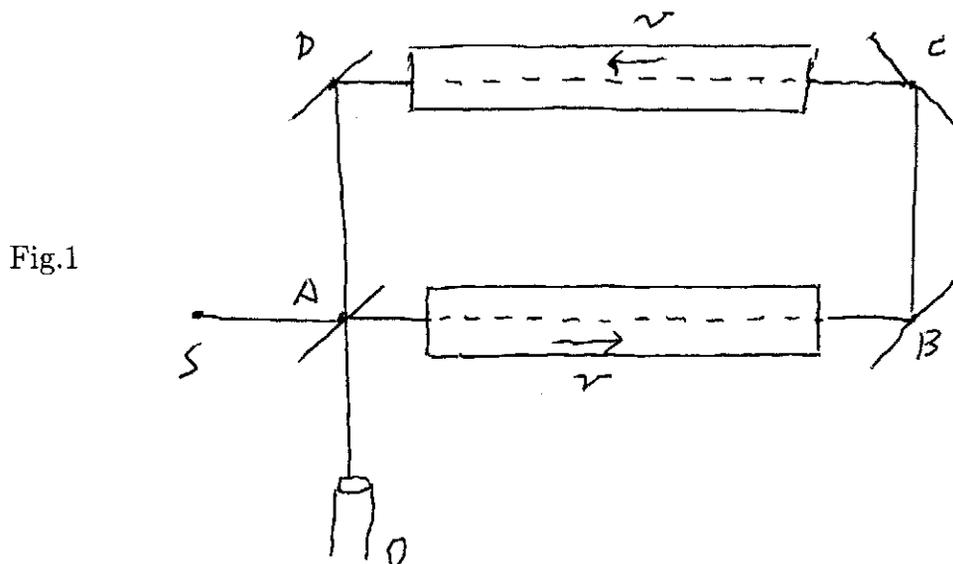
(Non necessario esame). Questo effetto, previsto da Fresnel nel 1818 e verificato sperimentalmente da Fizeau nel 1851, riguarda la propagazione della luce in un mezzo materiale in movimento.

Come e' noto in un mezzo trasparente, che supponiamo omogeneo ed isotropo ed in quiete rispetto all'etere, la velocita' della luce u_o varia (ritorneremo su questo punto) secondo l'espressione:

$$u_o = \frac{c}{n} \quad (4.1)$$

ove n e' l'indice di rifrazione. La formula (4.1) si puo' dimostrare per via teorica sulla base delle equazioni dell'elettromagnetismo in un dialettico in quiete.

L'esperimento di Fizeau si propone di misurare la velocita' della luce rispetto all'etere, quando il mezzo trasparente anziche' in quiete e' in moto di traslazione uniforme rispetto all'etere stesso. Il dispositivo e' della forma in figura:



Un raggio esce dalla sorgente S , si spezza su di uno specchio semiargentato A in due raggi (ovviamente coerenti) che fanno due diversi cammini e si ricongiungono nel cannocchiale O dove danno luogo a delle frange d'interferenza. Se $v = 0$ allora le frange non compaiono. Se $v \neq 0$ le frange compaiono ed al primo ordine devono

essere proporzionali a $\frac{v}{c}$. I risultati erano in accordo con le previsioni. Anche questo fenomeno non era quindi in contrasto con l'ipotesi di un etere solidale alle stelle fisse.

(In realta' la precedente discussione e' stata fatta nell'ipotesi che l'osservatore e tutto il dispositivo sperimentale (salvo l'acqua) siano in quiete rispetto all'etere. In verita' l'esperienza e' svolta sulla terra; ma, guardando il calcolo un po' piu' in dettaglio (vedi esperienza successiva), ci si potrebbe rendere conto che un eventuale moto della terra rispetto all'etere darebbe un effetto del secondo ordine, e quindi in una prima approssimazione la correzione sarebbe trascurabile.

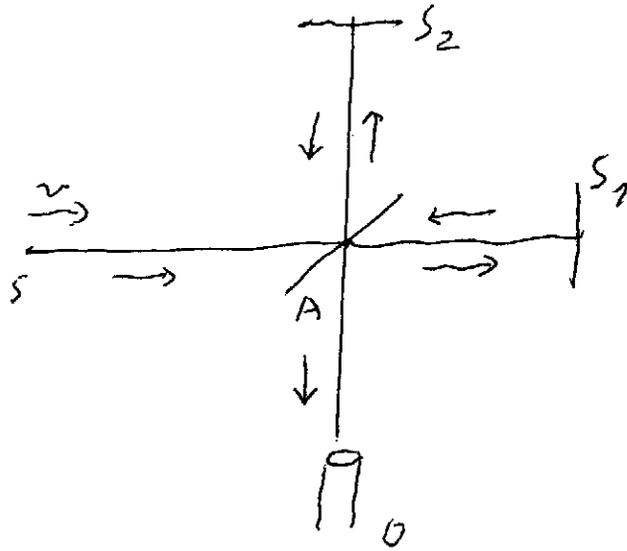
5. L'esperimento di Michelson-Morley.

I precedenti tre esperimenti, svolti per altri scopi, suggerivano un etere solidale alle stelle fisse. Vediamo ora un celebre esperimento, eseguito questa volta proprio per misurare la velocita' della terra rispetto all'etere. La speranza e la previsione, ovviamente, era trovare una velocita' v dell'apparecchio di misura rispetto all'etere dell'ordine $v \approx 30$ KM/sec., velocita' di rivoluzione della terra attorno al Sole. Anticipo subito che tale velocita' non si e' vista.

Dunque, se l'etere non e' trascinato dalla materia, verosimilmente la Terra dovrebbe, almeno in qualche periodo dell'anno, trovarsi in moto rispetto ad esso. In tali condizioni la velocita' della luce rispetto alla Terra dovrebbe risultare diversa nelle diverse direzioni. Per mettere in evidenza questa anisotropia Michelson e Morley realizzarono nel 1887 l'esperienza seguente, perfezionata e piu' volte ripetuta negli anni seguenti, sempre con lo stesso risultato.

Un raggio di luce monocromatica emesso da una sorgente S viene divisa in due da una lamina semiargentata A disposta a 45° (vedi Fig.1)

Fig.1



Il primo raggio prosegue in parte nella stessa direzione, viene riflesso da uno specchio S_1 , viene ancora parzialmente riflesso dalla lamina A e giunge all'osservatore posto in O . Il secondo raggio, cioè' la componente del raggio primario che viene riflessa dalla lamina semiargentina A , ha direzione perpendicolare al primo. Esso viene riflesso dallo specchio S_2 , attraversa in parte la lamina A e giunge in O sovrapposto al primo raggio. I due raggi sono inizialmente coerenti (perché' sono lo stesso raggio diviso in due), ed i diversi cammini ottici dei due raggi determinano tra loro un certo sfasamento, Δt , che, (se piccolo) dà luogo a frange di interferenza osservabili in O . Tutta l'apparecchiatura era montata su una massiccia piattaforma circolare di marmo galleggiante su mercurio, il che' permetteva di farla ruotare senza scosse.

Calcoliamo lo sfasamento Δt tra i due raggi nella ipotesi che l'apparecchio sia orientato in modo tale che il raggio primario sia diretto con la velocità' v della

Terra rispetto all'etere. Chiamiamo T_1 e T_2 i tempi impiegati dai due raggi per percorrere, in andata e ritorno, i rispettivi tratti AS_1 , AS_2 .

Il calcolo di T_1 si fa immediatamente nel sistema di riferimento della Terra, osservando che la velocità della luce rispetto alla Terra è $c - v$ nel tragitto di andata e $c + v$ al ritorno. Detta l_1 la distanza $|AS_1|$ si ha:

$$T_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} \quad (5.1)$$

Il calcolo di T_2 si fa più semplicemente nel riferimento dell'etere, ove la luce viaggia con velocità c . Durante il tempo impiegato $\frac{T_2}{2}$ impiegato dalla luce per andare da A ad S_2 , S_2 ha subito, rispetto all'etere, uno spostamento $v\frac{T_2}{2}$. Il cammino percorso dalla luce e quindi dato dai due lati uguali del triangolo della Fig.2

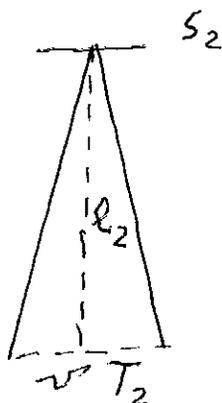


Fig.1

ed è esprimibile in funzione di T_2 : $2\sqrt{l_2^2 + (v^2 T_2^2 / 4)}$.

D'altra parte lo stesso cammino, diviso per c , dà proprio T_2 :

$$T_2 = \frac{2}{c} \sqrt{l_2^2 + (v^2 T_2^2 / 4)} \quad (5.2)$$

e, risolvendo

$$T_2 = \frac{2l_2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.3)$$

Lo sfasamento (algebrico) fra i due raggi vale pertanto:

$$\Delta t = T_2 - T_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right] \quad (5.4)$$

ed esse determina le frange di interferenza.

Facciamo ora ruotare tutto l'apparato di 90° . Le parti di l_1 ed l_2 si invertono e tra il secondo raggio ed il primo e si da' luogo ad un diverso sfasamento $\Delta t'$:

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \left[\frac{l_2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (5.5)$$

La differenza τ fra i due sfasamenti risulta:

$$\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (5.6)$$

Trascurando le potenze di ordine superiore in $\frac{v^2}{c^2}$ si ha:

$$\tau \approx \frac{l_1 + l_2}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (5.7)$$

Questa differenza avrebbe dovuto dar luogo ad uno spostamento delle frange di interferenza. La precisione dell'apparecchiatura fu in seguito raffinata e migliorata al punto che con essa avrebbe potuto rivelare velocita' v di soli 1,5 Km/sec. Malgrado questa altissima precisione (poiche' $c \approx 3 \times 10^5$ Km/sec, la precisione era dell'ordine di 10^{10} !) e le diverse modalita' in cui l'esperimento fu successivamente eseguito in diversi periodi dell'anno, il previsto spostamento di frange non fu mai osservato.

Il risultato negativo dell'esperienza di Michelson non poteva condurre nel quadro della fisica classica che ha una paradossale conclusione: un etere in quiete rispetto alla terra. Tuttavia questa conclusione, a parte il carattere tolemaico, contrastava

con il fenomeno della aberrazione stellare, che portava ad un etere in quiete rispetto alle stelle fisse. Questa antinomia era profonda e poteva essere risolta solo con un grande cambiamento delle basi stesse della fisica, come vedremo nel prossimo capitolo.

Una osservazione. L'esperienza di Michelson richiede grande cura, perché si vuol mettere in evidenza un fenomeno del secondo ordine in $\frac{v}{c}$. Viene spontanea una domanda: non era possibile inventare una esperienza tipo Michelson, ma con un risultato del primo ordine? Nel 1800 no, perché per avere frange di interferenza era necessario creare un raggio coerente con uno specchio semiargentato ed un cammino chiuso. Oggi con il laser si può ottenere semplicemente luce coerente e quindi mettere in evidenza fenomeni di interferenza del primo ordine.

CAP.2 . LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ E CINEMATICA RELATIVISTICA

1. Le trasformazioni di Lorentz.

Abbiamo visto nei Capitoli precedenti che le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni galileiane, cioè sono le stesse in ogni sistema di riferimento che si muova di moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle fisse, mentre l'elettromagnetismo sembra dipendere dal sistema di riferimento. Siamo in presenza di antinomia (cioè una contraddizione) dalla quale si è usciti con una teoria rivoluzionaria nel 1905 ad opera di Einstein. Gli ingredienti della teoria si possedevano già, ma l'interpretazione era nuova. Anzitutto abbandoniamo il concetto di tempo assoluto, caro alla visione newtoniana, e parliamo di spazio/tempo. Ogni

evento (per esempio l'inizio di un fenomeno fisico) e' caratterizzato da quattro coordinate, tre spaziali ed una temporale. Cambiando sistema di riferimento possono cambiare sia quelle spaziali, sia quella temporale. Chiederemo pero' che nella nuova teoria, come nella meccanica classica, vi sia l'invarianza galileiana, cioe':

"Le leggi della fisica hanno la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale (cioe' o fermo o in moto traslatorio rispetto alle stelle fisse)".

Per semplicita' incominciamo a discutere una caso particolare, le cosiddette trasformazioni speciali, che racchiude tutta la novita' fisica, accennando piu' in la' al caso generale. Consideriamo quindi un sistema di riferimento convenzionalmente chiamato fisso, nel quale prendiamo una terna cartesiana (O, x, y, z) ed un altro mobile rispetto al primo di un moto traslatorio uniforme rispetto al primo con una velocita' v costante diretta lungo l'asse x . Vediamo quale siano le trasformazioni di coordinate passando dall'uno all'altro sistema di riferimento. Le supponiamo lineari, una richiesta ragionevole, sia per semplicita', sia per avere nei due sistemi di riferimento le stesse equazioni differenziali descrittive un fenomeno fisico. Poi e' ragionevole richiedere che formino un gruppo, cioe' il prodotto di due trasformazioni sia uguale alla trasformazione prodotto, esista l'inverso e l'unita'. Infine che questo gruppo sia continuo, cioe' a piccoli v corrispondano trasformazioni vicino all'unita'. Queste richieste ragionevoli, comuni alla meccanica classica, portano alle trasformazioni (omettiamo i calcoli, semplici ma tediosi):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\alpha^2}}} ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{\alpha}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\alpha^2}}} \quad (1.1)$$

La costante α va scelta in modo tale da far concidere la teoria con l'esperienza. Se vogliamo avere un tempo assoluto dobbiamo scegliere $\alpha = \infty$, ottenendo le classiche *trasformazioni di Galileo*:

$$x' = x - vt \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t \quad (1.2)$$

Se invece vogliamo che la velocità della luce sia la stessa (in modulo), c , in ogni sistema di riferimento, come suggerito dalla esperienza di Michelson-Morley, (che è equivalente a dire che il fronte dell'onda luminosa deve essere una sfera qualunque sia il moto uniforme della sorgente), si deve scegliere $\alpha = c^2$, ottenendo le *trasformazioni di Lorentz*:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3)$$

le trasformazioni inverse sono (ovviamente basta scambiare v in $-v$):

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = \frac{t + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.4)$$

(Talvolta per brevità di formule si pone $\beta = \frac{v}{c}$)

Queste trasformazioni saranno alla base della relatività ristretta. (Esse erano state già introdotte vari anni prima della relatività ristretta, osservando in modo formale che tale trasformazioni rendevano invariante l'elettromagnetismo; poi si era cercato di dare loro un significato fisico, ipotizzando contrazioni delle lunghezze sperimentali. La teoria della relatività darà una spiegazione unitaria di questi tentativi). Verificheremo fra poco che le trasformazioni di Lorentz effettivamente lasciano invariante la velocità della luce c .

Dati due eventi $E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$, $E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$, chiamiamo *intervallo spazio/temporale* dei due eventi, (che indichiamo con $|E_1 E_2|$), la quantità:

$$|E_1 E_2|^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (1.5)$$

È facile verificare che tale grandezza è invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi l'intervallo spazio/temporale gioca nello spazio/tempo lo stesso ruolo che

l'usuale intervallo spaziale gioca nell'usuale spazio euclideo; inoltre le Trasformazioni di Lorentz giocano lo stesso ruolo nello spazio/tempo che le trasformazioni ortonormali svolgono nell'usuale spazio tridimensionale. Torneremo su questo punto nel paragrafo dedicato alla spazio di Minkowski.

Se i due eventi sono infinitamente prossimi ($E_2 = E_1 + (cdt, dx, dy, dz)$) allora l'intervallo spazio/temporale infinitesimo (che indichiamo con ds) prende la forma:

$$ds^2 = c^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.6)$$

ovviamente anche esso invariante per trasformazioni di Lorentz.

Le (1.3) inducono semplicemente una relazione tra le velocità di un punto materiale, misurate nei due sistemi di riferimento diversi. Differenziando la (1.3) si ha:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad dy' = dy ; \quad dz' = dz ; \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.7)$$

da cui, chiamate le componenti della velocità $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, si ha:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} ; \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} ; \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (1.8)$$

Da queste formule si vede bene l'insuperabilità della velocità della luce. Infatti ponendo $u_x = c$, dalla (1.8) si ha $u'_x = c$ qualunque sia v ; inoltre se $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$ allora $u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z = c^2$. Nota bene: io sto affermando che il *modulo* della velocità della luce non si somma con altra velocità, non che la velocità come *vettore* non si compone mai. Anzi essa si compone, si somma non con la regola classica del parallelogramma, ma quasi (per bassi v). Ho solo dimostrato che la variazione delle componenti è tale, che il modulo non cambia.

Osserviamo come fatto notevole, anche ben aspettato, che per basse velocità (cioè $v \ll c$) le trasformazioni di Lorentz tendono a quelle classiche, e le trasformazioni delle velocità (1.8) tendono alle trasformazioni di Galileo studiate nel Capitolo 12 della prima parte. Vedremo che un fenomeno analogo avviene per la dinamica.

2. Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz.

i) Dilatazione dei tempi.

Una delle più clamorose conseguenze delle trasformazioni di Lorentz è il fenomeno dell'allungamento (o dilatazione) dei tempi. Dati due eventi E_1 ed E_2 (per esempio la nascita e la morte di una particella radioattiva), che avvengono *nello stesso posto* nel sistema con l'apice ed indichiamo con $\Delta t'$ l'intervallo temporale fra i due eventi in questo sistema di riferimento. Preso ora un sistema di riferimento che si muove con velocità $-v$ rispetto al primo, valutiamo l'intervallo temporale dei due eventi Δt in tale sistema di riferimento. Dalla (1.4) si ha:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.1)$$

cioè il nuovo tempo risulta allungato rispetto al primo, di un fattore anche grande se v è prossima a quella della luce. Questo fenomeno è reale, forse un po' paradossale (un paradosso è una cosa vera, che sembra falsa), ma dopo poco anche a voi, come a tutti i fisici, sembrerà familiare e quasi ovvio! Vi sembrerà naturale si osservi il decadimento di una particella radioattiva con maggiore frequenza quando essa ha rallentato e raramente quando essa si muove con grande velocità.

Voglio dedicare due parole al celebre paradosso dei gemelli, che e' la versione piu' popolare di questo fenomeno. Faccio la descrizione un po' piu' lunga del dovuto, poiche' alcuni testi didattici universitari danno la falsa informazione agli studenti, che la completa spiegazione del paradosso possa trovarsi *solo* usando la relativita' generale. Invece basta la relativita' ristretta per vederlo comparire e spiegarlo. Abbiamo due gemelli su due astronavi diverse inizialmente fermi nell'origine. Si muovono assieme lungo l'asse x , passando nello stesso modo ad una velocita' v che mantengono fino al tempo T , quando il primo inverte il moto e torna verso l'origine con velocita' $-v$. Arrivato vicino all'origine rallenta e si ferma nell'origine ed attende il secondo gemello stando a riposo. Il secondo gemello prosegue il primo moto fino al tempo $T_1 > T$, poi inverte il moto e giunto vicino all'origine con la velocita' $-v$ rallenta e vi si ferma, esattamente come il primo gemello. A questo punto i due gemelli confrontano gli orologi ed il secondo risulta piu' giovane del primo. Il calcolo e' facile: dove il moto era rettilineo uniforme si possono usare le (1.4) ottenendo il risultato voluto, mentre in presenza di accelerazione gli effetti su i due gemelli sono gli stessi, ammettendo (come e' plausibile) l'omogeneita' dello spazio e del tempo nelle leggi della fisica.

Una comoda rappresentazione del moto in questo caso, si ha nello spazio/tempo, dove il precedente moto appare (Fig. 1), dove abbiamo preso il periodi di accelerazione e rallentamento molto brevi:

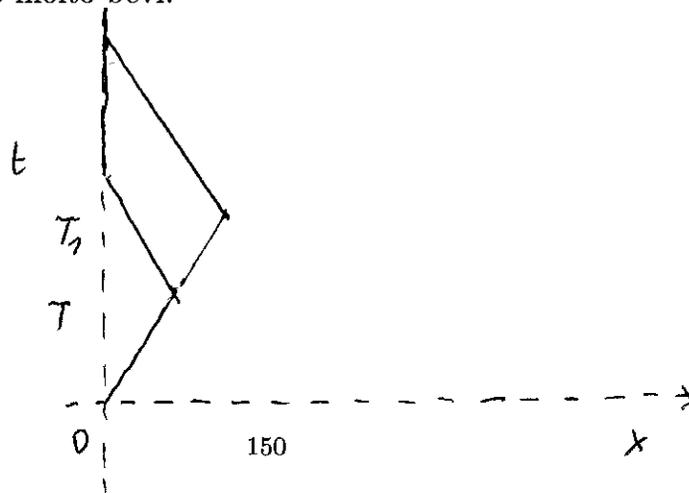


Fig.1

Per non stupirci troppo del fenomeno dell'allungamento dei tempi, ci possiamo rendere conto che nello spazio/tempo in relativita' il tempo non e' un differenziale esatto (come invece in meccanica classica) e quindi la differenza i suoi valori nel punto di partenza e di arrivo dipende dal percorso fatto.

ii) Contrazione delle lunghezze.

Un'altra conseguenza immediata della trasformazioni gi Lorentz (1.3) e' il cosiddetto fenomeno della contrazione delle lunghezze. Consideriamo un regolo di lunghezza a riposo l' , mettiamolo in moto lungo l'asse x e misuriamo la sua lunghezza l nel sistema del laboratorio (in cui il regolo si muove). Allora, indicato con $l' = x'_2 - x'_1$, si ha dalla (1.3) :

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.2)$$

e quindi la nuova misura l risulta minore di l' . Il fenomeno e' vero, ma meno verificabile ed importante della dilatazione dei tempi.

3. Spazio di Minkowski.

Vogliamo introdurre una comoda proprieta' geometrica dello spazio-tempo.

Incominciamo con il ricordare alcune bel note proprieta' dell'usuale spazio euclideo \mathbb{E}^3 . Consideriamo i punti nello spazio di coordinate (x_1, x_2, x_3) rispetto ad un sistema cartesiano dato ed osserviamo che la differenza di due punti definisce una grandezza, il vettore, le cui componenti sono la differenza delle coordinate dei punti nello spazio. Vado veloce su questo punto che ben conoscete. La struttura affine

di \mathbb{E}_3 implica l'esistenza di infiniti sistemi di coordinate privilegiate (coordinate cartesiane affini), dall'uno all'altro dei quali si passa mediante una trasformazione lineare (gruppo delle trasformazioni affini). La struttura metrica di \mathbb{E}_3 restringe la classe dei sistemi di coordinate privilegiati alle sole coordinate cartesiane ortogonali. Si passa da un sistema di coordinate all'altro mediante trasformazioni lineari ortonormali. Come è noto, le trasformazioni ortonormali sono tutti e sole quelle trasformazioni lineari che lasciano invariata, in valore e forma, la forma quadratica

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3.1)$$

Si tratta di una forma quadratica, definita positiva, avente il significato del quadrato della distanza del punto dall'origine.

Ben nota è l'effetto sui vettori. Dati due vettori $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ chiamiamo *prodotto scalare* fra i due vettori la grandezza:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.2)$$

e chiamiamo *norma* (o quadrato del modulo e della lunghezza) il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$|\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (3.3)$$

Notiamo che l'unica vettore che possiede norma nulla è il vettore nullo.

Generalizziamo questi concetti allo spazio-tempo. Si tratta di uno spazio a quattro dimensioni. Un punto di tale spazio-tempo è un evento E caratterizzato dal punto (x, y, z) e dal tempo t in cui avviene: $E = (ct, x, y, z)$. (Con c indichiamo la velocità della luce e l'uso nell'espressione precedente equivale ad uno riscalaggio

del tempo, svolto per comodita' nelle formule successive). La differenza fra due eventi da' un *quadrivettore*. Le proprieta' affini (somma fra due vettori, moltiplicazione per uno scalare) sono quelle usuali degli spazi vettoriali. Definiamo ora le proprieta' euclidee, introducendo il prodotto scalare fra due vettori (e quindi il concetto di norma del vettore stesso e distanza fra i due eventi caratterizzante il vettore). Definiamo il *prodotto scalare* fra due quadrivettori (A_0, A_1, A_2, A_3) e (B_0, B_1, B_2, B_3) come:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \quad (3.4)$$

La *norma* di un quadrivettore e' anche qui il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$|\underline{A}|^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \quad (3.5)$$

Un tale spazio viene chiamato spazio di *Minkowski*. L'interesse dipende dalla seguente osservazione: se interpretiamo la prima componente del quadrivettore distanza fra due eventi $E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$, $E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ come c per il lasso temporale:

$$E_1 E_2 = (ct_2 - ct_1, x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (3.6)$$

l'espressione (3.5) diventa:

$$|E_1 E_2|^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (3.7)$$

che e' proprio l'intervallo spazio-temporale introdotto nella (1.5), che avevamo detto essere invariante per trasformazioni di Lorentz. In conclusione il prodotto scalare fra due quadrivettori (e quindi la loro norma) e' invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi tali trasformazioni giocano un ruolo nello spazio di Minkowski analogo al ruolo delle trasformazioni ortonormali in quello euclideo.

Vediamo quindi l'utilità di aver introdotto questo spazio a quattro dimensioni: quando esprimiamo una legge fisica tramite quadrivettori, essa è messa in forma conveniente per le trasformazioni di Lorentz.

Vediamo ora che dalla definizione un quadrivettore ha una norma di segno non definito, che può essere positiva, negativa o nulla. Per questa ragione lo spazio di Minkowski viene chiamato spazio non euclideo, ma *pseudo-euclideo*.

Esaminiamo ora il significato fisico della norma di un quadrivettore, che definisce la distanza fra due eventi. Dalla (3.7) si ha:

i) se due eventi sono collegati da un quadrivettore a norma *positiva*, che viene chiamato quadrivettore del genere *tempo*, esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso *posto* (a tempi ovviamente diversi).

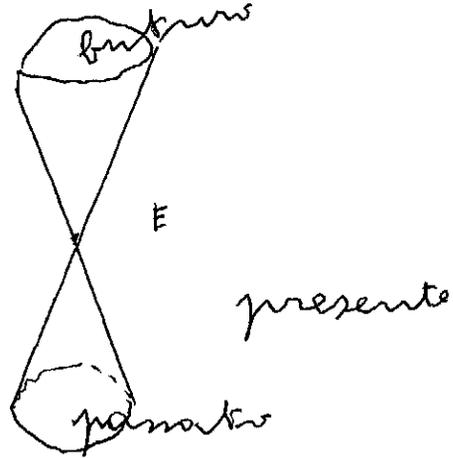
ii) se due eventi sono collegati da un quadrivettore a norma *negativa*, che viene chiamato quadrivettore del genere *spazio*, esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso *tempo* (in posti ovviamente diversi), cioè sono simultanei.

iii) se due eventi sono collegati da un quadrivettore a norma *nulla*, che viene chiamato quadrivettore del genere *luce*, possono essere collegati solo da un segnale che viaggia a velocità della luce.

Si può dare una immagine suggestiva di queste proprietà. Prendiamo nello spazio-tempo un evento E e consideriamo tutti i quadrivettori uscenti da lui (vedi Fig.1). I quadrivettori del genere luce individuano due falde di un cono con la punta in E . Fuori dal cono, collegati da un quadrivettore del genere spazio, ci sono tutti gli eventi che in qualche sistema di riferimento possono essere simultanei ad E ; essi vengono chiamati il presente di E , evento con cui non possono avere nessun rapporto di causa ed effetto. Dentro alla parte superiore del cono, collegati da un quadrivettore del genere tempo, vi sono eventi che in qualche sistema di riferimento

avvengono nello stesso posto in un tempo successivo ad E . Essi vengono chiamati il *futuro* e *possono* a priori essere influenzati da E . Infine nella parte inferiore del cono esistono, collegati da un quadrivettore del genere tempo, gli eventi, detto *passato*, che *possono* aver influenzato E .

Fig.1



Negli esercizi faremo qualche esempio di eventi che, in qualche sistema di riferimento, possono essere simultanei. Vogliamo solo osservare che e' spesso comodo usare la (3.7) per studiare la possibile simultaneita', ma ovviamente potremmo anche usare direttamente le trasformazioni di Lorentz. Diamo un esempio:

Esempio.

Problema. Dati due eventi, $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ ed $E_2 = (0, 2, 0, 0)$, vedere se esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi siano simultanei.

Risoluzione. Il quadrivettore E_1E_2 ha componenti $(-1, 2, 0, 0)$ con norma $1-4=-3$ cioe' tale quadrivettore e' del genere spazio, e quindi i due eventi possono essere contemporanei in un opportuno sistema di riferimento. Per trovare la velocita' di tale sistema di riferimento, ricorriamo alla trasformazioni di Lorentz (1.3) ed otteniamo dall'ultima equazione:

$$0 = -1 - v2 \implies v = -\frac{1}{2} \quad \square \quad (3.8)$$

Osserviamo che dalla (3.7) si vede bene che due eventi non possono essere collegati da alcun rapporto causale ed il loro ordine temporale dipende dal sistema di riferimento in cui siamo, se in un sistema di riferimento qualsiasi la loro distanza spaziale e' maggiore dell'intervallo temporale per la velocita' della luce. Ora, pur essendo la luce veloce, la sua velocita' e' finita e la sua limitatezza e' di osservazione comune nella vita di tutti i giorni (per esempio nelle trasmissioni televisive, quando si usa il collegamento tramite satellite, il segnale televisivo parte dallo spettacolo, rimbalza sul satellite geostazionario posto a 36.000 Km di altezza ed arriva al nostro televisore, cioe' impiega circa un quarto di secondo. Quando durante una partita internazionale il cronista trasmette la voce tramite telefono, la voce ci arriva prima, lui grida "gool" un attimo prima di vedere la palla entrare in rete! Basterebbe far un ritardo nella voce, ma la televisione non sembra averci pensato). Questi tempi sono gia' importanti nel sistema solare (la luce dal Sole alla Terra impiega sugli 8 minuti) e diventa grande per distanze interstellari. Come nota scherzosa possiamo dire che colonizzando altri pianeti del sistema solare, dovremo scegliere un sistema di riferimento "legale", senno' problemi di successione nel caso di morti quasi simultanee sulla terra e su un pianeta lontano daranno luogo ad una disputa insolubile su quale evento sia avvenuto prima!

Si possono definire per i quadrivettori alcune proprieta' analoghe agli usuali vettori. Diciamo che due quadrivettori \underline{A} , \underline{B} sono ortogonali se

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = 0 \quad (3.9)$$

Si vede, applicando la definizione, che dato un quadrivettore del genere tempo, i suoi ortogonali sono del genere spazio. (Infatti scelto il sistema di riferimento in cui l'asse temporale e' diretto come il vettore in questione, tutti i quadrivettori ortogonali devono avere solo componenti spaziali).

Per concludere il paragrafo osserviamo che l'invariante fondamentale della relativita' ristretta puo' scriversi:

$$|\underline{x}|^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g^{ij} x_i x_j ; g^{00} = 1 ; g^{11} = -1 ; g^{22} = -1 ; g^{33} = -1 ; g^{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \quad (3.10)$$

La g^{ij} viene chiamata matrice metrica. Si possono immaginare spazi in cui la matrice metrica resti simmetrica, ma non abbia la forma semplice dell'espressione precedente, ma vari punto per punto. Si apre in matematica il campo assai interessante della geometria differenziale, con notevoli applicazioni nello studio delle superfici, della meccanica analitica e della relativita' generale. Ma l'argomento esula da questo corso.

4. Tempo proprio, quadrivelocita' e quadriaccelerazioni.

Formuliamo la cinematica del punto materiale nello spazio di Minkowski.

Scegliamo un sistema di riferimento e un punto materiale P di coordinate (ct, x, y, z) ovvero $(x_i \text{ con } i = 0, 1, 2, 3)$. La sua evoluzione spazio-temporale e' rappresentata da una successione di ∞^1 eventi, detta con nome suggestivo

linea di universo, sempre del genere tempo ($ds^2 > 0$). Questa linea, che rappresenta la *storia* della particella e' individuabile mediante equazioni del tipo

$$x_i = x_i(\lambda) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

con λ parametro arbitrario, non avente necessariamente significato fisico, od anche del tipo particolare

$$x_\alpha = x_\alpha(x_0) \quad ; \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

esprimente direttamente le variabili di posizione in funzione del parametro temporale x_0 (equazioni orarie). La restrizione $ds^2 > 0$ e' imposta dalla impossibilita' fisica, per un oggetto materiale qualunque, di raggiungere la velocita' della luce.

Definiamo *tempo proprio*, $d\tau$, la seguente quantita':

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} \quad (4.3)$$

Il suo significato fisico e' il tempo misurato nel sistema di moto incipiente, cioe' solidale (in quell'istante) all'osservatore. Come gia' discusso nel secondo paragrafo del capitolo, il tempo proprio e' legato a quello relativo dt dalla espressione:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.4)$$

Dalla definizione differenziale e' possibile passare, mediante l'integrazione lungo la linea di universo a partire da un punto arbitrario ed orientamento verso il futuro, ad una variabile τ che si dira' il *tempo proprio della particella*. Questo tempo si puo' pensare (per motivi di concretezza) come indicato da un orologio solidale alla particella. Per il suo carattere assoluto (cioe' non dipendente dal sistema di riferimento) e per il suo significato fisico, la variabile τ puo' essere utilmente assunta quale parametro per individuare i singoli eventi sulla linea di universo.

Oltre al tempo proprio, si possono definire per un punto materiale le altre grandezza cinematiche assolute.

QUADRIVELOCITA'.

Definiamo quadrivelocita' il quadrivettore \underline{U} :

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (4.5)$$

Si tratta di un vettore del genere tempo, tangente alla linea di universo, la cui norma, come e' immediato riconoscere ha in valore costante c^2 :

$$\left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{d\tau}\right)^2 = c^2 \quad (4.6)$$

Stante la (4.6), solo tre delle quattro componenti della quadrivelocita' sono indipendenti.

Se si tiene conto della relazione (4.4) tra tempo proprio e tempo relativo, ci si rende conto che le U_i sono legate alle tre componenti della velocita' ordinaria della particella nel sistema di riferimento scelto, dalle seguenti relazioni:

$$U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad (v^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (v_\alpha)^2) \quad (4.7)$$

QUADRIACCELERAZIONE.

Introduciamo ora una grandezza, la cui importanza apparira' nel prossimo Capitolo. Definiamo quadriaccelerazione \underline{A} la derivata della quadrivelocita' rispetto al tempo proprio:

$$A_i = \frac{dU_i}{d\tau} \quad (4.8)$$

A differenza della quadrivelocita', la quadriaccelerazione e' un vettore del genere spazio, ortogonale alla traiettoria d'universo. infatti derivando la (4.6) si verifica immediatamente che \underline{A} e' ortogonale a \underline{U} :

$$\frac{d(\underline{U} \cdot \underline{U})}{d\tau} = 0 = 2 \frac{d\underline{U}}{d\tau} \cdot \underline{U} = 2 \underline{A} \cdot \underline{U} \quad (4.9)$$

Tale legame mostra anche che le componenti della quadriaccelerazione non sono fra di loro indipendenti.

Tenendo conto della (4.4) si riconosce che le quattro componenti della quadriaccelerazione sono legate alle tre componenti della accelerazione ordinaria ($a_\alpha = \frac{dv_\alpha}{dt}$) dalle relazioni seguenti:

$$A_0 = \frac{(\underline{v} \cdot \underline{a})}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})^2} ; \quad A_\alpha = \frac{a_\alpha}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} + \frac{(\underline{v} \cdot \underline{a})v_\alpha}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^2} ; \quad ((\underline{v} \cdot \underline{a}) = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha a_\alpha) \quad (4.10)$$

Come si vede le componenti della quadriaccelerazione non hanno un immediato significato fisico, a meno che' non siamo in un sistema di moto incipiente, cioe' istantaneamente in quiete) in cui $A_0 = 0$ e $A_\alpha = a_\alpha$.

5. Cenni alle trasformazioni di Lorentz generali.

Abbiamo scritto esplicitamente le trasformazioni di Lorentz quando la velocita' del nuovo sistema di riferimento era diretta come l'asse x . E' facile capire il caso generale, quando la velocita' del moto traslatorio del sistema mobile e' diretta in una direzione arbitraria: basta comporre tre trasformazioni. La prima e' una usuale rotazione degli assi spaziali facendo coincidere la direzione della velocita' di traslazione con l'asse x , la seconda e' una trasformazione speciale di Lorentz come descritta dalla (1.3), ed infine la terza e' una normale trasformazione spaziale riportante l'asse x nella direzione della traslazione. Le formule generali sono un po' tediose, ma prive di difficolta' sostanziali.

Il gruppo delle trasformazioni siffatte viene chiamato *gruppo di Lorentz* e gioca un ruolo importante in fisica, in quanto ogni legge fisica, per essere coerente con la relativita', deve essere invariante per tale gruppo. L'introduzione dello spazio di Minkowski e dei quadrivettori nella scrittura delle formule da' un carattere geometrico immediatamente invariante.

6. Conferme sperimentali della cinematica relativistica.

L'esperienza di Michelson-Morley e' ovviamente ben spiegata dalla cinematica relativistica, perche' e' proprio dallo studio di questo fenomeno, che e' partito il riesame della meccanica classica e la formulazione della nuova teoria.

Gli effetti ottici , gia' esaminati nel contesto classico, possono essere facilmente riesaminati, usando le leggi relativistiche di composizione delle velocita'. Non lo facciamo in dettaglio, dando subito le conclusioni. Le espressioni relativistiche sono, ovviamente differenti da quella classiche, ma con queste ultime coincidono al primo ordine in $\frac{v}{c}$. Poiche' le correzioni del secondo ordine sono piccolissime, i fenomeni sperimentali discussi nel Capitolo 1, vengono ben spiegati anche dalla cinematica relativistica. Osserviamo che in relativita' nasce un fenomeno nuovo: l'effetto Doppler trasverso. Abbiamo visto che cosa e' l'effetto Doppler: se l'osservatore si muove nella stessa direzione del moto della sorgente luminosa, vede uno spostamento della frequenza. Tale effetto viene chiamato "effetto Doppler longitudinale". Se si muove in modo ortogonale al moto della sorgente luminosa, classicamente non avviene nessun cambiamento di frequenza. In relativita' invece vi e' un cambiamento di frequenza (effetto Doppler trasverso) dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$. Ovviamente questo effetto e' piccolissimo, ma si e' potuto osservare sperimentalmente negli anni 1960, con una esperienza assai accurata ed il risultato sperimentale e' in accordo con la teoria.

Discutiamo ora brevemente sulle conferme sperimentali dell'allungamento dei tempi.

Al giorno d'oggi le verifiche sono tantissime ed il fenomeno e' completamente ben accertato. La precisione degli orologi atomici ha permesso di fare anche questa

verifica, piu' didattica che scientifica: partiamo con due orologi sincronizzati fra di loro, poi il primo rimane fermo, mentre il secondo viene portato dallo sperimentatore su normali aerei di linea a fare il giro del mondo. Dopo poco piu' di un giorno il secondo orologio torna accanto al primo. Come prevedibile alla luce della teoria della relativita', il secondo orologio risulta indietro rispetto al primo.

Sulla base di questo fenomeno dell'allungamento dei tempi, qualche anno fa al momento dei viaggi sulla luna era uscito un calcolo scherzoso: agli astronauti che andavano sulla Luna per una settimana bisognava aumentare o diminuire lo stipendio visto che il loro tempo biologico era variato rispetto a quello che avrebbero avuto sulla Terra? In base alla relativita' ristretta senza dubbio il loro tempo vissuto era minore e quindi avrebbe dovuto essere diminuito, ma scattava un altro fenomeno che esce dall'ambito di studio di questo corso: la relativita' generale vuole che il tempo dipenda anche dal campo gravitazionale e sia tanto piu' lento quanto il campo piu' grande. Ora sulla Luna il campo e' minore e quindi il tempo fluisce piu' veloce. I due effetti (relativita' ristretta e relativita' generale) sono in competizione e vince numericamente il secondo. Quindi scherzosamente si suggeriva agli astronauti un contenzioso sullo stipendio!

Vediamo brevemente quella che e' stata storicamente la prima verifica sperimentale del fenomeno dell'allungamento dei tempi. Si e' studiata la vita media del mesone μ prodotta dall'interazione dei raggi cosmici con gli alti strati dell'atmosfera. Come e' noto il mesone μ e' una particella avente la stessa carica dell'elettrone, massa circa 200 volte maggiore ed e' radioattiva, nel senso che dopo un certo tempo dal momento in cui essa e' stata generata, si disintegra spontaneamente in un elettrone e due particelle assai leggere chiamate neutrini direttamente osservabili con grandissima difficoltà, ma indirettamente congettrate per la necessita' di soddisfare al principio di conservazione dell'energia e della quantita' di moto

$(\mu \rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu)$.

Sfuttando opportunamente questa disintegrazione e' possibile valutare

la *vita media* τ_o dei mesoni incidenti su una massa metallica e da essa frenati.

Le misure danno

$$\tau_o = 2,15 \cdot 10^{-6} \text{sec} \quad (6.1)$$

Durante una vita cosi' breve il mesone, pur se fosse animato da una velocita' pari a quella della luce $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$, non potrebbe che percorrere un cammino piuttosto breve

$$l = \tau_o c = 645 \text{m} \quad (6.2)$$

Ora questo risultato sarebbe in contraddizione con i risultati di altre osservazioni, concernenti la sopravvivenza di mesoni a diverse quote, secondo le quali e' certo che molti mesoni osservati ad una certa quota hanno avuto origine a quote piu' alte di diversi chilometri.

La contraddizione si elimina facilmente interpretando il valore sperimentale τ_o come *vita media a riposo* del mesone (difatti essa e' stata valutata per mesoni frenati e quindi a bassa velocita') ed attribuendogli invece una *vita media*

$$\tau = \frac{\tau_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.3)$$

quando il mesone e' animato da velocita' v .

Se si tiene conto che per una velocita' v pari ai 99/100 della velocita' della luce il fattore di Lorentz vale circa 10, anche il percorso medio del mesone risulta decuplicato, raggiungendo quindi il valore 6450 m , valore coerente con le osservazioni sperimentali.

Concludendo questa rapida rassegna, si puo' dire che l'esperienza offre significative conferme delle formule relativistiche gia' in ambito puramente cinematico. Piu'

numerose ed altrettanto soddisfacenti conferme si avranno nell'ambito dei fenomeni dinamici.

CAP. 3 .DINAMICA RELATIVISTICA ED EQUAZIONI DI LAGRANGE

1. Grandezze dinamiche.

In questi appunti di meccanica relativistica parliamo principalmente del moto di un punto materiale. Solo parlando delle leggi di conservazione esamineremo sistemi piu' complessi.

Anche in meccanica relativistica la costituzione fisica di un punto materiale si suole riassumere in uno scalare positivo invariante m_o , che chiamiamo

massa propria. Se il punto materiale e' considerato privo di struttura interna la massa propria va intesa come una costante, caratteristica della particella e non suscettibile di variare lungo la sua storia. Se invece lo schema di punto materiale va inteso come una semplificazione di un sistema macroscopico molto concentrato, allora l'urto con altre particelle (una reazione nucleare) puo' cambiare la natura della particella e la sua massa propria, con conseguenze clamorose, come vedremo in seguito. Non discuteremo il caso in cui oltre alla massa propria la particella possieda altri elementi strutturali intrinseci (come il momento magnetico intrinseco, chiamato *spin*).

Estendiamo ora alla meccanica relativistica una grandezza ben nota in meccanica classica e che qui, come allora, giochera' un ruolo importante nella dinamica.

QUADRIQUANTITA' DI MOTO .

Definiamo come *quadriquantita' di moto* \underline{P} (detta anche *quadriimpulso*

o *quadrimento*) la grandezza:

$$\underline{P} = m_o \underline{U} \quad (1.1)$$

Come già \underline{U} anche \underline{P} e' tangente alla traiettoria di universo con orientamento verso il futuro. Dalle (4.7) del capitolo precedente si vede che le sue tre componenti spaziali

$$P_\alpha = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_\alpha = m v_\alpha = p_\alpha \quad (1.2)$$

costituiscono un vettore \underline{p} a tre componenti appartenente all'iperpiano $x_o = cost$ e cioè' allo spazio fisico. Questo vettore e' interpretabile come

quantita' di moto ordinaria relativa al riferimento associato alle coordinate x_i .

Dalla (1.2) appare che il vettore \underline{p} risulta , come in meccanica classica, il prodotto del vettore velocita' per la massa, pur di interpretare la quantita'

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3)$$

come massa della particella *relativa* al riferimento suddetto. Appare da qui come il concetto di massa subisca in relativita' una notevole evoluzione: c'e' un nucleo invariante, come in meccanica classica, costituito dalla massa proprio m_o , ed in piu' c'e' un fattore che dipende dalla velocita', e tende all'infinito quando $v \rightarrow c$. Torneremo su questo importante punto dopo aver formulato le leggi della dinamica.

La componente zero della quadriquantita' di moto vale:

$$P_o = c \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c \quad (1.4)$$

Il significato e l'importanza di questa componente del quadriimpulso, e quindi anche della massa relativa , derivano specialmente dalla sua stretta connessione con la nozione di energia. Consideriamo infatti la quantita', sempre positiva,

$$E = c P_o = m c^2 \quad (1.5)$$

Non soltanto essa ha le dimensioni di una energia, ma e' facile riconoscere facendo uno sviluppo in serie e fermandosi al primo ordine, che, per valori abbastanza piccoli di $\frac{v}{c}$, si puo' scrivere

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (1.6)$$

Cosicche' essa differisce solo per una costante additiva $m_0 c^2$ dall'energia cinetica classica (per piccole velocita'). Cio' suggerisce di assumere per ogni velocita' la (1.5) come definizione di *energia* della particella. Torneremo su questo importante punto in seguito.

2. Leggi del moto di un punto materiale.

Procediamo come in meccanica classica, generalizzando sia la prima, sia la seconda legge di Newton.

La prima e' il PRINCIPIO DI INERZIA: "In assenza di forze il punto o rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme in ogni riferimento galileiano".

Se cio' non succede, assumiamo in una grandezza \underline{K} tutta la perturbazione dovuto all'ambiente, e formuliamo la seconda legge di Newton generalizzata.

LEGGE DEL MOTO:" Se su un punto materiale di massa proprio m_0 agisce una quadriforza \underline{K} , quest'ultima indace una quadriaccelerazione \underline{A} tale che

$$m_0 \underline{A} = \underline{K} \quad (2.1)$$

La (2.1) va completata dando la posizione e la velocita' iniziale.

Se abbiamo una definizione operativa della quadriforza \underline{K} , la (2.1) ci permette di individuare il moto, senno' essa e' una sorta di definizione di \underline{K} . Ma non e' questo il punto chiave: il modello relativistico, come quello classico, da' una visione

deterministica del mondo. In qualche senso il punto chiave consiste nel teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, che assicura lo stato del punto al tempo t , conoscendo posizioni e velocità iniziali. In questo senso la relatività, pur rivoluzionaria per molti versi, non si allontana dallo schema deterministico classico. Il prossimo anno vedrete un modello, la meccanica quantistica, ove questo schema deterministico non si applica più alla esatta posizione della particella, ma alla sua distribuzione probabilistica.

Torniamo brevemente alla quadriforza \underline{K} . In molti casi essa è ben nota, la forza di Lorentz ed il problema del moto si riduce alla soluzione della (1.7). Osserviamo, che in generale \underline{K} non può essere qualsiasi ma, dovendo essere diretta come \underline{A} , deve essere ortogonale ad \underline{U} , e quindi

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = 0 \quad (2.2)$$

e quindi le quattro componenti della quadriforza non sono indipendenti, ma sono legate dalla (2.2).

3. Formulazione relativa delle leggi di moto.

Le equazioni del moto assumono una forma molto significativa in un sistema di riferimento preciso. Per esprimere la (2.1) in un riferimento fissato svolgeremo poche semplici conti (da seguire, ma non ricordare per l'esame) fino ad arrivare alle equazioni del moto (da ricordare all'esame).

Esplicitando la (2.1) si ha:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ; \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2)$$

Introduciamo ora il vettore \underline{F} (a tre componenti):

$$F_\alpha = K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.3)$$

che chiamiamo *forza relativa* (al sistema galileiano considerato) e notiamo che, stante la (2.6), la quantità

$$cK_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{cK_\alpha U_\alpha}{U_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.4)$$

rappresenta la potenza istantanea di detta forza. Basta allora tener conto delle definizioni di \underline{p} ed E per attribuire alle (3.1) e (3.2) (quest'ultima moltiplicata preventivamente per c) la forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{dp}{dt} = \underline{F} \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{dE}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.6)$$

Con le definizioni introdotte e con la legge del moto adottata si possono ricostruire formalmente le classiche equazioni della quantità di moto e dell'energia:

Derivata temporale della quantità di moto = Forza

Derivata temporale dell'energia = Potenza istantanea della forza

Naturalmente solo per basse velocità queste equazioni relativistiche si identificano completamente, e non solo formalmente, con quelle classiche.

Come già nella meccanica classica, l'equazione (3.6) segue dall'equazione (3.5), cioè il teorema dell'Energia (detto anche delle forze vive) segue dalle equazioni del

moto. Infatti se moltiplichiamo i due membri della (3.5) per v_α , sommiamo su v_α si ha successivamente (non necessario esame):

$$\sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha \left(\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv_\alpha}{dt} + \frac{m_o v_\alpha}{c^2} \frac{\underline{v} \cdot \underline{a}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \right) = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.7)$$

$$m_o \underline{v} \cdot \underline{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v^2}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \right) = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.8)$$

$$\frac{m_o \underline{v} \cdot \underline{a}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.9)$$

e quindi finalmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \underline{F} \cdot \underline{v} \quad (3.10)$$

cioe' appunto la (3.6). (Fine non necessario esame).

La forza principale nelle applicazioni e' la Forza di Lorentz esercitata da un campo elettromagnetico su di una particella in moto:

$$\underline{F} = q \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{H} \right) \quad (3.7)$$

Vedremo nel prossimo capitolo qualche importante esempio.

4. Equazioni di Lagrange e di Hamilton relativistiche.

Vogliamo far vedere che le equazioni del moto (3.5) possono essere dedotto dalle equazioni di Lagrange, pur di scegliere opportunamente la Lagrangiana. Vediamo

come. Supponiamo di avere un punto materiale soggetto ad una forza conservativa $\underline{F} = -\nabla V(\underline{x})$; poiche' l'energia cinetica classica T ha il suo equivalente relativistico in $E = mc^2$, potremmo tentare di costruire la Lagrangiana relativistica come differenza fra E e V , ma non funzionerebbe. Infatti questa differenza messa nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (4.1)$$

non darebbe le equazioni del moto (3.5).

Invece la buona scelta della Lagrangiana e':

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V \quad (4.2)$$

che posta nella (4.1) da' le corrette equazioni del moto (Invito il lettore a verificarlo).

Data la Lagrangiana, abbiamo un metodo generale per costruire la Hamiltoniana, che con le equazioni di Hamilton ci dia le equazioni del moto. Costruiamo infatti l'energia generalizzata:

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L = mc^2 + V \quad (4.3)$$

Dalla energia generalizzata si passa all'Hamiltoniana, scrivendo la prima nelle variabili coniugate.

Quindi l'Hamiltoniana e' proprio la somma dell'energia cinetica relativistica e l'energia potenziale, in stretta analogia con il caso classico.

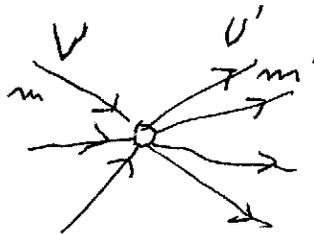
A questo punto possiamo usare anche nel caso relativistico il bagaglio di risultati ottenuti nella meccanica analitica della prima parte, senza ulteriori difficolta'.

5. Leggi di conservazione, *equivalenza massa/energia*

Finora abbiamo studiato il moto di un punto materiale soggetto ad una forza esterna. Poniamoci ora il problema di avere vari punti materiali, inizialmente liberi, che poi interagiscono fra di loro con una reazione nucleare e poi escono di nuovo liberi. Nell'urto possono cambiare natura, massa, velocità, ma è molto naturale ed è confermato dall'esperienza supporre che la quadriquantità di moto del sistema sia conservata nell'urto (come nel caso classico, dove era una conseguenza del principio di azione/reazione). Concretizzando in formule, se prima dell'urto avevamo n particelle di massa propria $m_{o,h}$, ciascuna con quadrivelocità \underline{U}_h , dopo l'urto avremo n' particelle con massa propria $m'_{o,h}$ e \underline{U}'_h tali che:

$$\sum_{h=1}^n m_{o,h} \underline{U}_h = \sum_{h=1}^{n'} m'_{o,h} \underline{U}'_h \quad (5.1)$$

Fig.1



La cosa notevole che l'energia di ogni particella è data mc^2 e quindi una reazione nucleare che comporti una piccola perdita di massa produce aumenti della velocità. Il grande valore di c impone che questi aumenti siano molto grandi. Siamo arrivati alla famosa equivalenza *massa/energia* ormai di dominio comune.

Diamo un semplice esempio, che illustra bene questo concetto.

ESEMPIO.

Consideriamo una particella inizialmente a riposo, con massa propria M . Ad un certo istante decade in due particelle di ugual massa propria m e velocita' di intensita' \underline{v}_1 e \underline{v}_2 . Determinare \underline{v}_1 e \underline{v}_2 .

Risoluzione.

La conservazione della quadriquantita' di moto impone:

$$0 = \frac{m\underline{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m\underline{v}_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (5.2)$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (5.3)$$

La (5.2) impone $\underline{v}_1 = -\underline{v}_2$, cioe' le due particelle decadono lungo la stessa direzione, ma con versi opposti. Chiamato $v = |\underline{v}_1|$, la (5.3) diventa:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.4)$$

da cui

$$v = c \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (5.5)$$

Quindi se nel decadimento si perdesse un decimo della massa, cioe' $2m = \frac{9}{10}M$, le particelle prodotte nel decadimento andrebbero a velocita' dell'ordine di un centesimo di quella della luce, cioe' altissima. \square

Naturalmente perche' questo effetto abbia un interesse pratico, bisogna trovare reazioni nucleari nelle quali ci sia una perdita di massa. Per trovarle con una perdita di massa rilevante si e' dovuto aspettare la seconda meta' degli anni trenta, con la fissione dell'uranio. Da li' si e' aperta la strada ai reattori nucleari ed alla bomba atomica.

*Da una reazione nucleare viene anche
l'energia del sole.*

Una altra applicazione rilevante delle leggi di conservazione (l'effetto Compton) sara' data nel prossimo capitolo.

6. Cenni alle verifiche sperimentali..

Oltre alla cinematica, anche la dinamica relativistica e' molto ben verificata.

Il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno e' cosi' ben stabilito, di essere usato nell'ingegneria degli acceleratori di particelle con altissima precisione. (Naturalmente lo schema qui usato va perfezionato, perche' una particella carica di moto non rettilineo uniforme emette luce e di questo effetto va tenuto conto).

Quanto alle leggi di conservazione, esse sono cosi' naturali da essere state usate prima ancora di una vasta verifica, per ipotizzare negli anni trenta l'esistenza di una particella, il neutrino, allora non osservabile, ma necessaria per ripristinare la conservazione del quadriimpulso. Oggi le verifiche sono vastissime, clamorose ed alcune (bomba atomica) drammatiche.

CAP.4. ESEMPI IMPORTANTI.

1. Moto in un campo elettrico costante.

Problema.

Prendiamo un punto materiale relativistico di massa propria m_0 , carica q e' soggetto ad un campo elettrico costante \underline{E} . Prendiamo come variabile lagrangiana per individuare la posizione del punto l'ascissa x lungo un asse diretto come il campo

elettrico. Supponiamo che il punto sia inizialmente fermo nell'origine. Trovare il moto.

Risoluzione.

Le equazione del moto (Cap.3 (3.5)) sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q\mathcal{E} \quad ; \quad v = \dot{x} \quad (1.1)$$

ove \mathcal{E} e' la componente del campo elettrico lungo l'asse x .

Integrando la prima equazione della (1.1) , si ha:

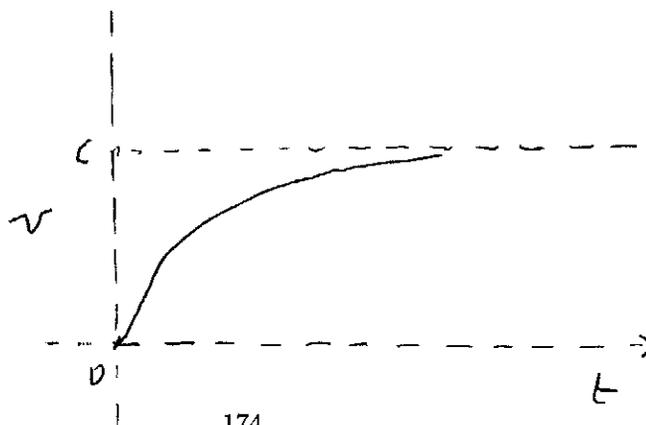
$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \int_0^t ds \frac{q\mathcal{E}}{m_0} = \frac{q\mathcal{E}}{m_0} t \quad (1.2)$$

Da cui

$$v = \frac{cq\mathcal{E} t}{\sqrt{c^2 m_0^2 + q^2 \mathcal{E}^2 t^2}} \quad (1.3)$$

Si vede che per tempi lunghi, quando $t \rightarrow \infty$ allora $v \rightarrow c$, in accordo con la insuperabilita' della velocita' della luce. Succede cioe' che aumentando la velocita', aumenta l'inerzia del punto e diventa sempre piu' difficile accelerare. Invece per piccoli t e quindi per basse velocita' il punto si comporta classicamente e $v \approx \frac{q\mathcal{E}t}{m_0}$ (vedi Fig.1).

Fig.1



Integrando la (1.3) si ottiene la $x(t)$.

□

2. Moto in campo magnetico costante.

Problema.

Un punto materiale relativistico di massa propria m_o , carica q , e' soggetto ad un campo magnetico costante \underline{H} . Inizialmente il punto materiale ha una velocita' \underline{v}_o ortogonale ad \underline{H} .

i) Discutere il moto.

ii) Dire anche se esistono punti di equilibrio stabile sia quando $\underline{H} = 0$ sia quando $\underline{H} \neq 0$.

Risoluzione.

i) Incominciamo col discutere il caso classico; vedremo che quello relativistico e' molto simile. Innanzi tutto la forza di Lorentz vale $\frac{q}{c} \underline{v} \wedge \underline{H}$, quindi e' una forza deviatrice, cioe' sempre ortogonale alla velocita'. Essa non fornisce energia al punto ed il modulo della velocita' si conserva. Come conseguenza si ha che l'intensita' della Forza di Lorentz si conserva nel tempo. Concludendo, il moto e' circolare uniforme lungo una circonferenza tangente a \underline{v}_o e di raggio $r_{classico}$:

$$r_{classico} = \frac{c m_o}{q H} v \quad (2.1)$$

Nel caso relativistico l'analisi e' la stessa sostituendo alla massa propria (che nel caso classico rimaneva invariante) la massa relativistica m . Quindi il moto e' sempre circolare uniforme lungo una circonferenza tangente a \underline{v}_o e di raggio r uguale a:

$$r = \frac{c m_o}{q H} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.2)$$

Questa formula si verifica assai bene nelle macchine acceleratrici; osservate che quando v tende a c il raggio r tende all'infinito, cioè l'inerzia del punto diventa grandissima.

ii) Avendo il moto esplicito, è facile capire la stabilità ed osservare che la risposta è la stessa sia in meccanica classica, sia in quella relativistica. Ogni posizione è punto di equilibrio. La natura di tale punto cambia se il campo magnetico esiste o no. Nel secondo caso (punto libero) il moto è rettilineo uniforme e quindi ogni posizione non è mai posizione di equilibrio stabile. Quando il campo magnetico è presente, bisogna distinguere due casi: 1) se il punto è obbligato a stare sul piano ortogonale al campo magnetico ogni punto è di equilibrio stabile, 2) se vi è una piccola componente della velocità iniziale parallela ad \underline{H} , allora il moto è uniforme lungo un'elica cilindrica, cioè uniforme parallelamente ad \underline{H} e circolare uniforme nel piano ortogonale ad \underline{H} . Si ha quindi una stabilità condizionata (a stare su tale piano).

Si vede quindi che il campo magnetico ha un effetto stabilizzante, proprietà largamente usata nella tecnologia.

3. Moto della terra attorno al sole.

(Non necessario esame) Vogliamo studiare il moto di un punto materiale relativistico soggetto ad una forza centrale del tipo $\underline{F} = -\nabla \frac{g}{r}$, ove g dà l'intensità della forza ed r indica la distanza del punto materiale dal centro della forza.

Lo studio è molto simile a quello svolto nel caso classico (nel problema dei due corpi) e qui tracciamo solo per grandi linee la dimostrazione ed accenniamo al risultato. Innanzitutto anche qui osserviamo che la conservazione del momento di quantità di moto (ovvero del suo analogo relativistico con la massa variabile) impone che

il moto sia piano. In tale piano introduciamo coordinate polari; l'invarianza della Lagrangiana per rotazioni da' un integrale primo, mentre un secondo (l'energia totale) nasce dalla non dipendenza esplicita della Lagrangiana del tempo. Questi due integrali primi permettono di risolvere il problema tramite integrazioni (cioe' come si suol dire, per quadrature). Le orbite non sono piu' ellissi come nel caso classico, ma ellissi che ruotano lentamente, si ha un cosiddetto moto "a rosetta". Si hanno sempre punti con distanza minimo e massima, ma il punto in cui la distanza massima viene raggiunto non e' sempre lo stesso come nel caso classico, ma ruota ad ogni passaggio di un angolo costante. Si ha un cosiddetto fenomeno di "precessione".

Nei pianeti del sistema solare, si osserva questo fenomeno, ovvero le correzioni relativistiche al loro moto? Si osserva solo su Mercurio, perche' l'unico pianeta abbastanza veloce per evidenziare tali correzioni. Quantitativamente il risultato pero' non e' in accordo con l'esperienza, perche' in questo caso dobbiamo anche tener conto dell'effetto sulla legge di gravitazione universale dell'elevato campo gravitazionale del Sole, e quindi entriamo nella relativita' generale.

Anche nell'ambito atomico per gli elettroni piu' prossimi al nucleo, si hanno correzioni relativistiche, ma qui entriamo nella meccanica quantistica.

4. Effetto Compton.

Ai primi del millenovecento si e' investigato su di un duplice aspetto della luce, vista sia come onda, sia come insieme di particelle, i fotoni, che si muovano alla velocita' della luce. Non voglio discutere qui questo concetto, che e' alle basi dello sviluppo della meccanica ondulatoria. Diro' solo che l'idea della luce come "corpuscoli" era antichissima e nasce spontanea dall'ottica geometrica. Evolvendosi poi l'ottica ondulatoria, di cui l'ottica geometrica e' una approssimazione, si poteva

pensare che la descrizione corpuscolare della luce fosse destinata ad essere solo una descrizione approssimata della realta'. Non e' stato cosi', la luce rimane composta da fotoni e l'onda diventa un'onda di probabilita' dei fotoni stessi. Lascio questo punto a corsi successivi. Diro' solo qui che l'identificazione del fotone di una certa energia con il colore della luce avviene supponendo che esista una relazione universale fra l'energia del fotone e la frequenza della luce:

$$E = h\nu \quad (4.1)$$

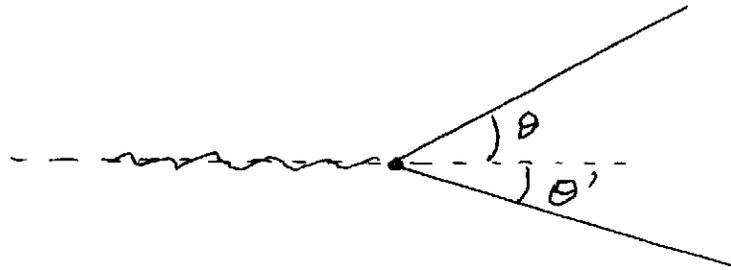
ove h e' una costante, detta di Planck. L'identificazione ha avuto la conferma di sterminata messe di verifiche e va ritenuta sicura.

Quindi misurare l'energia di un fotone, equivale al colore della luce, misura abituale in un laboratorio.

Descriviamo quindi il fenomeno, che ha verificato sia le leggi di conservazione viste nel precedente capitolo, sia questa natura corpuscolare della luce.

Abbiamo un fotone di una frequenza ν che si muove lunga l'asse x e che incide su un elettrone fermo di massa a riposo m_0 . Vi e' un urto, molto localizzato nello spazio e che avviene in un tempo molto breve e la cui struttura non indaghiamo, e sia il fotone, sia l'elettrone vengono diffusi a due angoli θ e θ' (vedi Fig.1). Il fotone perde energia dandola all'elettrone e quindi dopo l'urto la sua frequenza ν' e' inferiore. Vogliamo sapere quanto vale ν' al variare di θ .

Fig.1



Esaminiamo un po' piu' in dettaglio una particella che si muove alla velocita' della luce. Osserviamo che essa deve avere massa proprio nulla, se vogliamo che abbia energia finita. Inoltre per qualunque particella, il fatto che la norma della quadrivelocita' sia finita, (Cap.2 (4.6)), comporta

$$E^2 - P^2 c^2 = m_o^2 c^4 \quad (4.2)$$

e quindi per particelle con massa propria nulla:

$$E = pc \quad (4.3)$$

Torniamo alla nostra domanda. Il conto e' facile usando le leggi di conservazione e ricordando che senza perdita di generalita' possiamo ammettere che il moto si svolga nel piano del foglio. Si ottiene (chiamato $\lambda = \frac{c}{\nu}$)

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_o c} (1 - \cos \theta) \quad (4.4)$$

La grandezza $\lambda_c = \frac{h}{m_o c}$ viene detta lunghezza Compton. Il fenomeno osservato e' il completo accordo con le previsioni teoriche.

5. Domande e risposte.

Abbiamo visto che la velocita' della luce e' la massima raggiungibile. Ogni segnale fisico o e' o piu' lento o si muove come c . (D'altra parte se si riuscisse a trasmettere l'informazione a velocita' superiore a quella della luce, potremmo violare il principio di causalita'). Naturalmente e' possibile considerare punti *non materiali*, ma *geometrici*, che si muovano a velocita' superiore di c , ma essi in questo caso *non*

trasmettono alcuna informazione. Ovviamente si possono inventare infiniti esempi. Immaginemone uno. Prendiamo una insegna luminosa rettangolare, composta di molte lampadine che si accendono con un piccolo sfasamento fra loro dando l'impressione allo spettatore di un'onda che ruoti lungo l'insegna. Posso rendere lo sfasamento così piccolo che questa onda supera la velocità della luce. Naturalmente è un'onda che non trasmette informazione.

Sullo stesso principio si basa un paradosso un po' più sottile, che adesso formuliamo.

Domanda.

L'indice di rifrazione n è dato dal rapporto tra velocità della luce nel vuoto c e quella nel mezzo u :

$$n = \frac{c}{u} \quad (5.1)$$

Sperimentalmente esistono dei cristalli in cui $n < 1$, cioè $u > c$. Come si concilia col fatto che c deve essere un limite insuperabile?

Risposta.

Tutto il trucco riposa nella distinzione tra velocità di fase, cioè velocità della luce in uno stato stazionario, e quella di un segnale, detta di gruppo. La u della domanda è di fase e può ben essere maggiore a c , ma essa non trasporta informazione, mentre quella di un segnale è effettivamente limitata da c . Nella materia succede grossomodo così: arriva l'onda elettromagnetica, interagisce con gli atomi del mezzo, li eccita, vanno in fase fra loro e in uno stato stazionario tutto va come ci fosse una onda elettromagnetica con velocità u ; l'indice di rifrazione registra tale velocità. Ma, ripeto, è un problema stazionario nel tempo. Se accendiamo bruscamente la luce, il segnale rispetta il limite relativistico.

Domanda (ingenua).

Nella aberrazione stellare abbiamo composto la velocità della luce con quella

della terra. Non e' cio' in contrasto con l'insuperabilita' di c ?

Risposta (ovvia).

Il modulo della velocita' della luce e' lo stesso in ogni sistema di riferimento, ma le sue componenti variano e si compongono con la velocita' della Terra. La composizione e' tale che il modulo della nuova velocita' della luce e' ancora c . Per esercizio provate a supporre la luce diretta come l'asse y ed ad applicare la formula (1.8). Vi verra' il risultato che il modulo $c' = c$.

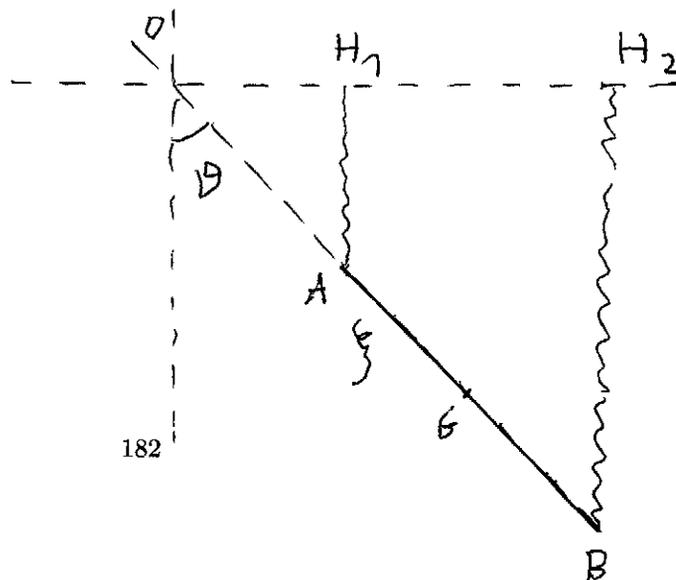
ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

Compito di esonero del 25.10.02.

In un piano verticale e' posto un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano e' posta una guida rettilinea r di massa trascurabile obbligata a ruotare senza attrito attorno al punto O . Su tale asta puo' scorrere senza attrito una sbarra omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L . Tale asta e' soggetta oltre alla forza peso ad altre due forze attive $\underline{F}_1 = -kH_1A$ e $\underline{F}_2 = -kH_2B$ ($k > 0$), ove H_1 e H_2 sono le proiezioni di A e B sull'asse x .

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ del baricentro G dell'asta lungo la guida r e l'angolo θ che OG forma con la verticale discendente z .

- 1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto del sistema.
- 2) Trovare le posizioni equilibrio. Discutere la stabilita' della posizione in cui il baricentro e' piu' basso.
- 3) Trascurando ora la forza peso e le due forze F_1 e F_2 , scrivere due integrali primi del moto.

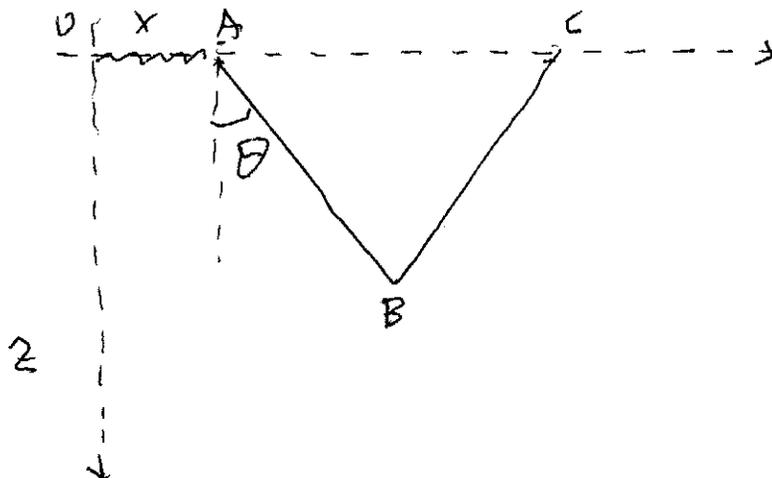


Compito di esonero del 31.10.03.

In un piano verticale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano sono poste due aste omogenee pesanti, AB e BC , ambedue di massa M e lunghezza L . Le due aste sono incernierate tra loro nel punto comune B e libere di ruotare senza attrito. Inoltre sia il punto A sia quello C sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida liscia coincidente con l'asse x . Il sistema e' soggetto, oltre alla forza peso, ad una altra forza attiva, una forza elastica che attrae il punto A verso l'origine: $\underline{F} = -kOA$, ($k > 0$). (Vedi Figura).

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che AB forma con la verticale discendente z .

- 1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne la stabilita'.
- 3) Supponendo in questa domanda $k = 0$ (cioe' la forza elastica assente) scrivere due integrali primi del moto e dirne il significato fisico.



Compito esonero del 15.11.02.

In un piano verticale e' posto un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano e' posto un anello di centro C , massa M e raggio R . Tale anello e' obbligato a traslare senza attrito orizzontalmente, mantenendo il centro C sull'asse x . Una asta rettilinea omogenea pesante di massa m lunghezza $L=R$ ha i suoi due estremi A e B obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida circolare solidale all'anello. Tale asta e' soggetta oltre alla forza peso alla forza attiva $\underline{F} = -kDG$ ($k > 0$), ove D e' un punto fisso di coordinate $(0,-R)$ e G e' il baricentro dell'asta (Ovviamente si tratta di una forza elastica che attrae il punto G verso il punto D).

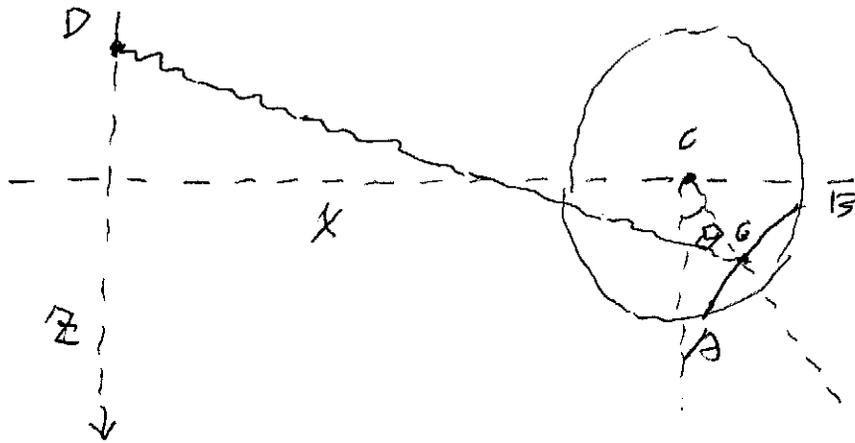
Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che CG forma con la verticale discendente z .

1) Scrivere la funzione di Lagrange. (Per ragioni di tempo non si richiede di scrivere le equazioni del moto).

2) Trovare le posizioni equilibrio, discuterne il numero e la stabilita' in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR}$, ove g e' la costante di gravita'.

3) Ponendo in questa domanda $m=M=R=k=1$ e $g = 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}}$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

(Si ricorda che il momento d'inerzia dell'asta AB rispetto al baricentro G , I_G , vale: $\frac{1}{12}mR^2$).



Compito di esonero del 21.11.03.

In un piano verticale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano e' posta una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L . Sia H un punto dell'asta posto a distanza $\frac{L}{3}$ dall'estremo A . L'asta e' libera di muoversi in tale piano con il vincolo che il punto H e' obbligato a scorrere senza attrito lungo l'asse x . Il sistema e' soggetto, oltre alla forza peso, ad una altra forza attiva, una forza elastica che attrae il punto B verso il punto fisso D posto lungo l'asse delle x a distanza L dall'origine: $\underline{F} = -kDB$, ($k > 0$). (Vedi Figura).

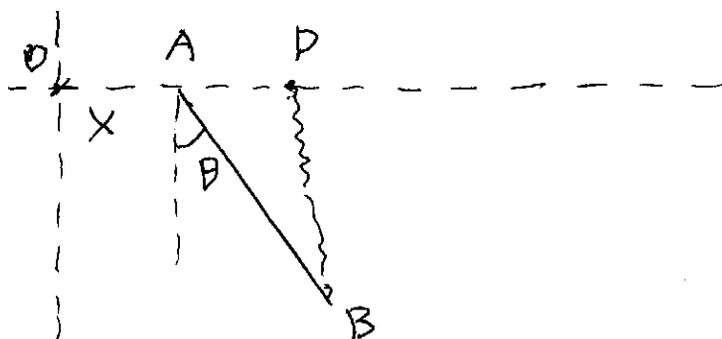
Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di H e l'angolo θ che AB forma con la verticale discendente z .

1) Scrivere la funzione di Lagrange, tralasciando per ragioni di tempo di scrivere le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni equilibrio, discuterne il numero e la stabilita'.

3) Supponendo in questa domanda $M = 1$, $L = 6$, $g = 16$, $k = \frac{1}{2}$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Si ricorda che il momento d'inerzia I_G rispetto al baricentro di una asta omogenea di massa m e lunghezza L e' : $I_G = \frac{1}{12}mL^2$.



Compito esonero del 6.12.02.

I

Data la trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$:

$$Q = \frac{p^\beta}{(2q)^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad P = -3q^{\frac{4}{3}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

trovare i valori del parametro reale β per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q, Q)$.

II

Indichiamo un evento nello spazio-tempo con $E = (ct, x, y, z)$ e scegliamo delle unita' di misura in cui la velocita' della luce $c = 1$. Dati i due eventi:

$$E_1 = (1, 2, 2, 0) \quad ; \quad E_2 = (4, 3, 0, \gamma)$$

trovare i valori del numero reale γ per i quali esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi siano contemporanei.

III

Un particella di massa m_1 e velocita' v_1 diretta lungo l'asse delle x urta contro una particella di massa m_2 e velocita' v_2 anche lei diretta lungo l'asse delle x . Dallo scontro nascono due nuove particelle di massa m'_1 e m'_2 con velocita' v'_1 e v'_2 rispettivamente, ambedue dirette come l'asse delle x . Scegliamo delle unita' di misura in cui la velocita' della luce $c = 1$ e le masse sono numeri puri.

Scegliamo i dati iniziali in cui $m_1 = 2$, $m_2 = \sqrt{21}$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v_2 = -\frac{2}{5}$, $m'_1 = m'_2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{4}$. Trovare i valori di $|v'_1|$ e $|v'_2|$.

Compito esonero del 9.12.03.

I)

Data la trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$:

$$Q = \log\left(\frac{p}{2q}\right) \quad ; \quad P = -\frac{1}{2}qp^\alpha$$

trovare i valori del parametro reale α per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q, Q)$.

II)

Indichiamo un evento nello spazio-tempo con $E = (ct, x, y, z)$ e scegliamo delle unita' di misura in cui la velocita' della luce $c = 1$.

i) Dati i due eventi:

$$E_1 = (\alpha, 1, 0, 0) \quad ; \quad E_2 = (4, 2, 0, 0)$$

trovare il valor2 del numero reale α per i quali esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei. Quando la risposta sia positiva, trovare la velocita' di tale sistema di riferimento.

ii) Dati i due eventi:

$$E_1 = (0, 1, 1, 0) \quad ; \quad E_2 = (1, 2, 1, 1)$$

dire se esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo. Qualora la risposta sia positiva, trovare la velocita' di tale sistema di riferimento.

III)

Due astronauti partono dall'origine al tempo 0 e si muovono l'uno sull'asse dell x negative con velocita' $-\frac{c}{2}$ (c velocita' della luce), il secondo sull'asse delle x positive con velocita' $\frac{c}{4}$. Al tempo T il primo inverte il moto e viaggiando con velocita' $\frac{c}{4}$ al tempo $3T$ arriva nell'origine e li' si ferma. Il secondo astronauta continua a viaggiare fino al tempo $4T$, poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $-\frac{c}{2}$. Arrivato nell'origine al tempo $6T$ vi si ferma. A questo punto, cioe' nell'origine, i due astronuat i confrontano i rispettivi orologi (portati sulle loro astronavi): chi dei due risulta piu' giovane e di quanto?

IV)

Un particella di massa M , ferma, decade in tre particelle di massa m_1, m_2, m_3 e velocità v_1, v_2, v_3 , che si muovono lungo l'asse delle x . Sapendo che la v_1 è nulla ed $m_2 = m_3$ trovare i valori di $|v_2|$ e $|v_3|$.

V)

Una particella relativistica si muove in un piano orizzontale, nel quale è stato introdotto un sistema di coordinate polari (ρ, θ) ed è soggetta ad una forza di energia potenziale $U(\rho) = g\rho^2, g > 0$.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e trovare due integrali primi del moto.

Compito di esame del 17.12.02.

I

In un piano verticale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano è posta una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L . Indichiamo con D il punto di tale asta che si trova a distanza $\frac{L}{4}$ da A . Tale punto è obbligato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale x . L'asta è soggetta, oltre alla forza peso, ad una altra forza attiva, una forza elastica che attrae il punto D verso l'origine: $\underline{F} = -kOD, (k > 0)$. (Vedi Figura)

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di D e l'angolo θ che AB forma con la verticale discendente z .

- 1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Ponendo in questa domanda $M = 1$, $g = 1$, $L = 4$, $k = 1$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

(Si ricorda che il momento d'inerzia dell'asta AB rispetto al baricentro G , I_G , vale: $\frac{1}{12}mL^2$).

II

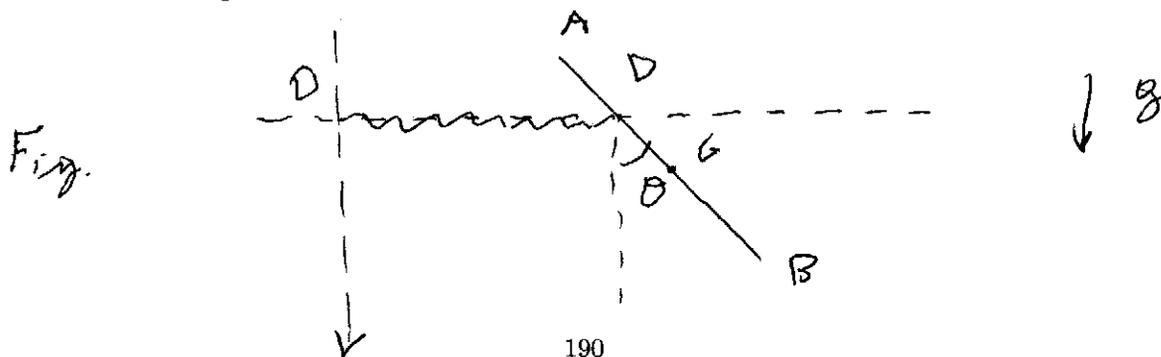
Data la trasformazione di coordinate:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}} ; P = -2(pq^3)^{\beta}$$

con β numero reale, trovare i valori di β in cui essa e' canonica, ed in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q, Q)$.

III

Scriviamo di eventi come $E(ct, x, y, z)$, e prendiamo unita' di misura in cui la velocita' della luce sia $c = 1$ e le posizioni siano espresse da numeri puri. Dati i due eventi $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\alpha, 1, 0, 0)$, trovare il valore di α per cui i due eventi possono avvenire nello stesso posto, trovare la velocita' del sistema di riferimento nel quale effettivamente i due eventi avvengono nello stesso posto e calcolare in tale sistema l'intervallo temporale fra i due eventi.



Compito di esame del 12.12.03.

I

In un piano orizzontale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxy . In tale piano e' posta una asta omogenea AB di massa M e lunghezza L . Il punto A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo l'asse y , mentre il punto B e' libero. L'asta e' soggetta alla forza attiva $\underline{F} = -kHB$, ($k > 0$), ove H e' il punto dell'asse x che dista $a > 0$ dall'origine O . (Vedi Figura 1)

Si assumano come variabili lagrangiane l'ordinata y di A e l'angolo θ che AB forma con l'asse x .

- 1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare di a .
- 3) Ponendo in questa domanda $M = 1$, $L = 1$, $k = 1$, $a = 2$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

II

Data la trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$:

$$Q = p^{\frac{1}{2}} \exp(\alpha q) \quad ; \quad P = -2p^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{q}{2}\right)$$

trovare i valori del parametro reale α per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q, Q)$.

III

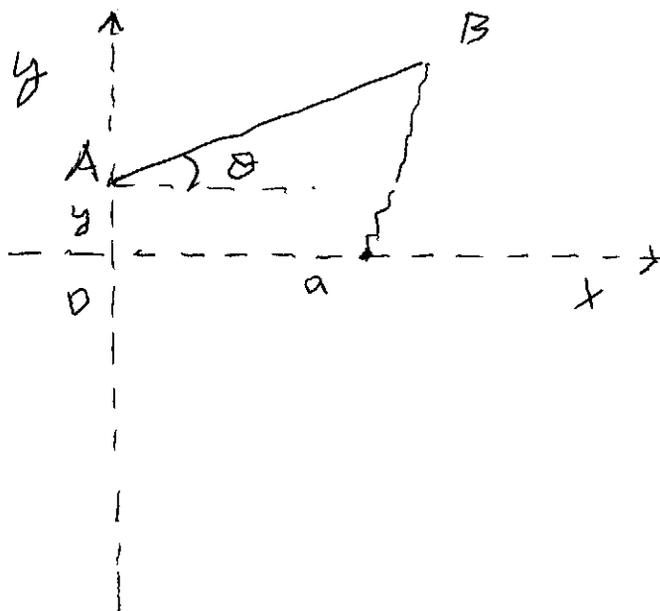
Scriviamo di eventi come $E(ct, x, y, z)$, e prendiamo unita' di misura in cui la velocita' della luce sia $c = 1$ e le posizioni siano espresse da numeri puri. Dati i due

eventi $E_1(3, 1, 0, 0)$, $E_2(\alpha, 3, 0, 0)$, trovare il valore di α per cui i due eventi possono essere contemporanei in un particolare sistema di riferimento e trovare la velocità di tale sistema di riferimento.

IV

Un particella di massa M e velocità v diretta lungo l'asse delle x urta contro una particella con la stessa massa M e velocità opposta $-v$. Dallo scontro nascono due nuove particelle con la stessa massa m , e con velocità v'_1 e v'_2 rispettivamente, ambedue dirette come l'asse delle x . Scegliamo delle unità di misura in cui la velocità della luce sia $c = 1$ e le masse sono numeri puri.

Assumiamo $M = 3$, $v = \frac{1}{3}$, $m = 1$. Trovare i valori di $|v'_1|$ e $|v'_2|$.



NOTE BIBLIOGRAFICHE

Per la nascita del concetto di modello esatto, si puo' vedere il libro:

L. Russo, La rivoluzione dimenticata, Feltrinelli ed., Milano 1996.

Si tratta di un libro storico, appassionato e di piacevole lettura, che sostiene la tesi di far risalire il concetto di modello esatto e di scienza moderna ai greci del periodo alessandrino. Si inserisce in un dibattito culturale aperto e molto interessante (per la conoscenza, non per l'esame!)

Sulla Meccanica Analitica ed anche sulla Relativita' Ristretta si puo' consultare un libro piano, di piacevole lettura, in molti punti piu' vasto, altre volte piu' sintetico o lacunoso:

H.Goldstein, Meccanica classica, Zanichelli ed..

Piu' rigoroso del precedente, ricco di informazioni, ma difficile:

V.Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti.

Chi voglia approfondire i vincoli, oltre al libro di Arnold, puo' vedere il libro:

G.Gallavotti, The Elements of Mechanics, Springer-Verlag 1983.

Come libri classici sulla Meccanica Analitica, ci sono anche:

L.Landau-E.Lifchitz, Meccanica , Vol. 1, Zanichelli ed..

F.R.Gantmacher, Lezioni di meccanica analitica , Editori Riuniti.

Levi-Civita-Amaldi, Meccanica Razionale, Zanichelli ed..

Con varii esercizi:

E.Olivieri, Appunti di Meccanica Razionale, Unitor ed..

Abbastanza recente ed in italiano:

A.Fasano, S.Marmi, Meccanica Analitica, Bollati Boringhieri ed., 1994.

R.Esposito, Appunti dalle lezioni di Meccanica Razionale, Aracne ed., 1998.

Per i presenti appunti mi sono ispirato per la parte di Meccanica Analitica a:

C.Cattaneo, Appunti di Meccanica Analitica, La Goliardica ed., 1967.

Argomenti di Relativita' Ristretta si trovano nei primi Capitoli di tutti i testi sulla Relativita' Generale e sulla cosmologia. Uno classico, che contiene i risultati teorici, ma non gli accenni fenomenologici, e':

L.Landau-E.Lifchitz, Teoria dei Campi Classici, Vol. 2 , Zanichelli ed..

Per i presenti appunti mi sono ispirato per la parte di Meccanica Relativistica a:

C.Cattaneo, Appunti di Meccanica Relativistica, La Goliardica ed..

RINGRAZIAMENTI

Questi appunti sono stati ispirati da scritti didattici del Prof. Carlo Cattaneo, a cui va il mio ricordo con stima ed affetto.

INDICE

INTRODUZIONE

1. Scopo del libro. pag. 2
2. Cos'è un modello rigoroso della realtà. pag. 3

PARTE 1: MECCANICA ANALITICA

Cap. 1. Il modello della meccanica classica.

1. Le equazioni di Newton. pag. 6
2. Digressione sulle equazioni differenziali. pag. 7

Cap. 2. Vincoli, spostamenti virtuali, coordinate lagrangiane.

1. Vincoli. pag. 9
2. Spostamenti virtuali. pag. 11
3. Variabili lagrangiane. pag. 13
4. Reazioni vincolari e vincoli perfetti. pag. 14

Cap. 3. L'equazione di Lagrange.

1. L'equazione simbolica della dinamica. pag. 18
2. L'equazione di Lagrange. pag. 19
3. Esempi. pag. 23
4. Grandezze conservate. pag. 25

Cap. 4. L'equazione di Hamilton.

1. Variabili canoniche e spazio delle fasi. pag. 29
2. Equazioni canoniche dette anche di Hamilton. pag. 31
3. Integrali primi tipici. pag. 34
4. Esempi. pag. 35

Cap. 5. Le parentesi di Poisson.

1. Definizione e proprieta'. pag. 44
2. Grandezze compatibili. pag. 46

Cap. 6. I principii variazionali.

1. Premessa. pag. 47
2. Funzionale e sua variazione prima. pag. 48
3. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. pag. 50
4. Stazionarieta' ed equazioni di Eulero. pag. 52
5. Principio variazionale di Hamilton. pag. 54
6. Soluzione della premessa. pag. 55
7. Principio di Hamilton ampliato equivalente alle equazioni canoniche. pag. 56
8. Principio di Maupertuis ed ottica geometrica. pag. 58
- Digressioni. pag.61
9. Funzione Principale di Hamilton. pag.62

Cap. 7. Le trasformazioni canoniche.

1. Definizione e condizione di Lie. pag. 65
2. Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche. pag. 69
3. Esempi di trasformazioni canoniche. pag. 72
4. Invarianza delle parentesi di Poisson di fronte ad ogni trasformazione canonica. pag. 75
5. Jacobiano di una trasformazione canonica. pag. 78
6. Qualche esercizio sulle trasformazioni canoniche. pag. 79

Cap. 8. Il metodo di Hamilton-Jacobi.

1. L'equazione di Hamilton-Jacobi. pag. 80

2. Esempi.	pag. 83
Cap. 9. Teorema di Liouville e Ricorrenza di Poincare'.	
1. Teorema di Liouville.	pag. 85
2. Ricorrenza di Poincare'.	pag. 88
3. Digressione linguistica.	pag. 90
Cap. 10. Piccole oscillazioni.	
1. Richiami sulla stabilita' dei punti di equilibrio.	pag. 92
2. Linearizzazione del moto.	pag. 94
3. Frequenze delle piccole oscillazioni.	pag. 95
Cap. 11. Il problema dei due corpi.	
1. Riduzione ad un problema piano.	pag. 98
2. Potenziali centrali.	pag. 99
3. Il moto newtoniano.	pag. 100
4. Brevissimi cenni ai problemi inversi.	pag. 103
Cap. 12. Moti relativi e forze apparenti.	
1. Cinematica relativa.	pag. 104
2. Forze apparenti.	pag. 105
Cap. 13. Richiami.	
1. Risultante e momento risultante.	pag. 107
2. Terza legge di Newton.	pag. 108
3. Equazioni Cardinali.	pag. 108
4. Teorema di Koenig.	pag. 110
5. Momento d'inerzia.	pag. 111

- 6. Corpo rigido e Teorema del Mozzi piano. pag. 112
- 7. Forze conservative. pag. 114
- 8. Stabilita' e Teorema di Dirichelet. pag. 117

Cap. 14. Esercizi.

- 1. Esercizio 1. pag. 120
- 2. Esercizio 2. pag. 123
- 3. Esercizio 3. pag. 128
- 4. Esercizio 4. pag. 132

PARTE 2: RELATIVITA' RISTRETTA

Cap. 1. Stato prima della relativita' ristretta.

- 1. Introduzione. pag. 135
- 2. L'aberrazione stellare. pag. 136
- 3. L'effetto Doppler. pag. 138
- 4. L'effetto Fresnel-Fizeau. pag. 139
- 5. L'esperimento di Michelson-Morley. pag. 141

Cap.2 . Le trasformazioni di Lorentz e cinematica relativistica.

- 1. Le trasformazioni di Lorentz. pag. 145
- 2. Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz. pag. 149
- 3. Spazio di Minkowski. pag. 151
- 4. Tempo proprio, quadrirelocita' e quadriaccelerazione. pag. 157
- 5. Cenni alle trasformazioni di Lorentz generali. pag. 160
- 6. Conferme sperimentali della cinematica relativistica. pag. 161

Cap. 3 .Dinamica relativistica ed equazioni di Lagrange.

- | | |
|--|----------|
| 1. Grandezze dinamiche. | pag. 164 |
| 2. Leggi del moto di un punto materiale. | pag. 166 |
| 3. Formulazione relativa delle leggi del moto. | pag. 167 |
| 4. Equazioni di Lagrange e di Hamilton relativistiche. | pag. 169 |
| 5. Leggi di conservazione, equivalenza massa /energia. | pag. 171 |
| 6. Cenni alle verifiche sperimentali. | pag. 173 |

Cap.4. Esempi importanti.

- | | |
|---|----------|
| 1. Moto in un campo elettrico costante. | pag. 173 |
| 2. Moto in un campo magnetico costante. | pag. 175 |
| 3. Moto della Terra attorno al Sole. | pag. 176 |
| 4. Effetto Compton. | pag. 177 |
| 5. Domande e risposte. | pag. 179 |

ESERCIZI DI RICAPILOZIONE

- | | |
|--|----------|
| Alcuni esercizi di esonero e di esame. | pag. 182 |
|--|----------|

NOTE BIBLIOGRAFICHE