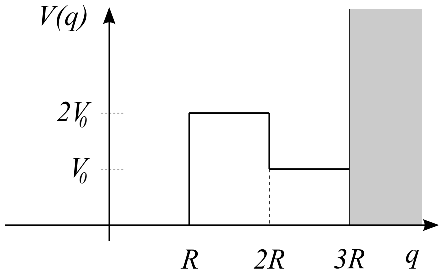
Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti e A. Vulpiani
Compito del 22.02.2016



Es. 1

Es. 1

Si consideri un gas classico bidimensionale costituito da N particelle identiche di massa m non interagenti con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2m}\,|\mathbf{p}|^2 + V\big(|\mathbf{q}|\big), \qquad \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$$

e potenziale

$$V(q) = \begin{cases} 0 & q \le R, \\ 2V_0 & R < q \le 2R, \\ V_0 & 2R < q \le 3R, \\ +\infty & q > 3R, \end{cases}$$

dove $V_0 > 0$ è una costante e $q = |\mathbf{q}|$.

Supponendo che il gas sia in equilibrio termodinamico a temperatura T, si calcoli

1. L'energia media per particella $U(T)/N$;
2. La pressione P sul bordo del disco $|\mathbf{q}| = 3R$;
3. La temperatura T_0 alla quale il numero medio di particelle contenute nella regione di spazio $2R < |\mathbf{q}| < 3R$ è la metà del numero medio di particelle contenute nella regione di spazio $|\mathbf{q}| < R$.

Es. 2

Si consideri un gas quantistico bidimensionale costituito da N particelle identiche non interagenti di massa m e spin σ, vincolate a muoversi in una regione di spazio di area A con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma) = c\,(1 + a\sigma)\,|\mathbf{p}|, \qquad \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$$

dove $c > 0$ e $|a| < 1$ sono costanti.

Assumendo che il gas sia in equilibrio a temperatura T, si chiede:

1. Nel caso le particelle siano bosoni con $\sigma = -1, 0, +1$:
   (a) Mostrare che esiste la condensazione di Bose-Einstein e calcolare la temperatura critica T_c;
   (b) Calcolare la frazione di particelle nel condensato per $T = T_c/2$.
2. Nel caso le particelle siano fermioni con spin $\sigma = -1, 1$:
   (a) Calcolare il valore medio $\langle\sigma\rangle$ a $T = 0$;
   (b) L'energia totale $U(T = 0)$ del gas in funzione di N.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.1

$$\boxed{U(T)/N = T + V_0\,\frac{6\,e^{-2\beta V_0} + 5\,e^{-\beta V_0}}{1 + 3e^{-2\beta V_0} + 5e^{-\beta V_0}}.}$$

1.2

$$\boxed{P = \frac{NT}{\pi R^2}\,\frac{e^{-\beta V_0}}{1 + 3e^{-2\beta V_0} + 5e^{-\beta V_0}}.}$$

1.3

$$\boxed{T_0 = \frac{V_0}{\ln 10}.}$$

2.1.a

$$\boxed{T_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{h^2c^2(1-a^2)^2}{2\pi\zeta(2)(3+a^4)}\,\frac{N}{A}}.}$$

2.1.b

$$\boxed{\frac{N_0}{N} = \frac{3}{4}.}$$

2.2.a

$$\boxed{\langle\sigma\rangle = -\frac{2a}{1+a^2}.}$$

2.2.b

$$\boxed{U(T=0) = \frac{hc\,(1-a^2)}{\sqrt{2\pi A\,(1+a^2)}}\,N^{3/2}.}$$