Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti e A. Vulpiani
Compito del 14.11.2016

Si considerino N particelle identiche di massa m contenute in un cilindro di altezza L, raggio $3R$ ed asse coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z). Le particelle sono non interagenti con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(x, y),$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e

$$V(x, y) = \begin{cases} V_0 \frac{x^2+y^2}{R^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < R; \\ V_0, & R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 2R; \\ 2V_0, & 2R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 3R; \end{cases}$$

con V_0 costante positiva arbitraria.

1. Assumendo che il sistema, in equilibrio a temperatura T, sia descrivibile dalla statistica classica di Boltzmann:
   - 1.a) Calcolare l'energia media per particella $E(T)/N$;
   - 1.b) Calcolare la pressione a distanza R dall'asse del cilindro;
   - 1.c) Calcolare la pressione a distanza $3R/2$ dall'asse del cilindro e sulla parete laterale del cilindro;
   - 1.d) Mostrare che esiste una temperatura T^* tale che per $T > T^*$ la probabilità di avere almeno $N/3$ particelle nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ tende a zero per $N \to \infty$. Scrivere, senza risolvere, l'equazione che determina T^*.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Discutere l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 3/2:
   - 3.a) Determinare il numero massimo di particelle tale che a $T = 0$ tutte le particelle si trovino nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < 2R$.
   - 3.b) In riferimento al punto precedente, calcolare il rapporto tra il numero di particelle che a $T = 0$ si trovano nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ e quelle che si trovano nella regione $R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 2R$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 2, 1.d: 6
  2.a: 6
  3.a: 5, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a

$$\boxed{E/N = \frac{5}{2}T - V_0 \frac{(4-3\beta V_0)\, e^{-\beta V_0} + 5(1-2\beta V_0)\, e^{-2\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0 \big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}}$$

1.b

$$\boxed{P(R) = \rho V_0 \frac{e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0 \big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

1.c

$$\boxed{P(3R/2) = \rho V_0 \frac{e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0 \big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

$$\boxed{P(3R) = \rho V_0 \frac{e^{-2\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0 \big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

1.d

$$\boxed{\frac{1 - e^{-\beta^* V_0}}{1 - e^{-\beta^* V_0} + \beta^* V_0 \big(3e^{-\beta^* V_0} + 5e^{-2\beta^* V_0}\big)} = 1/3.}$$

2.a

Esiste la condensazione di Bose-Einstein.

3.a

$$\boxed{N = \frac{16\pi^2 R^2 L}{15}(8\sqrt{2} + 13)\left(\frac{2mV_0}{h^2}\right)^{3/2}.}$$

3.b

$$\boxed{\frac{N(r < R)}{N(R \le r < 2R)} = \frac{8\sqrt{2} - 2}{15}.}$$