

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Prova in itinere del 23.01.2019

Es. 1

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, vincolate a muoversi su un piano con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $r = |\mathbf{q}|$ e

$$V(r) = \begin{cases} V_0 [(r/R)^2 - 1] & 0 \leq r \leq R, \\ 0 & R < r \leq 2R, \\ +\infty & r > 2R. \end{cases}$$

con V_0 costante e positiva.

Assumendo che le particelle siano Bosoni di spin 0, e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T , si chiede:

- 1.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
- 1.b) Calcolare il numero $N_0(T)$ di particelle nello stato condensato nel limite $T \ll 1$.
- 1.c) Calcolare il calore specifico a volume costante $C_V(T)$ nel limite $T \ll 1$.

Es. 2

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, vincolate a muoversi su un piano con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $r = |\mathbf{q}|$ e

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 (r/R)^2 & 0 \leq r \leq R, \\ +\infty & r > R. \end{cases}$$

con V_0 costante e positiva.

Assumendo che le particelle siano Fermioni di spin 1/2, e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T , si chiede:

- 2.a) Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione della densità ρ delle particelle.
- 2.b) Calcolare l'energia media E a temperatura nulla in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F .
- 2.c) Calcolare l'energia media $E(T=0)$ in funzione di N per $\epsilon_F = 0$.
- 2.d) [Facoltativo] Calcolare il calore specifico a volume costante $C_V(T)$ nel limite $T \ll 1$ per densità $\rho > \frac{2\pi m}{h^2} V_0$ sapendo che $\mu(T) = \epsilon_F + O(e^{-\beta V_0})$ per $T \ll 1$.

• Risposte

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a)

$$\lim_{\mu \rightarrow -V_0} \int_0^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Esiste condensazione BE.}$$

1.b)

$$N_0(T)/N \sim 1 - \frac{2\pi^2 R^2 m \zeta(2)}{N V_0 h^2} T^2 + O(e^{-\beta V_0}), \quad T \ll 1,$$

ovvero

$$N_0(T)/N \sim 1 - \frac{\pi^4 R^2 m}{3 N V_0 h^2} T^2 + O(e^{-\beta V_0}), \quad T \ll 1.$$

1.c)

$$C_V(T) = \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{V,N} E(T) \sim \frac{12\pi^2 R^2 m \zeta(3)}{V_0 h^2} T^2 + O(e^{-\beta V_0}), \quad T \ll 1.$$

2.a)

$$\epsilon_F = \begin{cases} -V_0 + \sqrt{\frac{V_0 h^2}{2\pi m} \rho} & \rho \leq \frac{2\pi m}{h^2} V_0, \\ -\frac{V_0}{2} + \frac{h^2}{4\pi m} \rho & \rho \geq \frac{2\pi m}{h^2} V_0. \end{cases}$$

2.b)

$$E(T=0) = \frac{2\pi^2 m R^2}{3 V_0 h^2} [2\epsilon_F^3 + 3V_0 \epsilon_F^2 - V_0^3 - 2\epsilon_F^3 \theta(\epsilon_F)].$$

2.c)

$$E(T=0, \epsilon_F=0) = -\frac{N}{3} V_0.$$

2.d)

$$C_V(T) = \frac{4\pi^3 m \rho N}{3 h^2} T + O(e^{-\beta V_0}), \quad \rho = \pi R^2 / N > \frac{2\pi m}{h^2} V_0, \quad T \ll 1.$$