

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 30.01.2019

Si consideri un sistema unidimensionale costituito da N particelle identiche non interagenti, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = A|p| + B(a - q), \quad -\infty < p < +\infty, \quad 0 \leq q \leq a,$$

con A e B costanti positive. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T .

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T :
 - 1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante $C_V(T)$ in funzione della temperatura T .
 - 1.b) Calcolare il potenziale chimico $\mu(T)$ in funzione della temperatura T .
 - 1.c) Determinare il valore r^* tale che la probabilità $\mathcal{P}(q < r)$ che q sia minore di r sia uguale alla probabilità $\mathcal{P}(q > r)$ che q sia maggiore di r .
 - 1.d) Calcolare la probabilità $P_N(n; \epsilon < Ba/2)$ che $n \leq N$ particelle abbiano energia ϵ minore di $Ba/2$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
 - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
 - 2.b) Scrivere esplicitamente, senza risolvere, l'equazione che determina la temperatura di condensazione T_0 . Risolvere l'equazione nel limite $Ba/T_0 \gg 1$. Discutere la condizione che deve soddisfare N affinché questo limite sia consistente.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
 - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione del numero di particelle.
 - 3.b) Scrivere esplicitamente, senza risolvere, l'equazione che determina il potenziale chimico μ . Risolvere l'equazione nel limite $T \gg 1$.

• Valutazione risposte:

- 1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
- 2.a: 4, 2.b: 3
- 3.a: 4, 3.b: 3

• Risposte

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a)

$$C_V(T)/N = 2 - \left[\frac{\beta Ba}{e^{\beta Ba} - 1} \right]^2 e^{\beta Ba} = 2 - \left[\frac{\beta Ba}{e^{\beta Ba/2} - e^{-\beta Ba/2}} \right]^2.$$

1.b)

$$\mu = -T \ln \left[\frac{2}{hAB\beta^2} [1 - e^{-\beta Ba}] \right].$$

1.c)

$$r^* = \frac{1}{\beta B} \ln \left[\frac{1}{2} (e^{\beta Ba} + 1) \right].$$

1.d)

$$P_N(n; \epsilon < 0) = \frac{N!}{n! (N-n)!} \left[\frac{1 + \beta Ba/2 - e^{-\beta Ba/2}}{e^{\beta Ba/2} - e^{-\beta Ba/2}} \right]^N \left[\frac{e^{\beta Ba/2} - 1 - \beta Ba/2}{1 + \beta Ba/2 - e^{-\beta Ba/2}} \right]^n.$$

2.a)

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} - \int_{Ba}^\infty d\epsilon \frac{\epsilon - Ba}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \right] < \infty \Rightarrow \text{Esiste condensazione BE.}$$

2.b)

$$N = \frac{2T_0^2}{hAB} \left[\frac{\pi^2}{6} - \int_0^\infty dy \frac{y}{e^{y+\beta_0 Ba} - 1} \right].$$

$$T_0 \sim \sqrt{\frac{3hABN}{\pi^2}} + O(e^{-Ba/T_0}), \quad T_0 \ll Ba.$$

$$N \ll \frac{\pi^2 Ba^2}{3hA}.$$

3.a)

$$\epsilon_F = \begin{cases} \sqrt{hABN/2}, & N < \frac{2Ba^2}{hA}, \\ \frac{Ba}{2} + \frac{hA}{4a}N, & N > \frac{2Ba^2}{hA}. \end{cases}$$

3.b)

$$\int_0^\infty dy \frac{y}{z^{-1}e^y + 1} - \int_0^\infty dy \frac{y}{z^{-1}e^{y+\beta Ba} + 1} = \frac{hAB\beta^2}{4}N$$

$$\mu \sim -T \ln \left[\frac{4}{hAB\beta^2 N} [1 - e^{-\beta Ba}] \right] + \frac{hAB\beta N}{4} \frac{1 + e^{-\beta Ba}}{1 - e^{-\beta Ba}} \quad T \gg 1.$$