

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 07.05.2019

Si consideri un gas perfetto unidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, che si muovono nella regione lineare $-L \leq q \leq L$ con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + bq, \quad |p| < +\infty, |q| \leq L,$$

dove b è una costante positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T .

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T :
 - 1.a) Calcolare il calore specifico a volume costante C_V in funzione della temperatura T .
 - 1.b) Indicato con $\langle f^2 \rangle_c = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$, verificare la relazione: $C_V/N = (\beta/2m)^2 \langle p^4 \rangle_c + (\beta b)^2 \langle q^2 \rangle_c$.
 - 1.c) Calcolare il potenziale chimico $\mu(T)$ nel limite $T \rightarrow 0$.
 - 1.d) Calcolare il numero $N(\epsilon < bL)$ ed $N(\epsilon > bL)$ di particelle con energia di singola particella rispettivamente minore e maggiore di bL .
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
 - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e scrivere l'equazione che determina la temperatura di transizione T_0 .
 - 2.b) Calcolare il calore specifico a volume costante C_V in funzione della temperatura nel limite $T \ll 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
 - 3.a) Determinare la densità di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F .
 - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle q \rangle$ a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_F = bL$.

• Valutazione risposte:

- 1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
- 2.a: 4, 2.b: 3
- 3.a: 4, 3.b: 3

Nota: Ai punti 1.d, 2.a e 2.b lasciare indicati gli integrali eventualmente non esprimibili con funzioni elementari.

• **Risposte**

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$E(T) = -N \frac{\partial}{\partial \beta} T \ln Z_1$$

da cui usando:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2\pi m}}{hb} \beta^{-3/2} [e^{\beta bL} - e^{-\beta bL}]$$

si ha

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \Big|_{L,N} E(T) = N \left[\frac{3}{2} - \frac{(\beta bL)^2}{\sinh^2(\beta bL)} \right].$$

1.b) Da

$$\mathcal{P}(p) \propto e^{-\beta p^2/2m} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(q) \propto e^{-\beta bq}$$

segue:

$$\langle p^4 \rangle_c = 2 \left(\frac{m}{\beta} \right)^2$$

$$\langle q^2 \rangle_c = \frac{1}{(\beta b)^2} - \frac{L^2}{\sinh^2(\beta bL)}$$

che sostituite nella relazione richiesta fornisce espressione 1.a).

1.c) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$\mu(T) = -T \ln \frac{Z_1}{N} = -T \ln \left[\frac{2\sqrt{2\pi m} \sinh(\beta bL)}{Nhb\beta^{3/2}} \right]$$

da cui

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) = -bL.$$

1.d) Usando:

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{G(\epsilon) e^{-\beta \epsilon}}{\int d\epsilon G(\epsilon) e^{-\beta \epsilon}} = \frac{\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi} \sinh(\beta bL)} \left[\sqrt{\epsilon + bL} \theta(\epsilon + bL) - \sqrt{\epsilon - bL} \theta(\epsilon - bL) \right] e^{-\beta \epsilon}$$

si ha:

$$N(\epsilon < bL) = N \int_{-\infty}^{bL} d\epsilon \mathcal{P}(\epsilon) = \frac{N e^{\beta bL}}{\sqrt{\pi} \sinh(\beta bL)} \int_0^{2\beta bL} dy y^{1/2} e^{-y}$$

$$N(\epsilon > bL) = N - N(\epsilon < bL) = N \left[1 - \frac{e^{\beta bL}}{\sqrt{\pi} \sinh(\beta bL)} \int_0^{2\beta bL} dy y^{1/2} e^{-y} \right]$$

2.a) A $T = T_0$ si ha:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon+bL)} - 1}$$

Usando:

$$G(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2m}}{hb} \left[\sqrt{\epsilon + bL} \theta(\epsilon + bL) - \sqrt{\epsilon - bL} \theta(\epsilon - bL) \right]$$

si ha:

$$N = \frac{\sqrt{2\pi m}}{hb} T_0^{3/2} \left[\zeta(3/2) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{1/2}}{e^{y+2\beta_0 bL} - 1} \right] < \infty \Rightarrow \text{Esiste condensazione BE.}$$

2.b) Per $T < T_0$ si ha:

$$E(T) = -bLN_0(T) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon+bL)} - 1} = -bLN + \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{(\epsilon + bL) G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon+bL)} - 1},$$

da cui

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} E(T) = 2 \frac{\sqrt{2m}}{hb} T^{3/2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{3/2} e^y}{(e^y - 1)^2} + O(e^{-2\beta bL}), \quad T \ll 1.$$

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = 2 \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon)$$

da cui:

$$\rho = \frac{N}{2L} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{hb} \left[(\epsilon + bL)^{3/2} \theta(\epsilon + bL) - (\epsilon - bL)^{3/2} \theta(\epsilon - bL) \right]$$

3.b) A $T = 0$ si ha:

$$\langle q \rangle = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dq q G(\epsilon, q)$$

Usando:

$$G(\epsilon, q) = \frac{\sqrt{2m}}{h} \frac{\theta(\epsilon - bq)}{\sqrt{\epsilon - bq}} \theta(L - |q|)$$

si ha:

$$\langle q \rangle = -\frac{L}{5}$$