

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 28.06.2019

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, contenute in una sfera di raggio R e con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $r = |\mathbf{q}|$ e

$$V(r) = \begin{cases} \alpha r^3 & 0 \leq r \leq R, \\ +\infty & r > R. \end{cases}$$

con α costante e positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T .

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T :
 - 1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante C_V in funzione della temperatura T .
 - 1.b) Calcolare la pressione $P(R)$ sulla superficie della sfera.
 - 1.c) Calcolare il valore medio $\langle r \rangle$ della distanza r delle particelle dal centro della sfera nel limite $T \ll 1$.
 - 1.d) Calcolare la temperatura T^* tale che in media vi siano $3N/4$ particelle con $r < R/2^{1/3}$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
 - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e scrivere l'equazione che determina la temperatura di transizione T_0 .
 - 2.b) Calcolare l'energia media $E(T)$ in funzione della temperatura nel limite $T \ll 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
 - 3.a) Determinare la densità di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F .
 - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle r^3 \rangle$ a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_F = \alpha R^3$.

• Valutazione risposte:

- 1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
- 2.a: 4, 2.b: 3
- 3.a: 4, 3.b: 3

Nota: Al punto 2.a lasciare indicati gli integrali eventualmente non esprimibili con funzioni elementari.

• **Risposte**

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$E(T) = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1$$

da cui usando:

$$Z_1 = \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta\alpha} \left[1 - e^{-\beta\alpha R^3} \right]$$

si ha

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \Big|_{L,N} E = N \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{\beta\alpha R^3}{1 - e^{-\beta\alpha R^3}} \right)^2 e^{-\beta\alpha R^3} \right].$$

1.b) Dalla relazione termodinamica

$$P(R) = - \frac{\partial}{\partial V} \Big|_{T,N} F(T, V, N),$$

con $F(T, V, N) = -TN \ln Z_1/N!$ e $V = (4\pi/3)R^3$, segue

$$P(R) = \frac{3N}{4\pi} \frac{\alpha}{e^{\beta\alpha R^3} - 1}.$$

1.c) Usando

$$\mathcal{P}(r) \propto r^2 e^{-\beta\alpha r^3} \theta(R - r),$$

nel limite $T \ll 1$ si ha

$$\langle r \rangle \sim \frac{1}{3(\beta\alpha)^{1/3}} \Gamma(1/3) + O(e^{-\beta\alpha R^3}), \quad T \ll 1.$$

1.d) La condizione richiesta si scrive:

$$N \int_0^{R/2^{1/3}} dr \mathcal{P}(r) = \frac{3N}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - e^{-\beta^* \alpha R^3/2}}{1 - e^{-\beta^* \alpha R^3}} = \frac{3}{4},$$

da cui

$$T^* = \frac{\alpha R^3}{2 \ln 3}.$$

2.a) A $T = T_0$ si ha:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1}$$

Usando:

$$G(\epsilon) = \frac{16\pi^2}{9\alpha h^3} (2m)^{3/2} \left[\epsilon^{3/2} \theta(\epsilon) - (\epsilon - \alpha R^3)^{3/2} \theta(\epsilon - \alpha R^3) \right],$$

si ha:

$$N = \frac{4\pi^{5/2}}{3\alpha h^3} (2m)^{3/2} T_0^{5/2} \left[\zeta(5/2) - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{y^{3/2}}{e^{y+\beta_0 \alpha R^3} - 1} \right] < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Esiste condensazione BE.}$$

2.b) Per $T < T_0$ si ha:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon G(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

da cui

$$E(T) = \frac{10\pi^{5/2}}{3\alpha h^3} (2m)^{3/2} \zeta(7/2) T^{7/2} + O(e^{-\beta\alpha R^3}), \quad T \ll 1.$$

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = 2 \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon)$$

da cui:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{16\pi}{15\alpha R^3 h^3} (2m)^{3/2} \left[\epsilon_F^{5/2} - (\epsilon_F - \alpha R^3)^{5/2} \theta(\epsilon_F - \alpha R^3) \right].$$

3.b) A $T = 0$ si ha:

$$\langle r^3 \rangle = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^{+\infty} dr G(\epsilon, r) r^3.$$

Usando:

$$G(\epsilon, r) = \frac{8\pi^2}{h^3} (2m)^{3/2} r^2 \sqrt{\epsilon - \alpha r^3} \theta(\epsilon - \alpha r^3) \theta(R - r).$$

si ha:

$$\langle r^3 \rangle = \frac{2}{7} R^3.$$