Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 29.01.2020

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle identiche di massa m, non interagenti, vincolate a muoversi in una regione di un piano di area A e con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \sigma) = \frac{p^2}{2m} - b\sigma,$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$ e b è una costante positiva. Il sistema è in equilibrio termico con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo $\sigma = 0, \pm 1$ e che sia applicabile la statistica classica:
   - 1.a) Calcolare l'energia media per particella della temperatura T.
   - 1.b) Indicato rispettivamente con $N(\sigma)$ il numero di particelle con cil valore di σ fissato, determinare la temperatura T^* tale che $N(\sigma = 1) = 2N(\sigma = 0) + N(\sigma = -1)$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1, $\sigma = 0, \pm 1$:
   - 2.a) Discutere l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Derivare l'equazione per il potenziale chimico $\mu(T)$ e discuterne la soluzione nei limiti: i) $T \to 0$; ii) di alta temperatura e bassa densità $\beta N/A \ll 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2, $\sigma = \pm 1/2$:
   - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione della densità ρ delle particelle.
   - 3.b) Determinare il valore medio $\langle \sigma \rangle$ a temperatura nulla in funzione della densità ρ delle particelle.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

Nota: Al punto 2.b) considerare solo il termine principale.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'energia media E del sistema si può ottenere dalla funzione di partizione canonica Z_N come $E = -(\partial/\partial\beta)\ln Z_N$. Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N!$ con Z_1 funzione di partizione di singola particella:

$$Z_1 = \frac{2\pi m A}{h^2\beta}\left[1 + e^{\beta b} + e^{-\beta b}\right].$$

Di conseguenza

$$\boxed{E(T)/N = T - b\frac{e^{\beta b} - e^{-\beta b}}{1 + e^{\beta b} + e^{-\beta b}}.}$$

Limiti

$$\boxed{E(T)/N \sim -b + T + O(e^{-\beta b}), \qquad T \ll 1.}$$

$$\boxed{E(T)/N \sim T - \frac{2}{3}\beta b^2 + O(\beta^2), \qquad T \gg 1.}$$

1.b) Essendo le particelle indipendenti il numero medio $N(\sigma)$ di particelle con un dato valore di σ può essere espresso come:

$$N(\sigma) = N\,\frac{Z_1(\sigma)}{Z_1}.$$

dove

$$Z_1(\sigma) = \frac{2\pi m A}{h^2\beta}\,e^{\beta b\sigma},$$

è la funzione di partizione canonica di singola particella con σ fissato.

La condizione $N(\sigma = 1) = 2N(\sigma = 0) + N(\sigma = -1)$ richiede quindi

$$e^{\beta b} = 2 + e^{-\beta b},$$

da cui si ha:

$$\boxed{T^* = \frac{b}{\ln(1+\sqrt{2})}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\lim_{\mu\to -b^-}\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\,\frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} < \infty,$$

dove

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=0,\pm1}\int \frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\,\delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\sigma)\big) = \frac{2\pi m A}{h^2}\big[\theta(\epsilon+b) + \theta(\epsilon) + \theta(\epsilon-b)\big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -b^-}\int_{-b}^{\infty} d\epsilon\,\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = \infty \quad \Rightarrow \text{ Non esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Il potenziale chimico è ottenuto risolvendo l'equazione

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} = \frac{2\pi m A}{h^2}\left[\int_{-b}^{\infty} d\epsilon\, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1} + \int_{0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1} + \int_{b}^{\infty} d\epsilon\, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}\right].$$

per $z = e^{\beta\mu}$, che valutando gli integrali, fornisce:

$$\boxed{(1-ze^{\beta b})(1-z)(1-ze^{-\beta b}) = e^{-\beta\rho c}, \qquad c = \frac{h^2}{2\pi m},\ \rho = N/A,\ z = e^{\beta\mu} \le e^{-\beta b}.}$$

Per $T \to 0$ possiamo il termine $e^{-\beta\rho c}$ si annulla e la soluzione dell'equazione è $z = e^{-\beta b}$ ovvero:

$$\boxed{\mu(T) = -b, \qquad T \to 0.}$$

Nel limite $T \gg 1$ si ha $z \ll 1$. Risolvendo l'equazione al primo ordine in z e $\beta\rho \ll 1$ si ha:

$$z = \frac{\beta\rho c}{1+e^{\beta b}+e^{-\beta b}} = \frac{\beta N h^2}{2\pi m A}\frac{1}{1+e^{\beta b}+e^{-\beta b}} \qquad \beta N/A \ll 1,$$

da cui si ritrova il risultato della meccanica statistica classica

$$\boxed{\mu(T) = -T\ln\left[\frac{2\pi m A}{N h^2 \beta}\left(1+e^{\beta b}+e^{-\beta b}\right)\right] = -T\ln\frac{Z_1}{N}, \qquad \beta N/A \ll 1,}$$

dove Z_1 è la funzione di partizione classica di singola particella.

3.a) L'energia di Fermi è determinata dall'equazione

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$G(\epsilon) = \frac{2\pi m A}{h^2}\left[\theta(\epsilon+b/2)+\theta(\epsilon-b/2)\right].$$

Di conseguenza,

$$N = \frac{2\pi m A}{h^2}\left[(\epsilon_{\mathrm{F}}+b/2)\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}}+b/2) + (\epsilon_{\mathrm{F}}-b/2)\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}}-b/2)\right].$$

da cui segue

$$\boxed{\epsilon_{\mathrm{F}} = \begin{cases} -\dfrac{b}{2} + \dfrac{h^2}{2\pi m}\rho, & \rho \le \dfrac{2\pi m}{h^2}\, b; \\[2ex] \dfrac{h^2}{4\pi m}\rho, & \rho \ge \dfrac{2\pi m}{h^2}\, b, \end{cases}}$$

con $\rho = N/A$.

3.b) Per definizione

$$\langle\sigma\rangle = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \mathcal{P}(\sigma)\,\sigma = \frac{1}{2N}\left[N(\sigma=1/2) - N(\sigma=-1/2)\right],$$

dove a temperatura nulla

$$N(\sigma) = \int_{\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\,\delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\sigma)\big) = \frac{2\pi m A}{h^2}\,(\epsilon_{\mathrm{F}}+b\sigma)\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}}+b\sigma).$$

Di conseguenza:

$$\boxed{\langle\sigma\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \rho \le \dfrac{2\pi m}{h^2}\, b \quad \Big[-b/2 \le \epsilon_{\mathrm{F}} \le b/2\Big]; \\[2ex] \dfrac{\pi m b}{h^2 \rho}, & \rho \ge \dfrac{2\pi m}{h^2}\, b \quad \Big[\epsilon_{\mathrm{F}} \ge b/2\Big], \end{cases}}$$

con $\rho = N/A$.