Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 12.02.2020

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche non interagenti di massa m contenuto in una regione quadrata di lato $2L$. Fissato un sistema di riferimento (x, y) con gli assi paralleli ai lati della regione, ed origine nel centro di quest'ultima, l'Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + ky, \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2,\ -L \leq x, y \leq L,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $\mathbf{q} = (x, y)$, e k è una costante positiva. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:
   - 1.a) Calcolare l'entropia $S(T, V, N)$.
   - 1.b) Calcolare il valore medio $\langle x \rangle$ ed $\langle y \rangle$ in funzione della temperatura T.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:
   - 2.a) Mostrare l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Mostrare che nel limite di alta temperatura $T \gg 1$ l'energia media per particella coincide con il valore ottenuto utilizzando la statistica classica.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Calcolare il numero massimo N_{max} di particelle tale che a $T = 0$ non vi siano particelle con $y > 0$.
   - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ a $T = 0$ ed $\epsilon_{\mathrm{F}} = kL$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'entropia $S(T,V,N)$ si può ottenere dalla relazione $S = -(\partial F/\partial T)_{V,N}$, dove $F(T,V,N) = -T\ln Z(T,V,N)$ è l'energia libera del sistema e $Z(T,V,N)$ la funzione di partizione canonica.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T,V,N) = Z_1(T,V)^N/N!$, dove:

$$Z_1 = \int \frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\, e^{-\beta H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})} = \frac{4\pi m L}{h^2\beta^2 k}\left(e^{\beta kL} - e^{-\beta kL}\right).$$

Ne segue che:

$$\boxed{S(T,V,N)/N = \ln\left[\frac{4\pi e^3 mL}{h^2\beta^2 kN}\left(e^{\beta kL} - e^{-\beta kL}\right)\right] - \beta kL\frac{e^{\beta kL}+e^{-\beta kL}}{e^{\beta kL}-e^{-\beta kL}}.}$$

1.b) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la densità di probabilità $\mathcal{P}_x(x)$ della coordinata x di una singola particella è data da:

$$\mathcal{P}_x(x') = \frac{\int d^2p\,d^2q\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})}\,\delta(x-x')}{\int d^2p\,d^2q\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})}} = \frac{1}{2L}\,\theta(L-|x|).$$

Di conseguenza

$$\boxed{\langle x\rangle = 0.}$$

Analogamente

$$\mathcal{P}_y(y') = \frac{\int d^2p\,d^2q\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})}\,\delta(y-y')}{\int d^2p\,d^2q\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})}} = \beta k\frac{e^{-\beta k y}}{e^{\beta kL}-e^{-\beta kL}}\,\theta(L-|y|).$$

Di conseguenza,

$$\boxed{\langle y\rangle = \frac{T}{k} - L\,\frac{e^{\beta kL}+e^{-\beta kL}}{e^{\beta kL}-e^{-\beta kL}}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\,\frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\epsilon_{\rm min})}-1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\rm min} = -kL$ e

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=0,\pm1}\int \frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\,\delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\sigma)\big) = \frac{12\pi m L}{h^2 k}\Big[(\epsilon+kL)\,\theta(\epsilon+kL) - (\epsilon-kL)\,\theta(\epsilon-kL)\Big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -kL^-}\int_{-kL}^{\infty} d\epsilon\,\frac{\epsilon+kL}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

poichè l'integrando ha una singolarità integrabile all'estremo inferiore.

2.b) Nel limite di alta temperatura $T \gg 1$, e bassa densità $N/4L^2 \ll 1$, si ha $z \ll 1$. Espandendo le espressioni di $E(T,V,z)$ ed $N(T,V,z)$ al primo ordine in z si ha:

$$E \sim z\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}\,\epsilon, \qquad N \sim z\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}.$$

Di conseguenza

$$E/N \sim \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}\, \epsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \left[\frac{12\pi mL}{h^2 k\beta^2} \left(e^{\beta kL} - e^{-\beta kL}\right)\right].$$

Ne segue che

$$\boxed{E/N \sim 2T - kL\, \frac{e^{\beta kL} + e^{-\beta kL}}{e^{\beta kL} - e^{-\beta kL}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1,}$$

con Z_1 calcolata al punto 1.a).

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove,

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \sigma)\big) = \frac{8\pi mL}{h^2 k} \Big[(\epsilon + kL)\, \theta(\epsilon + kL) - (\epsilon - kL)\, \theta(\epsilon - kL)\Big].$$

Affinchè tutte le particelle abbiano $y < 0$ è necessario che $\epsilon_{\rm F} < 0$. Di conseguenza

$$\boxed{N_{\rm max} = \int_{-\infty}^{0} d\epsilon\, G(\epsilon) = \frac{4\pi mkL^3}{h^2}.}$$

3.b Il valore medio $\langle x \rangle$ a $T = 0$ è dato da

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon \int_{-L}^{L} dx\, G(\epsilon, x)\, x,$$

dove

$$G(\epsilon, x') = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)\big)\, \delta(x - x') = \frac{1}{2L}\, G(\epsilon)\, \theta(L - |x'|),$$

con $G(\epsilon)$ calcolata al punto 3.a). Di conseguenza

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{1}{2NL} \int_{-\infty}^{kL} d\epsilon\, G(\epsilon) \int_{-L}^{L} dx\, x = 0.}$$

Il valore medio $\langle y \rangle$ a $T = 0$ è dato da

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon \int_{-L}^{L} dy\, G(\epsilon, y)\, y,$$

dove

$$G(\epsilon, y') = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)\big)\, \delta(y - y') = A\, \theta(\epsilon - ky')\, \theta(L - |y'|),$$

con $A = 8\pi mL/h^2$. Quindi

$$\int_{-\infty}^{kL} d\epsilon \int_{-L}^{L} dy\, G(\epsilon, y)\, y = -\frac{2}{3} AkL^3$$

e inoltre

$$N = \int_{-\infty}^{kL} d\epsilon\, G(\epsilon) = 2AkL^2,$$

per cui

$$\boxed{\langle y \rangle = -\frac{1}{3} L.}$$