

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 14.05.2020

Si consideri un gas perfetto tridimensionale costituito da N particelle identiche non interagenti. Fissato un sistema di riferimento (x, y, z) con origine nel punto O , la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ap^{3/2} + bq^2, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$, mentre a e b costanti positive di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con un bagno termico a temperatura T .

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:

- 1.a) Calcolare l'entropia microcanonica $S(E, V, N)$.
- 1.b) Calcolare la probabilità $\mathcal{P}(p < p^*)$ con $p^* = (4T/3a)^{2/3}$.

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:

- 2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
- 2.b) Determinare la frazione di particelle nello stato condensato alla temperatura $T = T_0/2$, dove T_0 è la temperatura di condensazione.

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:

- 3.a) Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F .
- 3.b) Calcolare il valore medio $\langle p^{3/2} \rangle$ a temperatura nulla.

• Valutazione risposte:

- 1.a: 5, 1.b: 5
- 2.a: 5, 2.b: 5
- 3.a: 5, 3.b: 5

• **Risposte**

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

- 1.a) L'entropia $S(E, V, N)$ si può ottenere dalla relazione $S = \beta(E - F)$, dove $F(T, V, N) = -T \ln Z(T, V, N)$ è l'energia libera del sistema e $Z(T, V, N)$ la funzione di partizione canonica, eliminando T in funzione di E dalla relazione $E = -(\partial/\partial\beta)_{V,N} \ln Z(T, V, N)$.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T, V, N) = Z_1(T, V)^N / N!$, dove:

$$Z_1 = \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{8\pi^{5/2}}{3h^3 a^2 b^{3/2}} \beta^{-7/2}.$$

Ne segue che:

$$S(E, V, N)/N = \ln \left[\frac{8\pi^{5/2} e^{9/2}}{3h^3 a^2 b^{3/2} N} \left(\frac{2E}{7N} \right)^{7/2} \right]$$

- 1.b) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la densità di probabilità $\mathcal{P}_p(p)$ di $q = |\mathbf{q}|$ di una singola particella è data da:

$$\mathcal{P}_p(p') = \frac{\int d^3p d^3q e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \delta(p - p')}{\int d^3p d^3q e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}} = \frac{p^2 e^{-\beta a p^{3/2}}}{\int_0^\infty dp p^2 e^{-\beta a p^{3/2}}} = \frac{3a^2 \beta^2 p^2}{2} e^{-\beta a p^{3/2}}.$$

Quindi

$$\mathcal{P}(p \leq p^*) = \int_0^{p^*} dp \mathcal{P}_p(p) = 1 - (1 + \beta a p^{*3/2}) e^{-\beta a p^{*3/2}}.$$

Di conseguenza, per $p^* = (4T/3a)^{2/3}$ si ha

$$\mathcal{P}(p \leq p^*) = 1 - \frac{7}{3} e^{-4/3} \simeq 0.38494 \dots$$

- 2.a) La condizione affinché esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_{\min})} - 1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\min} = 0$ e

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=0, \pm 1} \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)) = \frac{64\pi^2}{15h^3 a^2 b^{3/2}} \epsilon^{5/2} \theta(\epsilon).$$

Di conseguenza

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^-} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{5/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Esiste condensazione BE.}$$

poichè l'integrando ha una singolarità integrabile all'estremo inferiore.

- 2.b) Per temperature $T \leq T_0$ il potenziale chimico vale $\mu = \epsilon_{\min} = 0$ ed il numero di particelle nello stato non condensato è

$$\tilde{N}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_{\min})} - 1} = \frac{64\pi^2}{15h^3 a^2 b^{3/2}} T^{-7/2} \int_0^\infty dt \frac{t^{5/2}}{e^t - 1}.$$

Di conseguenza

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \frac{N(\tilde{T})}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{7/2},$$

Per $T = T_0/2$ si ha:

$$\boxed{\frac{N_0}{N} = 1 - 2^{-7/2} = 1 - \frac{1}{8\sqrt{2}} \simeq 0.9116 \dots}$$

3.a) A $T = 0$ si ha

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)) \\ &= \frac{128\pi^2}{45h^3 a^2 b^{3/2}} \epsilon^{5/2} \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\boxed{\epsilon_F = \left[\frac{315h^3 a^2 b^{3/2}}{256\pi^2} N \right]^{2/7} .}$$

3.b) Il valore medio $\langle p^{3/2} \rangle$ a $T = 0$ è dato da

$$\langle p^{3/2} \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\infty dp G(\epsilon, p) p^{3/2},$$

dove

$$\begin{aligned} G(\epsilon, p') &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)) \delta(p - p') \\ &= \frac{16\pi^2}{h^3 b^{3/2}} p'^2 \sqrt{\epsilon - ap'^{3/2}} \theta(\epsilon - ap'^{3/2}). \end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\langle p^{3/2} \rangle = \frac{4 \times 256\pi^2}{9 \times 315 N h^3 a^3 b^{3/2}} \epsilon_F^{9/2}.$$

da cui usando il risultato del punto precedente si ha

$$\boxed{\langle p^{3/2} \rangle = \frac{4}{9a} \epsilon_F.}$$