Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 26.06.2020

Si consideri un gas perfetto bidimensionale costituito da N particelle identiche non interagenti di massa m. Fissato un sistema di riferimento (x, y) con origine nel punto O, la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \qquad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2,$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$,

$$V(q) = \begin{cases} V_0\left[(q/r)^2 - 1\right] & 0 \leq q < r; \\ 0 & r \leq q < \sqrt{2}r; \\ +\infty & q \geq \sqrt{2}r; \end{cases}$$

con V_0 e r costanti positive di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:
   - 1.a) Calcolare in funzione della temperatura e dei parametri del sistema l'energia media per particella.
   - 1.b) Calcolare in funzione della temperatura e dei parametri del sistema il rapporto $N(q < r)/N(q > r)$ tra il numero di particelle contenute nella regione $q < r$ e quelle contenute nella regione $q > r$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:
   - 2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Determinare il potenziale chimico μ del sistema nel limite di alta temperatura e bassa densità.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione del numero di particelle N.
   - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle q^2 \rangle$ a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_F = 0$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'energia media del sistema si può ottenere dalla funzione di partizione canonica $Z(T,V,N)$ utilizzando la relazione $E = -(\partial/\partial\beta)_{V,N} \ln Z(T,V,N)$.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T,V,N) = Z_1(T,V)^N/N!$, dove:

$$Z_1(T,V) = \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, e^{-\beta H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})} = \frac{2\pi^2 m r^2}{h^2\beta^2 V_0}\left[e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0\right].$$

Ne segue:

$$\boxed{E/N = 2T - V_0\frac{e^{\beta V_0}+1}{e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0}.}$$

1.b) Decomponendo il sistema in due sottosistemi in equilibrio, uno contenuto nella regione $q < r$ ed uno nella regione $q > r$, ciascun sottosistema conterrà in media un numero di particelle dato da:

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}Z(T,V,z),$$

dove $Z(T,V,z)$ è la funzione di granpartizione del sottosistema. Per un sistema di particelle classiche non interagenti si ha $Z(T,V,z) = e^{zZ_1}$, per cui

$$\frac{N(q<r)}{N(q>r)} = \frac{Z_1(T,q<r)}{Z_1(T,q>r)}.$$

Utilizzando i risultati del punto 1.a) si ha

$$\boxed{\frac{N(q<r)}{N(q>r)} = \frac{e^{\beta V_0}-1}{\beta V_0}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\epsilon_{\min})}-1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\min} = -V_0$ e

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=0,\pm1}\int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\,\delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\sigma)\big) = \frac{6\pi^2 m r^2}{h^2 V_0}\Big[(\epsilon+V_0)\,\theta(\epsilon+V_0) - (\epsilon - V_0)\,\theta(\epsilon)\Big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -V_0^-}\int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon+V_0}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

poichè l'integrando ha una singolarità integrabile all'estremo inferiore. Il secondo integrale è regolare.

2.b) Per temperature T maggiori della temperatura di condensazione il potenziale chimico si ottiene ricavando la fugacità $z = e^{\beta\mu}$ dalla relazione:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}$$

Nel limite di alta temperatura e bassa densità si ha $z \ll 1$, per cui

$$N \simeq z\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} + O(z^2), \qquad z \ll 1.$$

Usando l'espressione di $G(\epsilon) =$ ricavata al punto precedente si ha

$$\boxed{\mu = -\beta^{-1}\ln\left[\frac{6\pi^2 m r^2}{h^2 V_0 \beta^2 N}\left[e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0\right]\right].}$$

3.a) A $T = 0$ si ha

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_\mathrm{F}} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^3p\, d^3q}{h^3}\, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \sigma)\big) \\ &= \frac{4\pi^2 m r^2}{h^2 V_0} \Big[(\epsilon + V_0)\, \theta(\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0)\, \theta(\epsilon)\Big]. \end{aligned}$$

Di conseguenza se $-V_0 \leq \epsilon_\mathrm{F} < 0$, si ha:

$$\boxed{\epsilon_\mathrm{F} = -V_0 \left[1 - \sqrt{N/N_0}\right], \qquad N \leq N_0.}$$

mentre $\epsilon_\mathrm{F} > 0$ si ha:

$$\boxed{\epsilon_\mathrm{F} = \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} \big(N - N_0\big), \quad N \geq N_0.}$$

dove

$$N_0 = N\Big|_{\epsilon_\mathrm{F}=0} = \frac{2\pi^2 m r^2 V_0}{h^2},$$

3.b Il valore medio $\langle q^2 \rangle$ a $T = 0$ è dato da

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_\mathrm{F}} d\epsilon \int_0^\infty dq\, G(\epsilon, q)\, q^2,$$

dove

$$\begin{aligned} G(\epsilon, q') &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma)\big)\, \delta(q - q') \\ &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\, q'\, \theta(\epsilon - V(q')) = \frac{4N_0}{V_0 r^2}\, q'\, \theta(\epsilon - V(q')). \end{aligned}$$

Di conseguenza, per $\epsilon_\mathrm{F} = 0$, si ha

$$\langle q^2 \rangle = \frac{4}{V_0 r^2} \int_{-V_0}^{0} d\epsilon \int_0^r dq\, q^3 \theta(\epsilon - V(q))$$

da cui segue facilmente

$$\boxed{\langle q^2 \rangle = \frac{r^2}{3}.}$$