# Corso di Meccanica Statistica
## Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
## Compito del 13.07.2020

Si consideri un gas perfetto costituito da $N$ particelle identiche non interagenti di massa $m$ vincolate a muoversi sull'asse reale. Fissato un sistema di riferimento lungo l'asse con origine nel punto $O$, la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

dove $q$ è la distanza dal punto $O$, ed

$$V(q) = \begin{cases} V_0\big[1 - |q|/r\big] & 0 \le |q| < r; \\ -V_0 & r \le |q| < 2r; \\ +\infty & |q| \ge 2r; \end{cases}$$

con $V_0$ e $r$ costanti positive di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura $T$.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:
   1.a) Calcolare l'energia media per particella in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.
   1.b) Calcolare la pressione $P(|q| = d)$ a distanza $d$ dal punto $O$ in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:
   2.a) Mostrare l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   2.b) Determinare l'energia media per particella nel limite di alta temperatura e bassa densità.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   3.a) Calcolare il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi $\epsilon_{\mathrm{F}}$.
   3.b) Calcolare il valore della pressione a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_{\mathrm{F}} = 0$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

- **Risposte**

**Nota:** La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'energia media del sistema si può ottenere dalla funzione di partizione canonica $Z(T,V,N)$ utilizzando la relazione $E = -(\partial/\partial\beta)_{V,N} \ln Z(T,V,N)$.

Per un sistema di $N$ particelle classiche non interagenti $Z(T,V,N) = Z_1(T,V)^N/N!$, dove:

$$Z_1(T,V) = \int \frac{dp\,dq}{h}\, e^{-\beta H(p,q)} = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2}m^{1/2}r}{hV_0\beta^{3/2}} \left[1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\, e^{\beta V_0}\right].$$

Ne segue:

$$\boxed{E/N = \frac{3}{2}T - V_0 \frac{1+\beta V_0 + e^{-2\beta V_0}}{\beta V_0 + e^{-\beta V_0} - e^{-2\beta V_0}}.}$$

1.b) Considerando il sottosistema contenuto nella regione $d \le q < d + \delta d$ con $\delta d \ll 1$ si ha

$$P(d) = \frac{T}{\delta d} \ln Z(T, \delta d, z),$$

dove $Z(T,\delta d, z)$ è la funzione di granpartizione del sottosistema. Per un sistema di particelle classiche non interagenti si ha $Z(T,V,z) = e^{zZ_1(T,V)}$, per cui eliminando la fugacità mediante la relazione

$$N = z\frac{\partial}{\partial z} \ln Z(T,V,z) = z\, Z_1(T,V),$$

ed i risultati del punto 1.a), otteniamo

$$\boxed{P(|q| = d) = \begin{cases} \frac{NV_0}{2r}\frac{e^{-\beta V_0(1-|q|/r)}}{1-e^{-\beta V_0}+\beta V_0\, e^{\beta V_0}}, & 0 \le d < r; \\ \frac{NV_0}{2r}\frac{e^{\beta V_0}}{1-e^{-\beta V_0}+\beta V_0\, e^{\beta V_0}}, & r \le d < 2r; \\ 0, & d \ge 2r; \end{cases}}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_{\rm min})} - 1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\rm min} = -V_0$ e

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=0,\pm1} \int \frac{dp\,dq}{h}\, \delta\big(\epsilon - H(p,q,\sigma)\big) \\ &= \frac{6r\sqrt{2m}}{hV_0}\Big[\frac{V_0}{\sqrt{\epsilon + V_0}}\,\theta(\epsilon+V_0) + 2\sqrt{\epsilon}\,\theta(\epsilon) - 2\sqrt{\epsilon - V_0}\,\theta(\epsilon - V_0)\Big]. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -V_0^-} \int_{-V_0}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon+V_0}}\, \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \to \infty \quad \Rightarrow \text{Non esiste condensazione BE.}}$$

poichè l'integrando ha una singolarità non integrabile all'estremo inferiore. In contributo degli altri due integrati è finito.

2.b) In assenza di condensazione di Bose-Einstein il numero di particelle e l'energia media del sistema sono date da:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1},$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)\,\epsilon}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}.$$

Nel limite di alta temperatura e bassa densità si ha $z \ll 1$, per cui

$$N \simeq z\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} + O(z^2), \qquad z \ll 1.$$

$$E \simeq z\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\,\epsilon\, e^{-\beta\epsilon} + O(z^2), \qquad z \ll 1.$$

da cui segue:

$$E/N \simeq -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}\right] + O(z) \qquad z \ll 1.$$

Usando l'espressione di $G(\epsilon)$ ricavata al punto precedente si ha facilmente:

$$\boxed{E/N \simeq \frac{3}{2}T - V_0\frac{1+\beta V_0+e^{-2\beta V_0}}{\beta V_0+e^{-\beta V_0}-e^{-2\beta V_0}} + O(z), \qquad z \ll 1.}$$

3.a) A $T=0$ si ha

$$N=\int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=\pm 1/2}\int \frac{dp\,dq}{h}\,\delta\big(\epsilon - H(p,q,\sigma)\big) \\ &= \frac{4r\sqrt{2m}}{hV_0}\Big[\frac{V_0}{\sqrt{\epsilon+V_0}}\,\theta(\epsilon+V_0) + 2\sqrt{\epsilon}\,\theta(\epsilon) - 2\sqrt{\epsilon-V_0}\,\theta(\epsilon-V_0)\Big]. \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\boxed{N=\frac{N_0}{3}\left[3\sqrt{\epsilon_{\rm F}/V_0+1}\,\theta(\epsilon_{\rm F}+V_0) + 2\left(\epsilon_{\rm F}/V_0\right)^{3/2}\theta(\epsilon_{\rm F}) - 2\left(\epsilon_{\rm F}/V_0-1\right)^{3/2}\theta(\epsilon_{\rm F}-V_0)\right].}$$

dove

$$N_0 = N\Big|_{\epsilon_{\rm F}=0} = \frac{8r\sqrt{2mV_0}}{h}.$$

3.b) La pressione è data dalla relazione

$$PV = T\int_{-V_0}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\,\ln\left[1+ze^{-\beta\epsilon}\right].$$

Usando la $G(\epsilon)$ del punto 3.a), si ha

$$PV=\frac{N_0T}{2V_0^{1/2}}\int_{-V_0}^{+\infty}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon+V_0}}\,\ln\left[1+ze^{-\beta\epsilon}\right],$$

poichè solo la regione $r \le |q| < 2r$ contribuisce per $T=0$ ed $\epsilon_{\rm F}=0$. Usando l'identità $(\epsilon+V_0)^{-1/2} = 2\frac{d}{d\epsilon}\sqrt{\epsilon+V_0}$ ed integrando per parti abbiamo:

$$\lim_{T\to 0}\frac{N_0T}{2V_0^{1/2}}\int_{-V_0}^{+\infty}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon+V_0}}\,\ln\left[1+ze^{-\beta\epsilon}\right] = \frac{N_0}{V_0^{1/2}}\int_{-V_0}^{0} d\epsilon\,\sqrt{\epsilon+V_0} = \frac{2N_0V_0}{3}.$$

Di conseguenza, sostituendo $V=4r$ ed $N_0$ abbiamo

$$\boxed{P=\frac{2}{3}\,\frac{N_0V_0}{V} = \frac{4}{3}\,\frac{(2m)^{1/2}V_0^{3/2}}{h}, \quad T=0,\ \epsilon_{\rm F}=0.}$$