Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 11.11.2020

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle ultrarelativistiche identiche non interagenti vincolate a muoversi su un piano. Fissato un sistema di riferimento lcon origine nel punto O, la Hamiltoniana del sistema è data da:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, m) = \sum_{i=1}^{N} \Big[c\,|\mathbf{p}_i| + \omega\big(r_i^2/a^2 - m_i\big) \Big], \qquad \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2 \ , m_i = \pm 1,$$

dove $r = |\mathbf{q}|$ è la distanza dal punto O ed a, c ed ω sono costanti positive con opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:

   1.a) Calcolare l'entropia S in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.

   1.b) Indicato con $\langle r^n \rangle_m$ il valore medio del momento n-esimo del modulo $r = |\mathbf{q}|$ delle particelle con $m_i = m$, calcolare $\Delta_2 = \langle r^2 \rangle_{+1} - \langle r^2 \rangle_{-1}$ in funzione della temperatura.

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

   2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e scrivere (senza risolvere) l'equazione che determina la temperatura critica T_0.

   2.b) Indicato con $N_m(T)$ il numero medio di particelle nello stato normale con $m_i = m$, determinare il rapporto $N_{-1}(T)/N_{+1}(T)$ per $T < T_0$ e studiarne il comportamento per $T \ll \omega$.

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:

   3.a) Calcolare il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.

   3.b) Calcolare il valore medio di m_i a temperatura nulla in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F} e discuterne l'andamento per $\epsilon_{\mathrm{F}} \gg \omega$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1}=T$.

1.a) L'entropia $S(T,N)$ si può ottenere dalla relazione $S=-(\partial F/\partial T)_N$, dove $F(T,N)=-T\ln Z(T,N)$ è l'energia libera del sistema e $Z(T,N)$ la funzione di partizione canonica.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T,N)=Z_1(T)^N/N!$, dove:

$$Z_1(T)=\sum_{m=\pm1}\int\frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\,e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q},m)}=\frac{4\pi^2a^2}{h^2c^2\omega\beta^3}\,\cosh\beta\omega.$$

Ne segue:

$$\boxed{S(T)/N=\ln\left[\frac{4\pi^2a^2e^4}{Nh^2c^2\omega\beta^3}\,\cosh\beta\omega\right]-\beta\omega\tanh\beta\omega.}$$

1.b) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la densità di probabilità canonica si fattorizza, di conseguenza

$$\langle r^2\rangle_m=\frac{1}{Z_1}\int\frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\,e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q},m)}\,r^2=\frac{a^2}{\beta\omega}\,\frac{e^{\beta\omega m}}{e^{\beta\omega}+e^{-\beta\omega}}.$$

Da cui:

$$\boxed{\langle r^2\rangle_{+1}-\langle r^2\rangle_{-1}=\frac{a^2}{\beta\omega}\,\tanh\beta\omega.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\epsilon\,\frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\epsilon_{\rm min})}-1}<\infty.$$

dove $\epsilon_{\rm min}=-\omega$ e

$$\begin{aligned}G(\epsilon)&=\sum_{m=\pm1}\int\frac{d^2p\,d^2q}{h^2}\,\delta\big(\epsilon-c|\mathbf{p}|-\omega(r^2/a^2-m)\big)\\&=\frac{3\pi^2a^2}{h^2c^2\omega}\Big[(\epsilon+\omega)^2\,\theta(\epsilon+\omega)+(\epsilon-\omega)^2\,\theta(\epsilon-\omega)\Big].\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to-\omega^-}\left[\int_{-\omega}^{\infty}d\epsilon\,\frac{(\epsilon+\omega)^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}+\int_{\omega}^{\infty}d\epsilon\,\frac{(\epsilon-\omega)^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\right]<\infty\quad\Rightarrow\text{ Esiste condensazione BE,}}$$

poichè l'integrando del primo integrale ha una singolarità eliminabile all'estremo inferiore, mentre l'integrando del secondo integrale è regolare nel dominio di integrazione.

Alla temperatura T_0 di condensazione si ha:

$$N=\int_{-\omega}^{+\infty}d\epsilon\,\frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon+\omega)}-1}$$

che sostituendo l'espressione di $G(\epsilon)$ fornisce l'equazione per T_0:

$$\boxed{N=\frac{2\pi^2a^2}{h^2c^2\omega}\,T_0^3\left[1+\frac{1}{2\zeta(3)}\int_0^{+\infty}dy\,\frac{y^2}{e^{y+2\beta_0\omega}-1}\right].}$$

2.b) Usando i risultati del punto precedente, il numero medio di particelle nello stato normale per $T < T_0$ ed $m_i = \pm 1$ è dato da:

$$N_{+1}(T) = \frac{\pi^2 a^2}{h^2 c^2 \omega} \int_{-\omega}^{\infty} d\epsilon \, \frac{(\epsilon+\omega)^2}{e^{\beta(\epsilon+\omega)}-1} = \frac{2\pi^2 a^2}{h^2 c^2 \omega} \zeta(3)\, T^3,$$

$$N_{-1}(T) = \frac{\pi^2 a^2}{h^2 c^2 \omega} \int_{\omega}^{\infty} d\epsilon \, \frac{(\epsilon-\omega)^2}{e^{\beta_0(\epsilon+\omega)}-1} = \frac{\pi^2 a^2}{h^2 c^2 \omega} T^3 \int_0^{+\infty} dy \, \frac{y^2}{e^{y+2\beta\omega}-1}.$$

Di conseguenza

$$\boxed{\frac{N_{-1}(T)}{N_{+1}(T)} = \frac{1}{2\,\zeta(3)} \int_0^{+\infty} dy \, \frac{y^2}{e^{y+2\beta\omega}-1}.}$$

Nel limite $\beta\omega \gg 1$ otteniamo

$$\boxed{\frac{N_{-1}(T)}{N_{+1}(T)} \sim \frac{e^{-2\beta\omega}}{\zeta(3)}, \qquad \beta\omega \gg 1.}$$

3.a) A $T = 0$ si ha

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon \, G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$G(\epsilon) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \sum_{m=\pm 1} G(\epsilon, m) = \frac{2\pi^2 a^2}{h^2 c^2 \omega} \Big[(\epsilon+\omega)^2\, \theta(\epsilon+\omega) + (\epsilon-\omega)^2\, \theta(\epsilon-\omega)\Big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{N = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2 a^2}{3h^2 c^2 \omega} (\epsilon_{\rm F}+\omega)^3, & -\omega \le \epsilon_{\rm F}, \le \omega; \\[2ex] \dfrac{4\pi^2 a^2}{3h^2 c^2 \omega} (\epsilon_{\rm F}^3 + 3\omega^2 \epsilon_{\rm F}), & \epsilon_{\rm F} \ge \omega. \end{cases}}$$

3.b) Il valore medio di m_i a $T = 0$ ´e dato da

$$\langle m \rangle = \frac{1}{N} \Big[N_{+1} - N_{-1}\Big],$$

dove, usando i risultati del punto precedente

$$N_m = \frac{2\pi^2 a^2}{3h^2 c^2 \omega} (\epsilon_{\rm F} + \omega m)^3\, \theta(\epsilon_{\rm F} + \omega m).$$

Di conseguenza

$$\boxed{\langle m \rangle = \begin{cases} 1, & -\omega \le \epsilon_{\rm F}, \le \omega; \\[2ex] \dfrac{3\epsilon_{\rm F}^2 \omega + \omega^3}{\epsilon_{\rm F}^3 + 3\omega^2 \epsilon_{\rm F}}, & \epsilon_{\rm F} \ge \omega. \end{cases}}$$

Nel limite $\epsilon_{\rm F} \gg \omega$ si ha

$$\boxed{\langle m \rangle \sim \frac{3\omega}{\epsilon_{\rm F}}, \qquad \epsilon_{\rm F} \gg \omega.}$$