Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 03.02.2021

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle ultrarelativistiche identiche non interagenti vincolate a muoversi su una retta. Fissato un sistema di riferimento con origine nel punto O, la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(p,q) = c\,|p| + V(q) \qquad p,q \in \mathbb{R}$$

dove q è la distanza dal punto O, ed

$$V(q) = \begin{cases} -V_0 & -a < q < 0; \\ -V_0 q/a & 0 < q < a; \\ +\infty & |q| > a; \end{cases}$$

con V_0 ed a costanti positive di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:
   1.a) Calcolare il calore specifico a volume costante c_V in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.
   1.b) Calcolare la probabilità $P(\epsilon < 0)$ che l'energia di singola particella sia minore di zero in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:
   2.a) Mostrare l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   2.b) Calcolare l'energia media per particella nel limite di alta temperatura e bassa densità.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   3.a) Calcolare il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F.
   3.b) Calcolare il rapporto $r = N(q > 0)/N(q < 0)$ tra numero di particelle che a $T = 0$ si trovano rispettivamente nella regione $q < 0$ e nella regione $q > 0$ in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T, N) = Z_1(T)^N/N!$, dove:

$$Z_1 = \int \frac{dp\, dq}{h}\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})} = \frac{2a}{hcV_0\beta^2}\Big[\beta V_0\, e^{\beta V_0} + e^{\beta V_0} - 1\Big].$$

Ne segue che:

$$E/N = 2\beta^{-1} - V_0 \frac{2 + \beta V_0}{1 + \beta V_0 - e^{-\beta V_0}},$$

per cui:

$$\boxed{c_V = \frac{\partial}{\partial T}\Big|_{V=2a,N} E/N = 2 - \left[\frac{\beta V_0}{1 + \beta V_0 - e^{-\beta V_0}}\right]^2 \Big[1 + 3e^{-\beta V_0} + \beta V_0 e^{-\beta V_0}\Big].}$$

1.b) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la densità di probabilità canonica si fattorizza, di conseguenza

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{1}{Z_1}\int \frac{dp\, dq}{h}\, e^{-\beta H(p,q)}\, \delta\big(\epsilon - H(p, q)\big) = \frac{G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}}$$

Dove $G(\epsilon)$ è la densità degli stati di singola particella:

$$G(\epsilon) = \int \frac{dp\, dq}{h}\, \delta\big(\epsilon - H(p, q)\big) = \frac{2a}{hcV_0}\Big[\big(2V_0 + \epsilon\big)\, \theta\big(\epsilon + V_0\big) - \epsilon\, \theta(\epsilon)\Big].$$

Da cui:

$$\boxed{P(\epsilon < 0) = \int_{-\infty}^{0} d\epsilon\, \mathcal{P}(\epsilon) = 1 - \frac{2\beta V_0}{\beta V_0\, e^{\beta V_0} + e^{\beta V_0} - 1}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_{\min})} - 1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\min} = -V_0$ e $G(\epsilon)$ è pari a tre volte l'espressione calcolata al punto 1.b). Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu \to -V_0^-} \int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{2V_0 + \epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} - \int_{0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} = \infty \quad \Rightarrow \text{Non esiste condensazione BE,}}$$

poichè l'integrando del primo integrale ha una singolarità non integrabile all'estremo inferiore:

$$\frac{2V_0 + \epsilon}{e^{\beta(\epsilon + V_0)} - 1} \sim \frac{V_0}{\beta(\epsilon + V_0)} \qquad \epsilon \to -V_0^+.$$

2.b) In assenza di condensazione di Bose-Einsten per ogni temperatura l'energia media per particella è data da $E(T, V, z)/N(T, V, z)$, dove

$$E(T, V, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon\, G(\epsilon)}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1}, \qquad N(T, V, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1}.$$

Nel limite di alta temperatura e bassa densità $z \ll 1$, di conseguenza al primo ordine in z si ha:

$$E(T, V, z)/N(T, V, z) \simeq -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}, \qquad z \ll 1.$$

che usando l'espressione di $G(\epsilon)$ calcolata al punto 2.a) fornisce

$$\boxed{E(T,V,z)/N(T,V,z) = 2T - V_0 \frac{2+\beta V_0}{1+\beta V_0 - e^{-\beta V_0}}, \qquad T \gg 1,\ N/2a \ll 1.}$$

Osserviamo che in questo limite

$$z \simeq \frac{Nhc\beta}{6a} = \frac{hc}{3} \times \frac{N}{2aT} \ll 1.$$

3.a) A $T = 0$ si ha

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove $G(\epsilon)$ è pari a due volte l'espressione calcolata al punto 1.b). Di conseguenza

$$\boxed{N = \begin{cases} \dfrac{4a}{hcV_0}\Big(2V_0\epsilon_F + \dfrac{\epsilon_F^2}{2} + \dfrac{3V_0^2}{2}\Big), & -V_0 \le \epsilon_F, \le 0; \\[2ex] \dfrac{4a}{hcV_0}\Big(2V_0\epsilon_F + \dfrac{3V_0^2}{2}\Big), & \epsilon_F \ge 0. \end{cases}}$$

3.b) Introducendo la densità degli stati

$$G(\epsilon, q) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{dp\, dq'}{h}\, \delta\big(\epsilon - H(p,q,\sigma)\big)\, \delta(q'-q) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{dp}{h}\, \delta\big(\epsilon - H(p,q,\sigma)\big)$$

A $T = 0$ il numero di particelle con $q < 0$ è dato da

$$N(q<0; 0, V, \epsilon_F) = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon \int_{-\infty}^{0} dq\, G(\epsilon, q),$$

dove usando usando i risultati del punto 1.b) abbiamo facilmente

$$G(\epsilon, q) = \frac{4}{hc}\theta\big(\epsilon - V(q)\big),$$

per cui:

$$N(q<0; 0, V, \epsilon_F) = \frac{4a}{hc}\,(\epsilon_F + V_0)\,\theta(\epsilon_F + V_0).$$

Sfruttando il risultato 3.a) otteniamo Per il calcolo di $N(q > 0; 0, V, \epsilon_F)$ possiamo procedere nello stesso modo, ovvero osservare che $N(q > 0; 0, V, \epsilon_F) = N - N(q < 0; 0, V, \epsilon_F)$. Di conseguenza usando i risultati del punto precedente per $-V_0 \le \epsilon_F \le 0$ abbiamo:

$$N(q>0; 0, V, \epsilon_F) = N - N(q<0; 0, V, \epsilon_F) = \begin{cases} \dfrac{2a}{hcV_0}(\epsilon_F + V_0)^2, & -V_0 \le \epsilon_F, \le 0; \\[2ex] \dfrac{4a}{hc}\Big(\epsilon_F + \dfrac{V_0}{2}\Big), & \epsilon_F \ge 0. \end{cases}$$

Di conseguenza si ha

$$\boxed{r = N(q>0; 0, V, \epsilon_F)\Big/N(q<0; 0, V, \epsilon_F) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_F + V_0}{2V_0}, & -V_0 \le \epsilon_F, \le 0; \\[2ex] \dfrac{\epsilon_F + V_0/2}{\epsilon + V_0}, & \epsilon_F \ge 0. \end{cases}}$$