Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 17.02.2021

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle ultrarelativistiche identiche e non interagenti vincolate a muoversi su un piano. Fissato un sistema di con origine nel punto O, la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = c|\boldsymbol{p}| + V(|\boldsymbol{q}|), \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2,$$

dove $|\boldsymbol{q}|$ è la distanza dal punto O, ed

$$V(q) = \begin{cases} V_0 \left[q^2/a^2 - 1\right] & 0 \le q < a; \\ 0 & a \le q < 2a; \\ +\infty & q \ge 2a; \end{cases}$$

con V_0 e a costanti positive di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:
   - 1.a) Calcolare l'entropia $S(T, V, N)$ in funzione della temperatura e dei parametri del sistema.
   - 1.b) Indicata con $P(r)$ la pressione a distanza $|\boldsymbol{q}| = r$ dal punto O, determinare il valore r^* tale che la pressione alla distanza r^* sia pari al doppio della pressione sulla superfice: $P(r^*) = 2P(2a)$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 1:
   - 2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Determinare l'energia media del sistema per temperature T minori della temperatura di condensazione T_0.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Calcolare la densità di particelle ρ in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.
   - 3.b) Calcolare il rapporto $R = N(|\boldsymbol{q}| > a)/N(|\boldsymbol{q}| < a)$ a temperatura nulla in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5
  2.a: 5, 2.b: 5
  3.a: 5, 3.b: 5

Nota: Al punto 2.b esprimere l'energia media in termini delle funzioni

$$I_n(x) = \int_x^{+\infty} dy\, \frac{y^n}{e^y - 1}.$$

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'entropia $S(T, V, N)$ del sistema si può ottenere dalla relazione $S = \beta(E-F)$ con $E = -(\partial/\partial\beta)_{V,N} \ln Z(T, V, N)$ e $F(T, V, N) = -T \ln Z(T, V, N)$. Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la funzione di partizione canonica si scrive $Z(T, V, N) = Z_1(T, V)^N/N!$, dove:

$$Z_1(T, V) = \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, e^{-\beta H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})} = \frac{2\pi^2 a^2}{h^2 c^2 V_0 \beta^3} \left[e^{\beta V_0} - 1 + 3\beta V_0\right].$$

Ne segue:

$$\boxed{S/N = \beta(E - F)/N = \ln\left[\frac{2\pi^2 a^2 e^4}{N h^2 c^2 V_0 \beta^3} \left[e^{\beta V_0} - 1 + 3\beta V_0\right]\right] - \beta V_0 \frac{e^{\beta V_0} + 3}{e^{\beta V_0} - 1 + 3\beta V_0}.}$$

1.b) La pressione $P(r)$ a distanza r dal punto O è pari alla pressione del sottosistema contenuto nella regione $r \le q < r + \delta r$ con $\delta r \ll 1$, di volume $V' = 2\pi r \delta r$, in equilibrio termodinamico con la restante parte del sistema totale, Si ottiene così

$$P(r) = \frac{N V_0}{\pi a^2} \frac{e^{-\beta V(r)}}{e^{\beta V_0} - 1 + 3\beta V_0}, \qquad 0 \le r \le 2a.$$

La distanza r^* soddisfa quindi la relazione

$$e^{-\beta V(r^*)} = \frac{P(r^*)}{P(2a)} = 2.$$

Questa equazione può avere soluzioni solo per $0 \le r \le a$. Sostituendo l'espressione di $V(q)$, si ottiene

$$\boxed{r^* = a\sqrt{1 - \frac{T}{V_0} \ln 2}, \quad T \le \frac{V_0}{\ln 2}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_{\min})} - 1} < \infty.$$

dove $\epsilon_{\min} = -V_0$ e

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=0,\pm1} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\big) \\ &= \frac{3\pi^2 a^2}{h^2 c^2 V_0} \big[(\epsilon + V_0)^2 \theta(-\epsilon)\theta(\epsilon + V_0) + (8V_0\epsilon + V_0^2)\, \theta(\epsilon)\big]. \\ &= \frac{3\pi^2 a^2}{h^2 c^2 V_0} \big[(\epsilon + V_0)^2\, \theta(\epsilon + V_0) - (\epsilon^2 - 6V_0\epsilon)\, \theta(\epsilon)\big]. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu \to -V_0^-} \int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{(\epsilon + V_0)^2}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

poichè l'integrando ha una singolarità integrabile all'estremo inferiore. Il contributo dell'altro termine è finito in quanto l'integrando è regolare nel dominio di integrazione.

2.b) Per $T < T_0$,

$$
\begin{aligned}
E(T) &= -N_0\, V_0 + \int_{-V_0}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon\, G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon+V_0)} - 1} \\
&= -NV_0 + \int_0^{+\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon\, G(\epsilon - V_0)}{e^{\beta\epsilon} - 1}.
\end{aligned}
$$

dove N_0 è il numero di particelle nello stato condensato ed N il numero totale di particelle. Usando l'espressione della $G(\epsilon)$ calcolata al punto precedente e le funzioni $I_n(x)$ definite nel testo, si ha:

$$
\boxed{E/N = -NV_0 + \frac{3\pi^2 a^2 T^4}{h^2 c^2 V_0}\left[I_3(0) - I_3(\beta V_0) + 8\beta V_0\, I_2(\beta V_0) - 7\beta^2 V_0^2\, I_1(\beta V_0)\right].}
$$

3.a) A $T = 0$ si ha

$$
N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon\, G(\epsilon),
$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$
G(\epsilon) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\big) = \frac{2\pi^2 a^2}{h^2 c^2 V_0}\left[(\epsilon + V_0)^2\, \theta(\epsilon + V_0) - (\epsilon^2 - 6V_0\epsilon)\, \theta(\epsilon)\right].
$$

Di conseguenza, ricordando che $V = 4\pi a^2$,

$$
\rho = \frac{N}{V} = \frac{\pi}{6h^2c^2V_0}\Big[(\epsilon_{\rm F} + V_0)^3\, \theta(\epsilon_{\rm F} + V_0) - \big[\epsilon_{\rm F}^3 - 9V_0\epsilon_{\rm F}^2\big]\, \theta(\epsilon_{\rm F})\Big]
$$

ovvero:

$$
\boxed{\rho = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6h^2c^2V_0}(\epsilon_{\rm F} + V_0)^3, & -V_0 \le \epsilon_{\rm F} \le 0; \\[2ex] \dfrac{\pi}{6h^2c^2}\big(12\epsilon_{\rm F}^2 + 3V_0\epsilon_{\rm F} + V_0^2\big), & \epsilon_{\rm F} \ge 0. \end{cases}}
$$

3.b) Il numero di particelle a $T = 0$ con $|\boldsymbol{q}| > a$ è dato da

$$
N(|\boldsymbol{q}| > a) = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon \int_{q>a} dq\, G(\epsilon, q),
$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$
G(\epsilon, q) = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \int \frac{d^2p\, d^2q'}{h^2}\, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}')\big)\, \delta(|\boldsymbol{q}'| - q) = \frac{8\pi^2}{h^2c^2}\, q\, \big(\epsilon - V(q)\big)\, \theta(\epsilon - V(q)).
$$

Di conseguenza

$$
N(|\boldsymbol{q}| > a) = \frac{6\pi^2 a^2}{h^2c^2}\, \epsilon_{\rm F}^2\, \theta(\epsilon_{\rm F}).
$$

Il numero di particelle con $|\boldsymbol{q}| > a$ può essere calcolato dala relazione $N(|\boldsymbol{q}| < a) = N - N(|\boldsymbol{q}| > a)$, con l'espressione di N data al punto precedente Ne segue che:

$$
\boxed{R = \frac{N(|\boldsymbol{q}| > a)}{N(|\boldsymbol{q}| < a)} = \begin{cases} 0, & -V_0 \le \epsilon_{\rm F} \le 0; \\[2ex] \dfrac{6\epsilon_{\rm F}^2}{2\epsilon_{\rm F}^2 + 2V_0\epsilon_{\rm F} + \frac{2}{3}V_0^2}, & \epsilon_{\rm F} \ge 0. \end{cases}}
$$