

Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 12.07.2021

Si consideri un gas perfetto di costituito da N particelle identiche di massa m non interagenti libere di muoversi su un disco di raggio R . La Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = \frac{p^2}{2m} + \eta K(q/R)^2, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \quad \eta = \pm 1$$

con $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}| \leq R$ la distanza dal centro del disco e K costante positiva di opportune dimensioni. Il sistema è in equilibrio termodinamico con una bagno termico a temperatura T .

1. Assumendo che si possa applicare la statistica classica:

- 1.a) Calcolare l'energia media per particella E/N in funzione della temperatura e dei parametri del sistema. Si chiede inoltre l'andamento di E/N nel limite di alta temperatura $T \gg 1$.
- 1.b) Calcolare la funzione di probabilità $\mathcal{P}(\eta)$ della variabile η ed il suo valore medio $\langle \eta \rangle$ in funzione della temperatura, e dei parametri del sistema.

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

- 2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
- 2.b) Ricavare l'equazione per la temperatura critica T_0 e l'espressione della frazione $N_0(T)/N$ di particelle nello stato condensato per temperature $T \leq T_0$.

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:

- 3.a) Calcolare il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F .
- 3.b) Calcolare il valore medio $\langle \eta \rangle$ della variabile η in funzione dell'energia di Fermi.

• Valutazione risposte:

- 1.a: 5, 1.b: 5
- 2.a: 5, 2.b: 5
- 3.a: 5, 3.b: 5

Nota: Al punto 2.b esprimere i risultati in termini delle funzione

$$I(x) = \int_0^{+\infty} dy \frac{y e^{-y}}{1 - e^{-y-x}}$$

• Risposte

Nota: La costante di Boltzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

- 1.a) L'energia media del sistema in funzione della temperatura si può ottenere dalla relazione $E(T, V, N) = -(\partial/\partial\beta)|_{V,N} \ln Z(T, V, N)$, dove $Z(T, V, N)$ è la funzione di partizione canonica.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z(T, V, N) = Z_1(T, V)^N/N!$, dove $Z_1(T, V)$ è la funzione di partizione di singola particella:

$$\begin{aligned} Z_1(T, V) &= \sum_{\eta=\pm 1} \int \frac{d^2p d^2q}{h^2} e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)} = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K \beta^2} \sum_{\eta=\pm 1} \frac{1}{\eta} [1 - e^{-\beta K \eta}] \\ &= \frac{4\pi^2 m R^2}{h^2 K \beta^2} \sinh \beta K. \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$E(T, V, N)/N = 2T - K \coth(K/T).$$

Nel limite di alta temperatura si ha

$$E(T, V, N)/N \sim T - K + O(e^{-2\beta K}), \quad T \gg 1,$$

in accordo con il teorema di equipartizione.

- 1.b) Essendo le particelle indipendenti la probabilità della variabile η è data da

$$\mathcal{P}(\eta) = \frac{1}{Z_1} \int \frac{d^2p d^2q}{h^2} e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)}.$$

Usando i risultati del punto precedente si ha:

$$\mathcal{P}(\eta) = \frac{1 - e^{-\beta K \eta}}{\eta [e^{\beta K} - e^{-\beta K}]}$$

Il valore medio di η è dato da

$$\langle \eta \rangle = \sum_{\eta=\pm 1} \mathcal{P}(\eta) \eta$$

Ovvero:

$$\langle \eta \rangle = - \frac{\cosh \beta K - 1}{\sinh \beta K}.$$

- 2.a) Per un sistema di Bosoni il numero di particelle a temperatura T è pari a $N = N_0 + \tilde{N}$; dove N_0 è il numero di particelle nello stato condensato ($\epsilon = \epsilon_{\min}$) ed $\tilde{N}$ il numero di particelle nello stato non-condensato ($\epsilon > \epsilon_{\min}$):

$$\tilde{N}(T, V, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}, \quad \mu \leq \epsilon_{\min} = -K,$$

dove $G(\epsilon)$ è la densità degli stati di singola particella:

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\eta=\pm 1} \int \frac{d^2p d^2q}{h^2} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)) \\ &= \sum_{\eta=\pm 1} \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K \eta} [\epsilon \theta(\epsilon) - (\epsilon - \eta K) \theta(\epsilon - \eta K)] \\ &= \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K} [(\epsilon + K) \theta(\epsilon + K) - (\epsilon - K) \theta(\epsilon - K)]. \end{aligned}$$

I bosoni hanno spin 0 e non vi è contributo dovuto allo spin. La condizione affinché esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\tilde{N}(T, V, \epsilon_{\min}) = \tilde{N}(T, V, -K) = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K} \left[\int_{-K}^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon + K}{e^{\beta(\epsilon+K)} - 1} - \int_K^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon - K}{e^{\beta(\epsilon+K)} - 1} \right] < +\infty.$$

L'integrando del secondo integrale è regolare in tutto il dominio di integrazione. L'integrando del primo integrale presenta una singolarità integrabile all'estremo inferiore,

$$\frac{\epsilon + K}{e^{\beta(\epsilon+K)} - 1} \sim \beta^{-1} \quad \epsilon \rightarrow -K^+.$$

di conseguenza l'integrale è finito per cui

$$\lim_{\mu \rightarrow -K^-} \tilde{N}(T, V, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow -K^-} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Esiste condensazione BE.}$$

2.b) A $T = T_0$ si ha

$$\tilde{N}(T_0, V, \epsilon_{\min}) = \tilde{N}(T_0, V, -K) = N,$$

dove utilizzando l'espressione trovata al punto precedente

$$\tilde{N}(T, V, -K) = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K} \beta^{-2} \left[\frac{\pi^2}{6} - e^{-2\beta K} I(2\beta K) \right],$$

con

$$I(x) = \int_0^{+\infty} dy \frac{y e^{-y}}{1 - e^{-y-x}}$$

Di conseguenza T_0 è soluzione dell'equazione:

$$T_0^2 \left[\frac{\pi^2}{6} - e^{-2\beta_0 K} I(2\beta_0 K) \right] = \frac{h^2 K N}{2\pi^2 m R^2}.$$

Per $T \leq T_0$

$$N = N_0(T) + \tilde{N}(T, V, -K),$$

e quindi

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \frac{\tilde{N}(T, V, -K)}{\tilde{N}(T_0, V, -K)},$$

da cui

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \frac{1 - 6 e^{-2\beta K} I(2\beta K)/\pi^2}{1 - 6 e^{-2\beta_0 K} I(2\beta_0 K)/\pi^2}.$$

3.a) Per un sistema fermionico il numero di particelle a $T = 0$ è dato da

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon),$$

dove, usando i risultati del punto 2.a),

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \sum_{\eta=\pm 1} \int \frac{d^2 p d^2 q}{h^2} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)) \\ &= \frac{4\pi^2 m R^2}{h^2 K} \left[(\epsilon + K) \theta(\epsilon + K) - (\epsilon - K) \theta(\epsilon - K) \right]. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$N = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K} [(\epsilon_F + K)^2 \theta(\epsilon_F + K) - (\epsilon_F - K)^2 \theta(\epsilon_F - K)],$$

ovvero:

$$N = \begin{cases} \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K} (\epsilon_F + K)^2, & -K \leq \epsilon_F \leq K; \\ \frac{8\pi^2 m R^2}{h^2} \epsilon_F, & \epsilon_F \geq K. \end{cases}$$

3.b) Il valore medio della variabile η in funzione dell'energia di Fermi è dato da

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\eta=\pm 1} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon \eta G(\epsilon, \eta) = \frac{N(+1) - N(-1)}{N(+1) + N(-1)},$$

dove dal punto precedente

$$G(\epsilon, \eta) = \frac{4\pi^2 m R^2}{h^2 K \eta} [\epsilon \theta(\epsilon) - (\epsilon - \eta K) \theta(\epsilon - \eta K)],$$

e

$$N(\eta) = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon, \eta) = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 K \eta} [\epsilon_F^2 \theta(\epsilon_F) - (\epsilon_F - \eta K)^2 \theta(\epsilon_F - \eta K)].$$

Di conseguenza

$$\langle \eta \rangle = - \frac{(\epsilon_F + K)^2 \theta(\epsilon_F + K) + (\epsilon_F - K)^2 \theta(\epsilon_F - K) - 2\epsilon_F^2 \theta(\epsilon_F)}{(\epsilon_F + K)^2 \theta(\epsilon_F + K) - (\epsilon_F - K)^2 \theta(\epsilon_F - K)},$$

e quindi

$$\langle \eta \rangle = \begin{cases} -1, & -K \leq \epsilon_F \leq 0; \\ -1 + 2 \frac{\epsilon_F^2}{(\epsilon_F + K)^2}, & 0 \leq \epsilon_F \leq K; \\ -\frac{K}{2\epsilon_F}, & \epsilon_F \geq K. \end{cases}$$