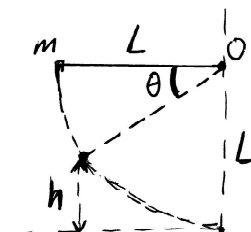


Fisica 1 Matematici – Prof E.Massaro, P.Dore A.A. 2012-2013
Scritto 4 Marzo 2013

1) Un corpo di massa $m = 5 \text{ Kg}$ si muove su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico con $\mu = 0.2$. Inizialmente il blocco ha velocità $v_0 = 6 \text{ m/s}$ e si trova a distanza $d = 8 \text{ m}$ da una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$. Avendo verificato che il blocco urta la molla, calcolare la massima compressione x della molla stessa.

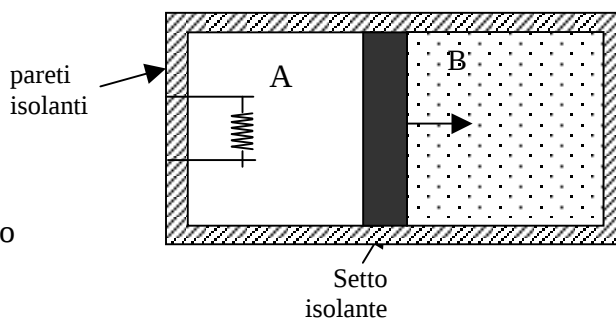
2) Un massa puntiforme $m = 3 \text{ Kg}$ e' legata ad un punto O fisso mediante un filo di massa nulla ed inestensibile. Inizialmente la massa e' ferma con il filo teso in orizzontale. Se la massa viene lasciata libera di cadere, il filo si spezza nella posizione corrispondente a $\theta^* = 30^\circ$. Determinare la tensione T^* a cui e' sottoposto il filo nell'istante in cui si spezza.



3) Il corpo 1 di massa m_1 e velocità v_1 urta in modo completamente anelastico il corpo 2 di massa m_2 inizialmente fermo. Calcolare il rapporto $\Delta K/K_1$ tra l'energia dissipata nell'urto (modulo) e l'energia cinetica iniziale K_1 in funzione del rapporto $x = (m_1/m_2)$, e trovare per quale valore di x si ha $\Delta K/K_1 = 1/2$.

4) Un cilindro omogeneo ruota attorno al suo asse (fisso). All'istante $t = 0 \text{ s}$, quando esso ha momento angolare J_0 , viene applicata una coppia di forze che esercita sul cilindro un momento frenante che dipende dal tempo secondo la legge $M(t) = M_0 \exp(-t/\tau)$, con τ costante. Determinare la legge che descrive come varia il momento angolare del cilindro J in funzione del tempo e stabilire la condizione che deve essere verificata perche' il cilindro si fermi.

5) Un gas perfetto monoatomico è contenuto in un cilindro termicamente isolato di volume $V = 4 \text{ m}^3$ munito di un pistone mobile senza attrito, anch'esso isolato termicamente. Inizialmente tutto il sistema e' in equilibrio, il pistone si trova al centro del cilindro ed in ciascuno degli scomparti A e B del cilindro si trovano $n = 2$ moli di gas perfetto alla temperatura $T = 300 \text{ K}$. Riscaldando la parte A del cilindro con un opportuno sistema (ad esempio mediante una resistenza percorsa da corrente), il gas in A si scalda lentamente, espandendosi in maniera reversibile fino a che sistema si porta in un nuovo stato di equilibrio in cui il volume occupato dal gas in B e' dimezzato rispetto al valore iniziale. Calcolare la quantità di calore Q fornita al gas in A.



6) Un recipiente rigido adiabatico contiene $n = 2$ moli di gas perfetto monoatomico a $P_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e $T_0 = 300 \text{ K}$. Inizialmente nel recipiente e' presente un solido alla temperatura $T_s = 800 \text{ K}$, in una situazione di non-equilibrio. Il sistema gas+solido si porta poi in una situazione di equilibrio, in cui la pressione del gas e' aumentata fino al valore finale $P_f = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Determinare a) la variazione di entropia del gas, b) la capacità termica del solido (Si trascuri la capacità termica del recipiente e le variazioni di volume del solido dovute a cambiamenti di temperatura).

1)

Il blocco urta la molla se

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \mu m g d > 0$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = 90,0 \text{ J}$$

$$\mu m g d = 78,5 \text{ J}$$

la condizione è verificata

Energia cinetica del blocco al momento dell'urto

$$K_d = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mu m g d = 11,5 \text{ J}$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} = 2,15 \text{ m/s}$$

Compressione della molla:

$$\frac{1}{2} m v_d^2 = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + \mu m g (\Delta x)$$

$$k (\Delta x)^2 + 2\mu m g (\Delta x) - m v_d^2 = 0$$

$$\Delta x = \frac{1}{k} \left(-\mu m g \pm \sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_d^2} \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left(-\mu m g \pm \sqrt{(\mu m g)^2 + k m (v_0^2 - 2\mu g d)} \right)$$

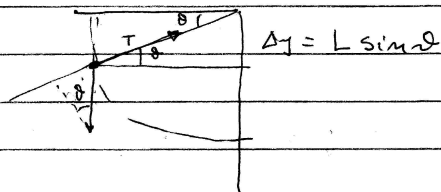
si accetta solo la soluz. positiva

$$(\Delta x) = \frac{1}{100} \left(-9,81 + \sqrt{9,81^2 + 500 \cdot 2,15^2} \right) = 0,393 \text{ m}$$

Es. 2

Nell'istante in cui il filo si rompe la tensione è determinata dalla forza centripeta e dalla componente radiale della forza peso

$$T = m \frac{v^2}{L} + m g \sin \vartheta$$



$$v^2 = 2g \Delta y = 2gL \sin \vartheta$$

$$T = m (2g \sin \vartheta + g \sin \vartheta) = 3mg \sin \vartheta$$

$$\vartheta^* = 30^\circ$$

$$T^* = \frac{3}{2} m g = 44,15 \text{ N}$$

Es. 3

Urto anelastico $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v'$, $v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \right)$$

$$\frac{\Delta K}{K_1} = 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad \frac{\Delta K}{K_1} = \frac{1}{2} \quad \text{per } x=1$$

cioè $m_1 = m_2$

4)

In generale $M = dJ/dt$ (rotazione attorno ad asse fisso, M e J scalari)

Nel caso di momento frenante: $\frac{dJ}{dt} = -M_0 e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow J(t) = J_0 - M_0 \tau \int_0^t e^{-t'/\tau} d(t'/\tau)$$

$$\Rightarrow J(t) = J_0 - M_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

$\Rightarrow$ il cilindro si ferma in t_1 (cioè $J(t_1) = 0$)

$$\text{se } J_0 = M_0 \tau (1 - e^{-t_1/\tau}) \Rightarrow (1 - e^{-t_1/\tau}) = J_0 / M_0 \tau$$

$$\Rightarrow e^{-t_1/\tau} = 1 - J_0 / M_0 \tau \Rightarrow t_1 = \tau \ln \left(1 - \frac{J_0}{M_0 \tau} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow t_1 = \tau \ln \left(\frac{M_0 \tau}{M_0 \tau - J_0} \right)$$

$\Rightarrow t_1$ è reale ($\Rightarrow$ il cilindro si ferma) solo se $M_0 \tau > J_0$

5)

Gas in A nello stato P_0, V_0, T_0 va in P_A, V_A, T_A

Gas in B nello stato P_0, V_0, T_0 va in P_B, V_B, T_B

con $P_B = P_A$ (equilibrio) e $V_B = V_0/2$ ($V_A = \frac{3}{2} V_0$)

$$\Delta U_A = n C_V (T_A - T_0)$$

$$L_{AB} = -L_{BA} = + \frac{1}{\gamma-1} \left(P_B \frac{V_0}{2} - P_0 V_0 \right)$$

$$Q = \Delta U_A + L_{BA}$$

$$P_B = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0/2} \right)^\gamma = P_0 2^\gamma$$

$$-L_{BA} = \frac{1}{\gamma-1} P_0 V_0 (2^{\gamma-1} - 1) = \frac{nR}{\gamma-1} T_0 (2^{\gamma-1} - 1)$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{P_0 2^\gamma \frac{3}{2} V_0}{nR} = 3 \frac{P_0 V_0}{nR} (2^{\gamma-1}) = 3 T_0 2^{\gamma-1}$$

$$T_A - T_0 = (3 \cdot 2^{\gamma-1} - 1) T_0$$

$$Q = \frac{3}{2} nR (3 \cdot 2^{\gamma-1} - 1) T_0 + \frac{nR}{2/3} T_0 (2^{\gamma-1} - 1)$$

$$= \frac{3}{2} nR T_0 (3 \cdot 2^{\gamma-1} - 1 + 2^{\gamma-1} - 1) = \frac{3}{2} nR T_0 (4 \cdot 2^{\gamma-1} - 2)$$

$$Q = 3 nR T_0 (2^{\gamma-1}) = 3 \cdot 8.314 \cdot 300 \cdot 2.175 = 32546 \text{ J}$$

- 6) La pressione del gas aumenta perché il solido cede al gas il calore $Q_S = C(T_F - T_S)$ (con T_F temperatura finale di equilibrio), il gas assorbe calore $Q_g = n C_V (T_F - T_0)$, con $|Q_S| = |Q_g|$ (punti adiabatici) per il gas, inizialmente $P_0 V_0 = n R T_0$ (punti rigide) alla fine $P_F V_0 = n R T_F$ ($\Rightarrow V = \text{cost}$) la trasformazione è irreversibile (spontanea)

- a) la trasformazione è isocora $\Rightarrow \Delta S = n C_V \ln \frac{T_F}{T_0}$

$$\frac{P_F}{P_0} = \frac{T_F}{T_0} \Rightarrow T_F = T_0 (P_F/P_0) = 450 \text{ K}$$

$$\Delta S = n \frac{3}{2} R \ln (T_F/T_0) = 2 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times \ln(1.5) = 10.1 \text{ J/K}$$

- b) $|Q_S| = |Q_g| \Rightarrow |C(T_F - T_S)| = |n C_V (T_F - T_0)|$

$$\Rightarrow C = n C_V \frac{|T_F - T_0|}{|T_F - T_S|} = 2 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times \frac{150}{350} \text{ J/K} = 10.7 \text{ J/K}$$

5bis – senza utilizzare il lavoro)

Es. 5

$$V_0 = \frac{V}{2}$$

$$\Delta U_A = Q - L_{AB}$$

$$\Delta U_B = -L_{BA} = L_{AB}$$

compressione adiabatica

$$Q = \Delta U_A + \Delta U_B$$

all'equilibrio dopo il riscaldamento

$$P_A = P_B$$

$$P_A = P_B = P \left(\frac{V_0}{V_B} \right)^\gamma ; \quad T_A = \frac{P_A V_A}{n R} = \frac{P V_A}{n R} \left(\frac{V_0}{V_B} \right)^\gamma = \frac{P V_A}{n R} 2^\gamma$$

$$V_A = \frac{3}{2} V_0$$

$$T_B = T \left(\frac{V_0}{V_B} \right)^{\gamma-1} = T 2^{\gamma-1}$$

$$Q = n C_V [(T_A - T) + (T_B - T)] = n C_V (T_A + T_B - 2T)$$

$$Q = n \frac{3}{2} R \left(\frac{P V_0}{n R} \frac{3}{2} 2^\gamma + T 2^{\gamma-1} - 2T \right) = n \frac{3}{2} R (3 T 2^{\gamma-1} + T 2^{\gamma-1} - 2T)$$

$$Q = n \frac{3}{2} R T (4 2^{\gamma-1} - 2) = 3 n R T (2^\gamma - 1)$$

$$Q = 3 \cdot 2,0 \cdot 8,314 \cdot 300 (2^{5/3} - 1) = 14\,965,2 \cdot 2,1748 \quad J$$
$$= 32\,546 \quad J$$