Fisica 1 Matematici – Prof E.Massaro, P.Dore A.A. 2012-2013
Scritto 9 Luglio 2013

1) Un corpo di massa m scende senza attrito su un piano inclinato di un angolo α. Si indichi con *x* la posizione occupata dal corpo. Quando il corpo ha percorso un tratto Δx lungo la discesa, determinare analiticamente la variazione del modulo della velocita' (Δv), sapendo che nello stesso tratto la velocita' media e' stata v_m.

2) Un corpo puntiforme di massa m_1, in moto lungo la direzione *x* su un piano orizzontale senza attrito, va ad urtare al tempo t=0 in modo completamente anelastico un corpo di massa m_2= 0,8 Kg anch'esso puntiforme. Prima dell'urto m_2 e' fermo nella posizione x_0, attaccato ad una molla ideale disposta lungo *x* di costante elastica *k*=600 N/m, anch'essa inizialmente in equilibrio. In conseguenza dell'urto la molla viene compressa e comincia quindi ad oscillare. Calcolare la massa m_1 sapendo che i corpi ripassano per il punto x_0, per la prima volta dopo l'urto, al tempo t_1.

3) Un corpo di massa *m* si muove in una dimensione in un campo di forze conservative con energia meccanica E e velocita' v, data in funzione della posizione x dalla formula

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E + ax^2 + bx^4)}\ ,$$

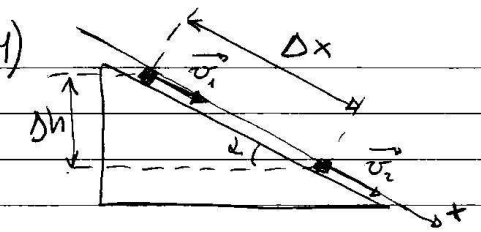
con a = 3 Kg s^{-2} , b= - 2 Kg m^{-2} s^{-2} .
Determinare i punti di equilibrio per la massa [e studiarne la stabilita'].

4) Calcolare il momento angolare di un satellite artificiale di massa m=1000 Kg che descrive un'orbita circolare intorno alla terra di raggio r=10^7 metri.
(utilizzare massa terra M=6 10^{24} Kg, costante gravitazionale G=6.67 10^{-11} N m^2/Kg^2)

5) n moli di gas perfetto monoatomico sono contenute in un contenitore cilindrico con la parte laterale termicamente isolata. Il cilindro e' chiuso superiormente da un pistone anch'esso termicamente isolante, mentre il fondo del cilindro e' un buon conduttore in contatto con una sorgente costituita da una miscela di ghiaccio ed acqua alla temperatura di 0 °C. Il gas viene compresso in maniera reversibile da un volume iniziale V_i al volume finale V_f. Calcolare il valore di V_f per il quale si ha la fusione di una massa m di ghiaccio.
n=10, V_i=1 m^3 , m=0.1 Kg , calore latente di fusione del ghiaccio λ_{fus}=333.5 KJ/Kg

6) Un gas perfetto compie una trasformazione in cui la sua energia interna varia di ΔU=70 J ed il prodotto della pressione per il volume cambia di $\Delta(VP)$=28 J. Calcolare il calore molare a volume costante del gas e stabilire quale e' il tipo di molecole che lo compongono.

1)



$v_m = (v_2 + v_1)/2$

$v_2 - v_1 = \Delta v$, $\Delta h = \Delta x \sin\alpha$

Conservazione energia $\Delta K = mg|\Delta h|$

$\Rightarrow mg|\Delta h| = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$

$mg|\Delta h| = m v_m \Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{g \Delta h}{v_m} = \frac{g \Delta x \sin\alpha}{v_m}$

2) $t_1 = \frac{1}{2} T$ $\qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$

$t_1 = \pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$ $\qquad m_1 + m_2 = k \left(\frac{t_1}{\pi}\right)^2$

$m_1 = k \left(\frac{t_1}{\pi}\right)^2 - m_2 = 60.79$

$m_1 = 60.79\ t_1^2 - 0.8$ kg

3) $v = \sqrt{(2/m)(E - 2x^4 + 3x^2)}$

L'energia meccanica E è data da $E = K + U(x)$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$

$U(x) = E - \frac{1}{2} m \frac{2}{m} (E - 2x^4 + 3x^2)$

$\Rightarrow U(x) = 2x^4 - 3x^2$

Punti di equilibrio: $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 6x = 0$

$\Rightarrow x = 0$, $8x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/4}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$, Punti di equilibrio

Per la stabilità, considerare la derivata seconda:

$\frac{d^2U}{dx^2} = 24x^2 - 6$

< 0 per $x = 0$: eq. instabile

> 0 per $x = -\sqrt{3}/2$: eq. stabile

> 0 per $x = +\sqrt{3}/2$: eq. stabile

4) Momento angolare $J = I\omega$

con I (momento d'inerzia) $= mr^2$

m ruota su orbita circolare $\Rightarrow m\omega^2 r = GMm/r^2$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{GM/r^3} \Rightarrow J = mr^2\sqrt{GM/r^3} = m\sqrt{GMr}$

$\Rightarrow J = 10^3\sqrt{6.67\,10^{-11}\;6\,10^{24}\;10^7} = 10^3\sqrt{40\,10^{20}} = 6.3\,10^{13}\,Kg\,\frac{m^2}{s}$

5)

- Per la fusione di una massa m di ghiaccio occorrono $m\lambda$ calorie $\Rightarrow Q = m\lambda_{fus} = 79\,t\,cal$
- La compressione reversibile del gas è isoterma (a contatto con sorgente a $\emptyset\,^\circ C$)

$\Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow |Q| = |L| = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$

$\Rightarrow Q = \lambda m = nRT\ln\frac{V_i}{V_f}$ (n.b. $V_i > V_f$)

$\Rightarrow \ln\frac{V_i}{V_f} = \frac{\lambda m}{nRT} \Rightarrow V_f = \left[\exp\left(-\frac{\lambda m}{nRT}\right)\right]V_i$

n.b. $\lambda = 79.7\ Kcal/Kg = 3.33\,10^5\,J/Kg \Rightarrow Q = 3.33\,10^4\,J$

$$V_f = V_i\ \exp\left\{\frac{-m\lambda_{fus}}{nRT}\right\}$$

$$= 1\ \exp\left\{-\frac{333.5 \cdot 0.1}{10 \cdot 8.314 \cdot 273.15}\right\} = 0.9985\ m^3$$

6) Gas perfetto: $\Delta U = nC_v\Delta T$, $\Delta(PV) = nR\Delta T$

$\Rightarrow \Delta(PV) = \frac{nR\Delta U}{nC_v} \Rightarrow C_v = \frac{R\Delta U}{\Delta(PV)} = R\frac{70}{28} = \frac{5}{2}R$

$\Rightarrow$ il gas è composto di molecole biatomiche