FISICA 1 – Matematica

Prova scritta del 17-09-2013

Motivare sinteticamente tutte le risposte ai quesiti e scrivere le formule risolutive

1.
Un corpo si muove lungo una guida rettilinea inclinata di un angolo $\alpha = 60°$ rispetto al piano orizzontale. Il corpo si trova inizialmente fermo ad un'altezza $h = 0{,}80$ m e scende verso il basso per effetto della forza peso il coefficiente di attrito dinamico e' $\mu_1 = 0{,}12$ nella prima meta' del percorso e $\mu_2 = 0{,}30$ nella seconda meta'. Calcolare la velocita' con cui il corpo raggiunge la base del piano.

2.
Un corpo di massa $m = 0{,}25$ kg si trova su un piano orizzontale ed e' collegato a due molle, aventi la stessa lunghezza a riposo $L = 1{,}0$ m e la stessa costante elastica $k = 200$ N/m, disposte da parti opposte rispetto ad esso e con l'altra estremita' fissata ad un perno. Inizialmente il corpo e' fermo sul piano e le molle sono a riposo. Il corpo viene sollevato verticalmente di una distanza $h = L/2$ dal piano e quindi lasciato ricadere verso il piano con velocita' iniziale nulla. Calcolare la velocita' con cui esso arriva sul piano.

3.
Un corpo di massa m scorre lungo un binario rettilineo senza attrito soggetto ad una forza variabile secondo la legge $F(x) = A(1 - x)$ diretta parallelamente al binario. Ricavare l'espressione analitica per la velocita' del corpo $v(x)$ in funzione della sua posizione lungo il binario sapendo che inizialmente la sua velocita' e' uguale a 0 ed esso si trova nell'origine. Specificare che tipo di moto compie il corpo e calcolare la massima velocita' che esso raggiunge.

4.
Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1{,}0$ m e massa $m_1 = 3{,}0$ Kg e' sospesa ad una estremita' ad un perno senza attrito. All' estremita' libera e' fissata una massa $m_2 = 1{,}0$ Kg. La sbarra si trova inizialmente nella posizione verticale di equilibrio stabile. Essa viene messa in rotazione a causa di un impulso $\mathcal{T}_0$ dato in direzione orizzontale in un punto che dista dal perno (2/3) L. Calcolare l' energia cinetica iniziale del sistema in funzione di $\mathcal{T}_0$ e il valore minimo di $\mathcal{T}_0$ affinche' la sbarra riesca a raggiungere la posizione orizzontale.

5.
n moli di gas ideale monoatomico sono contenute in un cilindro termicamente isolante chiuso da un pistone (anch'esso isolante) di massa trascurabile e superficie S. Inizialmente il gas e' in equilibrio alla temperatura T_1 e sul pistone, su cui agisce la pressione esterna atmosferica P_e, e la forza di gravita' dovuta ad un blocco di massa m collocato sopra di esso. Quando il blocco viene tolto, il gas si espande fino a portarsi in un nuovo stato di equilibrio. Determinare: a) di che tipo e' la trasformazione del gas, b) la temperatura finale di equilibrio raggiunta dal gas T_2.
($n = 2$ moli, $S = 10$ cm^2, $m = 20{,}0$ Kg, $T_1 = 250{,}0$ K, $P_e = 10^5$ Pa).

6.
Un gas ideale biatomico, nello stato iniziale (P_0, V_0, T_0) effettua una trasformazione isobara in cui il volume cambia secondo la legge $V = V_0\,(1 + x)$. Determinare la legge che esprime il rapporto tra la variazione di entropia e la variazione dell'energia interna del gas $(\Delta S / \Delta U)$ in fuzione di x.

FISICA 1 - MATEMATICA

17-09-2013

1)

$$U_{iniz} = K - L_{attr} = \frac{1}{2}mv^2 + \left[mg\frac{h}{2}(\mu_1+\mu_2)\frac{1}{tg\alpha}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - \left[mg\frac{h}{2}(\mu_1+\mu_2)\frac{1}{tg\alpha}\right]$$

$$v^2 = gh \cdot \left[2-(\mu_1+\mu_2)\frac{1}{tg\alpha}\right]$$

$$v = \sqrt{gh\left[2-(\mu_1+\mu_2)\frac{1}{tg\alpha}\right]}$$

$$v = \sqrt{9{,}81\cdot 0{,}8\left(2-\frac{0{,}42}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$v = \sqrt{13{,}793} = 3{,}714 \quad m/s$$

2) $$U_{iniz} = mg\frac{L}{2} + 2\left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4}+L^2}-L\right)^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mv^2 = mgL + 2kL^2\left(\sqrt{5/4}-1\right)^2$$

$$v^2 = gL + 2\frac{k}{m}L^2\left(\sqrt{5/4}-1\right)^2$$

$$v = \sqrt{gL + 2\frac{k}{m}L^2\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right)^2}$$

$$v = \sqrt{9{,}81 + \frac{400}{0{,}25}\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right)^2} = \sqrt{32{,}10} = 5{,}67 \; m/s$$

3)

$$\frac{1}{2} m \left(v(x)\right)^2 = A \int_0^x (1-x)\, dx = A\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2} A x (2-x)$$

$$\left(v(x)\right)^2 = \frac{A}{m} x (2-x)$$

$$\frac{dv^2}{dx} = \frac{A}{m}(2-x-x) = \frac{2A}{m}(1-x) = 0 \implies x = 1$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{A}{m}}$$

si tratta di un moto armonico attorno al punto di equilibrio $x = 1$, soggetto ad una forza costante.

4) Si consideri l'impulso e il suo momento rispetto al punto di rotazione

$$I\omega_0 = \frac{2}{3} J_0 L \qquad I = \frac{1}{3} m_1 L^2 + m_2 L^2 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) L^2$$

$$I = 2 \text{ kg m}^2$$

$$\omega_0 = \frac{2}{3} \frac{J_0 L}{I} = \frac{2}{3} \frac{J_0 L}{\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) L^2} = \frac{2 J_0}{(m_1 + 3 m_2) L}$$

$$K_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) L^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)\frac{L^2\, 4 J_0^2}{(m_1 + 3m_2)^2 L^2}$$

$$K_0 = \frac{2}{3} \frac{J_0^2}{m_1 + 3 m_2}$$

Δ(Energia potenziale) con la sbarra orizzontale

$$\Delta U = m_1 g \frac{L}{2} + m_2 g L \leq K_0$$

$$\frac{1}{2} g L (m_1 + 2 m_2) \leq \frac{2}{3} \frac{J_0^2}{m_1 + 3 m_2}$$

$$J_0^2 \geq \frac{3}{4} g L (m_1 + 2m_2)(m_1 + 3m_2) = \frac{3}{4}\, 9{,}81\, (3+2)(3+3)$$

$$J_0^2 \geq 220{,}7 \qquad J_0 \geq 14{,}86 \text{ Ns}$$

5)

$$P_e = P_0 + \frac{mg}{S} \qquad P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} \qquad P_2 = P_0$$

$$V_1 = nR\,\frac{T_1}{P_1} \qquad V_2 = nR\,\frac{T_2}{P_2}$$

espansione adiabatica irreversibile $\quad Q = 0 \quad L = -\Delta U$

gas perfetto $\quad \Delta U = nC_v\,(T_2 - T_1) = -L = -P_0\,(V_2 - V_1)$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{nC_v}\left[-P_0\,(V_2 - V_1)\right] = -\frac{1}{C_v}\,R\,P_0\left(\frac{T_2}{P_2} - \frac{T_1}{P_1}\right)$$

$$T_2\left(1 + \frac{R}{C_v}\,P_0/P_2\right) = \frac{R}{C_v}\,P_0\,\frac{T_1}{P_1} + T_1$$

$$T_2 = T_1\,\frac{1 + \frac{R}{C_v}\frac{P_0}{P_1}}{1 + \frac{R}{C_v}\frac{P_0}{P_2}} = T_1\,\frac{1 + \frac{3}{2}\frac{P_0}{P_0 + mg/S}}{1 + \frac{3}{2}\frac{P_0}{P_0}}$$

$$T_2 = T_1\,\frac{2 + 3\,\frac{P_0}{P_0 + mg/S}}{5} = T_1\,\frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{mg}{S}/P_0}\right)$$

$$T_2 = T_1\;0{,}4\left(1 + 1{,}5\,\frac{1}{1 + 10^{-5}\,\frac{20 \times 9{,}81}{10^{-3}}}\right)$$

$$T_2 = 250 \times 0{,}4\left(1 + 1{,}5\,\frac{1}{1 + 1{,}962}\right) = 150{,}6\ \mathrm{K}$$

6)

Trasformazione isobara rev.

$$dQ = n\,C_p\,dT \qquad dS = \frac{dQ}{T} = n\,C_p\,\frac{dT}{T}$$

$$S(x) - S_0 = \Delta S = n\,C_p \ln\left(\frac{T(x)}{T_0}\right)$$

$$T(x) = \frac{P_0}{nR}\,V(x) \qquad T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$$

$$\Delta S = n\,C_p \ln\left(\frac{V(x)}{V_0}\right) = n\,C_p \ln(1+x)$$

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \qquad C_p = \frac{7}{2} R$$

$$\Delta S = \frac{7}{2}\,\frac{P_0 V_0}{T_0} \ln(1+x)$$

$$\Delta U = n\,C_v\,(T(x) - T_0) = n\,\frac{5}{2} R\,\frac{P_0 V_0}{nR}\,(1 + x - 1)$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} P_0 V_0\, x$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta U} = \frac{7}{2}\,\frac{P_0 V_0}{T_0} \ln(1+x)\;\frac{2}{5}\,\frac{\cancel{1}}{P_0 V_0\, x}\,,$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta U} = \frac{7}{5}\,\frac{1}{T_0}\,\frac{\ln(1+x)}{x}$$