

# **Esonero 20 Gennaio 2016**

Roberto Bonciani e Paolo Dore

*Corso di Fisica Generale 1*

*Università degli Studi di Roma “La Sapienza”*

*Anno Accademico 2015-2016*

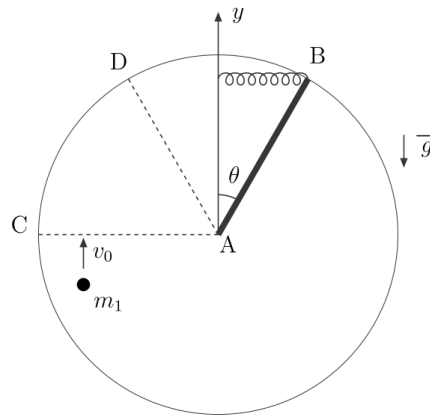
# Esonero 2 - Fisica Generale I per matematici

## 20 Gennaio 2015

R. Bonciani, P. Dore

*Il presente esonero NON sarà considerato superato se il punteggio di 15/30 sarà raggiunto con i soli esercizi di meccanica o con i soli esercizi di termodinamica. È obbligatorio affrontare entrambe le parti.*

### Esercizio 1



Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2l$  è incernierata al suo estremo  $A$  ed è vincolata a muoversi su un piano verticale, come mostrato in figura. L'altro estremo,  $B$ , è collegato all'asta verticale fissa  $Ay$  (asse delle  $y$ ) tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo nulla. Sia  $\theta$  l'angolo che l'asta forma con l'asse  $y$ .

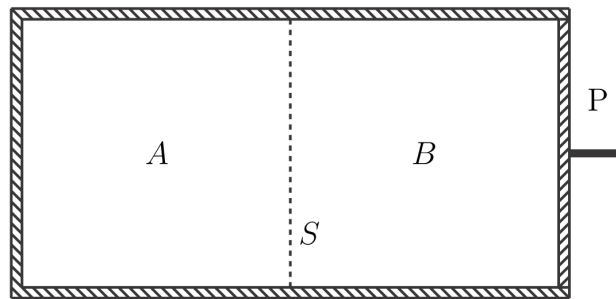
1. Determinare  $k$  affinché  $\theta_0 = \pi/6$  sia posizione di equilibrio. (4 punti)
2. Al tempo  $t = 0$  la molla viene recisa in  $B$  e l'asta si trova soggetta alla forza di gravità e ad un momento frenante costante di modulo  $\tau$  che agisce sulla cerniera in  $A$ . Determinare  $\tau$  sapendo che l'asta arriva alla posizione orizzontale  $\theta_1 = \frac{3}{2}\pi$  (punto  $C$ ) con velocità nulla. (5 punti)
3. Nell'istante in cui l'asta raggiunge con velocità nulla la posizione orizzontale, viene urtata in maniera totalmente anelastica da un proiettile di massa  $m_1$  che giunge dal basso e arriva sulla sbarretta con velocità  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{j}$ . L'urto avviene a distanza  $\frac{3}{2}l$  da  $A$ . Determinare  $v_0$  affinché la sbarretta (che è sempre soggetta anche a  $\tau$ , il cui valore è stato trovato nella domanda precedente) col proiettile attaccato arrivi in posizione  $\theta_2 = \frac{11}{6}\pi$ , cioè in posizione simmetrica rispetto a quella da cui è partita al tempo  $t = 0$  (punto  $D$ ). (6 punti)

Valori numerici:  $m = 240$  g;  $l = 80$  cm;  $m_1 = 20$  g.

## Esercizio 2

Una macchina di Carnot ideale  $\mathcal{C}$  lavora fra una sorgente calda a  $T_c = 400$  K e una sorgente fredda a  $T_f = 300$  K. La sorgente fredda è costituita da un sistema termodinamico  $\mathcal{X}$  con capacità termica molto grande, in maniera tale che qualunque sia la quantità di calore scambiata da  $\mathcal{X}$  la sua temperatura non vari apprezzabilmente e rimanga sempre pari a  $T_f$ . Sapendo che dopo un ciclo della macchina  $\mathcal{C}$  il sistema  $\mathcal{X}$  ha variato la propria entropia di  $\Delta S = 5$  J/K, calcolare la quantità di calore che  $\mathcal{C}$  assorbe dalla sorgente calda. (5 punti)

## Esercizio 3



Un cilindro a pareti isolanti di volume  $V_0$  è chiuso alla sua estremità da un pistone anch'esso isolante. Inizialmente, il volume  $V_0$  è diviso da un setto rigido  $S$  in due parti uguali,  $A$  e  $B$ . La parte  $A$  contiene una mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura di  $T_A = 27^\circ\text{C}$  (e volume  $V_A = V_0/2$ ). La parte  $B$ , anch'essa di volume  $V_B = V_0/2$ , è vuota. Ad un certo istante il setto  $S$  viene rimosso e il gas inizialmente racchiuso nella parte  $A$  compie un'espansione libera, occupando l'intero volume  $V_A + V_B = V_0$ . Successivamente, il gas viene compresso dal pistone  $P$  in maniera quasi-statica fino a riportarlo ad occupare il volume  $V_A = V_0/2$ . Disegnare le due trasformazioni nel piano di Clapeyron e determinare le corrispondenti variazioni di energia interna  $\Delta U$  e di entropia  $\Delta S$ . (5 punti)

## Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico è in equilibrio nello stato  $A$ , con  $T_A = 300$  K e  $V_A = 5$  l. Compiendo il lavoro  $L_0 = 1728$  J, si effettua una compressione isoterma reversibile che porta il gas ad occupare il volume  $V_B$ . Calcolare la quantità di calore  $Q_0$  che deve essere prelevata a volume costante dal gas per riportare la pressione al valore iniziale. (5 punti)

## Soluzione Esercizio 1

1. Per trovare la posizione di equilibrio basta applicare la seconda cardinale con centro in A. Si avrà:

$$2l \cos \theta_0 k(2l) \sin \theta_0 - l \sin \theta_0 mg = 0, \quad (1)$$

da cui, per  $\theta_0 \neq 0$ :

$$k = \frac{mg}{4l \cos \theta_0} = \frac{\sqrt{3} mg}{6 l} = 0.85 \text{ N/m}. \quad (2)$$

2. Si può utilizzare il teorema delle forze vive. L'energia cinetica dell'asta è nulla a  $t = 0$  ed è nuovamente nulla quando l'asta arriva con velocità nulla al punto C. Quindi la forza peso e l'attrito in A fanno lavoro tale che:

$$0 = L_{BC} = V(B) - V(C) - \int_B^C \tau d\theta = mgl \cos \theta_0 - \tau(\theta_1 - \theta_0), \quad (3)$$

da cui

$$\tau = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} mgl = 0.39 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (4)$$

3. Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto ad A. Per cui

$$mv_0 \frac{3}{2} l = I_A \omega, \quad (5)$$

da cui si ottiene un'espressione per la velocità angolare subito dopo l'urto

$$\omega = \frac{3mv_0 l}{2I_A}, \quad (6)$$

dove

$$I_A = \frac{9}{4} m_1 l^2 + \frac{4}{3} m l^2 = 0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (7)$$

Utilizzando ancora il teorema delle forze vive si ha:

$$L_{CD} = -\frac{1}{2} I_A \omega^2 \quad (8)$$

D'altra parte si ha anche:

$$L_{CD} = -mgl \cos \theta_2 - m_1 g \frac{3}{2} l \cos \theta_2 - \tau(\theta_2 - \theta_1) = -1.46 \text{ J}. \quad (9)$$

Sostituendo la 6 e la 9 nella 8 si ottiene infine:

$$v_0 = \frac{2\sqrt{-2I_A L_{CD}}}{3ml} = 2.8 \text{ m/s}. \quad (10)$$

## Soluzione Esercizio 2

Se  $Q_{ced}$  è la quantità di calore che la macchina  $\mathcal{C}$  cede alla sorgente fredda e  $Q_{ass}$  è quella che assorbe dalla sorgente calda, si avrà

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}, \quad (11)$$

ovvero

$$Q_{ass} = \frac{|Q_{ced}|}{1 - \eta}. \quad (12)$$

D'altronde si ha anche

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 \quad (13)$$

e quindi:

$$Q_{ass} = \frac{4}{3}|Q_{ced}|. \quad (14)$$

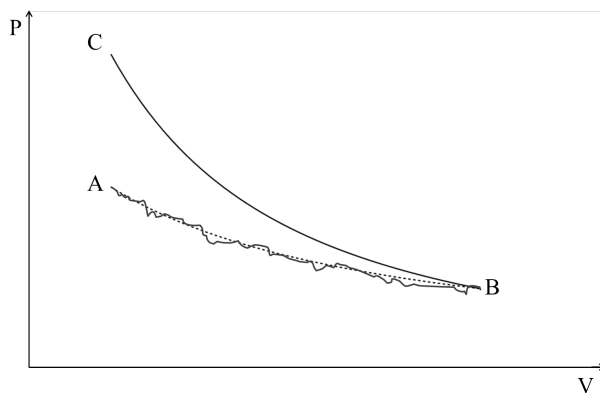
Per determinare  $|Q_{ced}|$  utilizziamo l'espressione dell'entropia. Assorbendo  $|Q_{ced}|$  il sistema  $\mathcal{X}$  aumenta la propria entropia di  $\Delta S$ , per cui si ha

$$|Q_{ced}| = T_f \Delta S. \quad (15)$$

Infine

$$Q_{ass} = \frac{4}{3}T_f \Delta S = 2000 \text{ J}. \quad (16)$$

## Soluzione Esercizio 3



Nell'espansione libera ( $A \rightarrow B$ ) si ha  $T_B = T_A$ , quindi  $\Delta U_{AB} = 0$ . Per il calcolo dell'entropia si può utilizzare la corrispondente isoterma reversibile:

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 2 = 5.76 \text{ J/K}. \quad (17)$$

La compressione  $B \rightarrow C$  è un'adiabatica reversibile:  $Q_{BC} = 0$ , quindi  $\Delta S_{BC} = 0$ . La variazione di energia interna è data da

$$\Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = nc_v(T_C - T_A) \quad (18)$$

Per calcolare  $T_C$  si utilizza la relazione, valida per le trasformazioni adiabatiche,

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad (19)$$

Poiché il gas è monoatomico  $\gamma = \frac{5}{3}$ , inoltre  $V_C = V_A$ ,  $T_B = T_A$  e  $V_B = 2V_A$ , si ottiene quindi

$$T_C = T_A 2^{\frac{2}{3}} = 476 \text{ K} \quad \rightarrow \quad \Delta U_{BC} = n c_v T_A (2^{\frac{2}{3}} - 1) = 2195 \text{ J}. \quad (20)$$

## Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato si ricava la pressione dello stato A:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 4.92 \text{ atm}. \quad (21)$$

Poiché il lavoro nella trasformazione isoterma è dato da

$$L_B = -L_0 = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (22)$$

si può ricavare il volume dello stato B:

$$V_B = V_A \exp\left(\frac{-L_0}{nRT_A}\right) = \frac{1}{2} V_A = 2.5 \text{ l}. \quad (23)$$

Infine si ricava la temperatura nello stato finale C:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_A V_B}{nR} = \frac{1}{2} \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{1}{2} T_A = 150 \text{ K}. \quad (24)$$

Nella trasformazione isocora  $L_{BC} = 0$ , quindi

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n c_v (T_C - T_B) = -\frac{1}{2} n c_v T_A \quad (25)$$

Infine

$$Q_0 = -Q_{BC} = \frac{1}{2} n c_v T_A = 1870 \text{ J}. \quad (26)$$