

Compito 21 Giugno 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

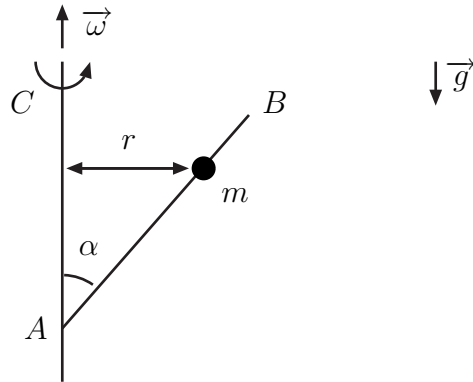
Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici

21 Giugno 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

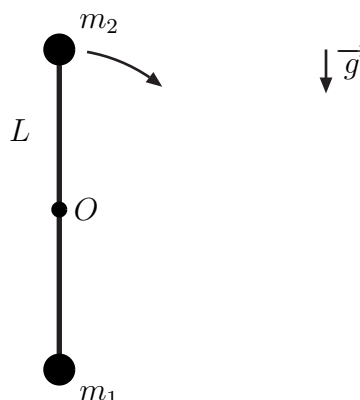


Un anellino di massa m è infilato in un'asta AB inclinata di un angolo α rispetto alla verticale e collegata rigidamente tramite il punto A ad un'altra asta verticale, AC, che ruota a velocità angolare costante ω (vedi figura).

1. Fra anello (di dimensioni trascurabili e quindi da considerare puntiforme) e asta non c'è attrito (vincolo liscio). Trovare il valore di $\omega = \omega_0$, per il quale l'anello m stia in equilibrio a distanza $r = r_0$ dall'asta verticale. (4 punti)
2. Fra anello e asta c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.6$. Trovare per quali valori di ω l'anello m rimane in equilibrio a distanza r_0 dalla verticale. (4 punti)
3. Nel caso di vincolo liscio si fa ruotare il sistema a $\omega = 2\omega_0$ con un motore che è in grado di assicurare velocità angolare costante qualunque cosa succeda. Lasciando l'anello da fermo in $r = r_0$ trovare la sua equazione di moto nel sistema di riferimento rotante. (2 punti)

Dati numerici: $|\vec{g}| = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $r_0 = 20 \text{ cm}$, $\alpha = \pi/4$, $m = 500 \text{ g}$.

Esercizio 2



Un manubrio è costituito da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2L$ ai capi della quale sono fissate due masse, m_1 e $m_2 > m_1$. Il sistema è disposto su un piano verticale ed è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un'asse orizzontale passante per il centro O dell'asta (il sistema è bi-dimensionale). Il sistema è inizialmente disposto nella posizione di equilibrio instabile (con la massa m_2 alla quota più alta) ed una piccola perturbazione ne provoca la rotazione.

1. Calcolare la posizione iniziale del centro di massa del sistema. (*3 punti*)
2. Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per O . (*3 punti*)
3. Calcolare velocità e accelerazione del centro di massa quando il sistema passa per la posizione di equilibrio stabile (massa m_2 alla quota più bassa). (*4 punti*)

Dati numerici: $m = 2$ kg, $m_1 = m = 2$ kg, $m_2 = 3m = 6$ kg, $L = 80$ cm.

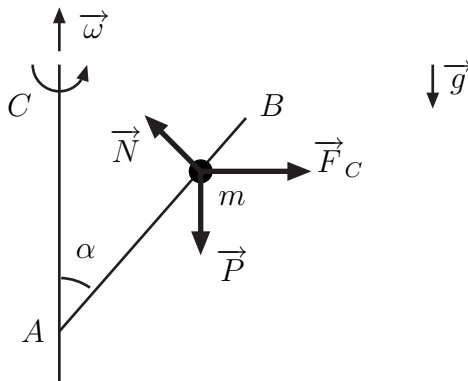
Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico è inizialmente in equilibrio nello stato A , alla temperatura $T_A = 300^\circ\text{K}$. Il gas subisce una trasformazione isocora quasi statica che lo porta a raddoppiare la pressione, seguita da una trasformazione adiabatica quasi statica con la quale il gas è riportato alla pressione iniziale. Infine, una trasformazione isobara quasi statica riporta il gas nello stato iniziale A .

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron. (*3 punti*)
2. Calcolarne il rendimento. (*7 punti*)

Soluzione Esercizio 1

1. Ci mettiamo nel sistema di riferimento solidale con l'asta AC. In questo SdR l'anello di massa m è soggetto alla forza peso e alla forza centrifuga, oltre che alla reazione vincolare che può essere solo perpendicolare all'asta AB.



Prendendo un SdR che abbia l'asse verticale orientata come ω e quella orizzontale perpendicolare ad AC, si ha, imponendo le condizioni di equilibrio:

$$F_C - N \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$N \sin \alpha - P = 0, \quad (2)$$

dove $F_C = m\omega^2 r$, se r è la distanza di m dall'asse di rotazione, e $P = mg$.

Posto $r = r_0$, si ha:

$$N = \frac{mg}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{r_0} \cot \alpha, \quad (4)$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0} \cot \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{\frac{g}{r_0}} = 7 \text{ s}^{-1}. \quad (5)$$

2. Nel caso con attrito abbiamo anche una reazione vincolare tangente all'asta AB, $\vec{F}_t$, tale che

$$|\vec{F}_t| \leq \mu_S |\vec{N}|. \quad (6)$$

I valori di ω minimo e massimo, ω_{min} e ω_{max} , si otterranno rispettivamente quando $|\vec{F}_t| = \mu_S |\vec{N}|$ e $\vec{F}_t$ punta verso B e quando invece, con $|\vec{F}_t| = \mu_S |\vec{N}|$, $\vec{F}_t$ punta verso A.

Nel primo caso abbiamo:

$$0 = F_C + F_t \sin \alpha - N \cos \alpha, \quad (7)$$

$$0 = N \sin \alpha + F_t \cos \alpha - mg, \quad (8)$$

ovvero

$$0 = m\omega^2 r + \mu_S N \sin \alpha - N \cos \alpha, \quad (9)$$

$$0 = N \sin \alpha + \mu_S N \cos \alpha - mg. \quad (10)$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$N = \frac{mg}{\sin \alpha + \mu_S \cos \alpha}, \quad (11)$$

e sostituendola nella prima, ricordando che $\alpha = \pi/4$ si ottiene:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{\cos \alpha - \mu_S \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_S \cos \alpha} \frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1 - \mu_S}{1 + \mu_S} \frac{g}{r}} = 3.74 \text{ s}^{-1}. \quad (12)$$

Per trovare ω_{max} invece abbiamo:

$$0 = F_C - F_t \sin \alpha - N \cos \alpha, \quad (13)$$

$$0 = N \sin \alpha - F_t \cos \alpha - mg, \quad (14)$$

ovvero

$$0 = m\omega^2 r - \mu_S N \sin \alpha - N \cos \alpha, \quad (15)$$

$$0 = N \sin \alpha - \mu_S N \cos \alpha - mg, \quad (16)$$

e quindi

$$N = \frac{mg}{\sin \alpha - \mu_S \cos \alpha}, \quad (17)$$

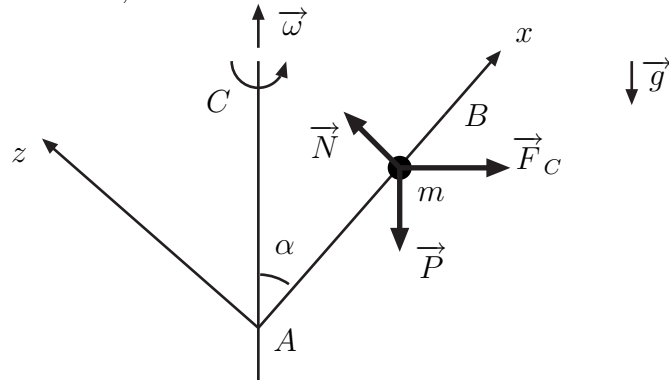
e

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + \mu_S \sin \alpha}{\sin \alpha - \mu_S \cos \alpha} \frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1 + \mu_S}{1 - \mu_S} \frac{g}{r}} = 13.10 \text{ s}^{-1}. \quad (18)$$

In totale:

$$3.74 \text{ s}^{-1} \leq \omega \leq 13.10 \text{ s}^{-1}. \quad (19)$$

3. Il moto nel SdR rotante (solidale con l'asta) è unidimensionale lungo l'asta AB. Prendiamo questa come coordinata x , con centro in A.



Le forze che agiscono sull'anello m lungo tale direzione sono la componente x della forza centrifuga e della forza peso.

Si ha

$$m\ddot{x} = m\omega^2 \sin^2 \alpha x - mg \cos \alpha = 4m\omega_0^2 \sin^2 \alpha x - mg \cos \alpha, \quad (20)$$

dove abbiamo esplicitato la condizione data dal problema $\omega = 2\omega_0$.

Riscrivendo la (20) si trova la seguente equazione del moto, indipendente dalla massa

$$\ddot{x} - 2\omega_0^2 x = -g \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (21)$$

NB. Il moto si svolge solo lungo la coordinata x . Per trattare il problema nella sua completezza, bisognerebbe tener conto anche della componente delle forze agenti su m perpendicolare a x , ma sullo stesso piano (coordinata z), che si dovranno fare equilibrio, e anche a quella perpendicolare al piano costituito dalla verticale e dall'asta AB (coordinata y).

Lungo la coordinata z avremo

$$N = m\omega^2 \sin \alpha x \cos \alpha + mg \sin \alpha. \quad (22)$$

Lungo la coordinata y , invece, la reazione normale del vincolo dovrà bilanciare la forza di Coriolis che agisce sull'anello m per il fatto stesso che si muove sulle x . Ciò fa sì che per mantenere una velocità angolare costante durante il moto di m sulle x , il motore che fa girare l'asta debba far lavoro.

Soluzione Esercizio 2

1. Il centro di massa del manubrio si calcola tenendo conto delle sue componenti. L'asta ha il centro di massa in O. Quindi si ha

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 L - m_1 L}{m + m_1 + m_2} = \frac{2}{5} L = 32 \text{ cm}. \quad (23)$$

2. Il momento d'inerzia del manubrio rispetto all'asse passante per O si compone di tre pezzi: il momento d'inerzia della sbarretta I_{sb} e quello delle due masse I_{m_1} e I_{m_2} . Si ha:

$$I_O = I_{sb} + I_{m_1} + I_{m_2} = m \frac{(2L)^2}{12} + L^2(m_1 + m_2) = \frac{13}{3} mL^2 = 5.55 \text{ kg m}^2. \quad (24)$$

3. Si può risolvere con l'energia. Nella configurazione iniziale il manubrio ha tutta energia potenziale dovuta alla sua energia gravitazionale. Si avrà

$$U_0 = 5mg \frac{2}{5} L = 2mgL = 31.36 \text{ Nm}. \quad (25)$$

Nella configurazione di equilibrio stabile, l'energia del manubrio sarà data dalla sua energia cinetica e da quella potenziale:

$$U = -5mg\frac{2}{5}L = -2mgL = -31.36 \text{ Nm}, \quad (26)$$

$$T = \frac{1}{2}I_0\omega^2, \quad (27)$$

dove ω è la velocità angolare del manubrio nell'istante in cui passa dalla configurazione di equilibrio stabile. Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 - 5mg\frac{2}{5}L = 5mg\frac{2}{5}L, \quad (28)$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{8mgL}{I_0}} = \sqrt{\frac{24g}{13L}} = 4.76 \text{ s}^{-1}. \quad (29)$$

La velocità e l'accelerazione del centro di massa saranno date da (moto circolare):

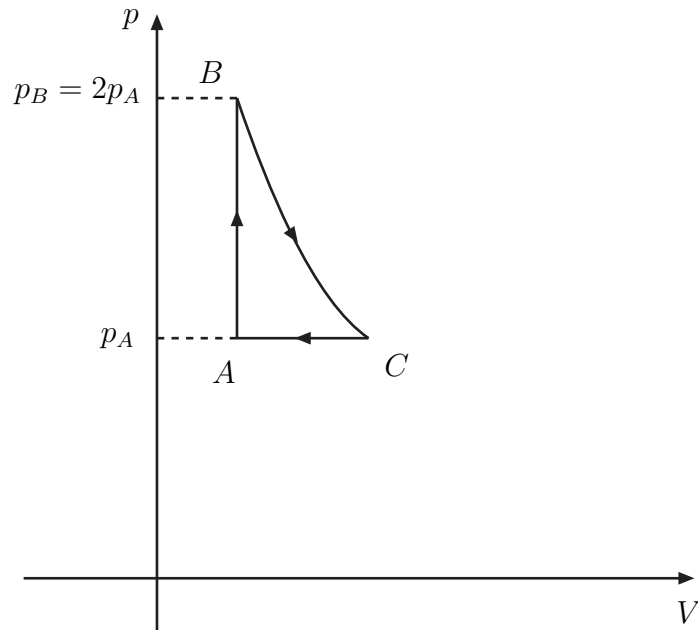
$$v_{cm} = \omega\frac{2}{5}L = 1.52 \text{ m/s}, \quad (30)$$

$$a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{r} = \frac{4}{25}\omega^2L^2\frac{5}{2L} = \frac{2}{5}\omega^2L = 7.24 \text{ m s}^{-2}, \quad (31)$$

dove abbiamo considerato che nel punto di equilibrio stabile l'unica componente non nulla dell'accelerazione è quella radiale. La velocità v_{cm} sarà diretta tangenzialmente alla circonferenza che descrive il centro di massa nel suo moto (quindi in particolare sarà orizzontale con verso da destra verso sinistra), mentre l'accelerazione sarà radiale e diretta verso il centro.

Soluzione Esercizio 3

1. Il ciclo nel piano di Clapeyron è:



2. In A scriviamo l'equazione del gas perfetto:

$$p_A V_A = RT_A. \quad (32)$$

In B analogamente abbiamo

$$p_B V_B = RT_B, \quad (33)$$

e sapendo che $p_B = 2p_A$ si ottiene

$$T_B = 2T_A = 600^\circ\text{K}. \quad (34)$$

Per l'adiabatica quasi statica valgono le formule di Poisson, quindi:

$$p_B V_B^\gamma = p_A V_C^\gamma, \quad (35)$$

con $\gamma = 5/3$, nel caso monoatomico. Allora

$$V_C = 2^{\frac{1}{\gamma}} V_A, \quad (36)$$

e

$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{p_A V_A}{R} 2^{\frac{1}{\gamma}} = T_A 2^{\frac{3}{5}} = 454.7^\circ\text{K}. \quad (37)$$

Il sistema cede calore nella trasformazione CA e acquista calore nella AB.

Il rendimento è definito come

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ceduto}|}{Q_{assorbito}} = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}}. \quad (38)$$

Lungo l'isocora, siccome il volume rimane costante, applicando il Primo Principio si ottiene:

$$\delta Q = dU + p dV = dU, \quad (39)$$

e quindi

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = c_V (T_B - T_A) = \frac{3}{2} R (T_B - T_A). \quad (40)$$

Lungo l'isobara invece si ha

$$\delta Q = dH - V dp = dH, \quad (41)$$

e quindi

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = c_p (T_A - T_C) = -\frac{5}{2} R (T_C - T_A). \quad (42)$$

Infine, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{5 (T_C - T_A)}{3 (T_B - T_A)} = 1 - \frac{5}{3} (2^{\frac{3}{5}} - 1) = 0.14. \quad (43)$$