

Compito 9 Settembre 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

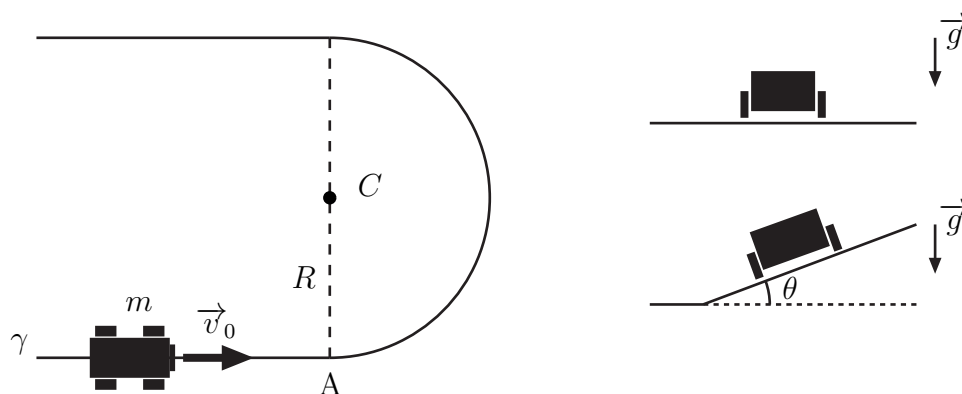
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici

9 Settembre 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

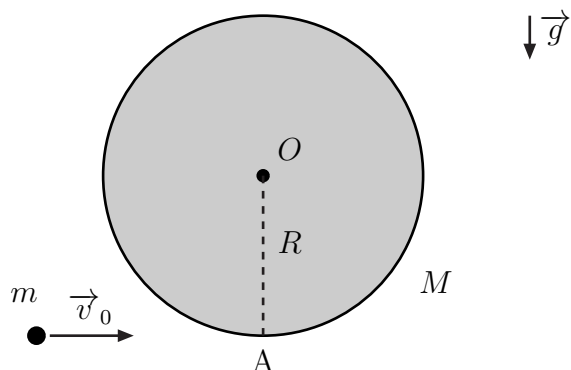


Un'auto (che per i nostri scopi può essere approssimata ad un punto materiale) di massa m procede di moto uniforme sulla traiettoria piana γ (vedi figura di sinistra, dove la traiettoria piana è vista dall'alto) con velocità in modulo pari a v_0 . In A entra in una curva semicircolare di raggio R e centro C .

1. Supponendo che il fondo stradale lungo la curva sia orizzontale (vedi figura in alto a destra), quale deve essere il coefficiente d'attrito minimo μ_0 affinché l'auto rimanga, senza derapare, sulla curva?
2. Supponiamo adesso che il coefficiente d'attrito fra auto e asfalto sia μ_1 e che il modulo della velocità alla quale l'auto procede sia v_1 . Trovare la pendenza minima della strada lungo la curva che faccia in modo da far percorrere all'auto la curva stessa.

Dati numerici: $v_0 = 1$ m/s, $R = 60$ cm, $m = 1$ kg, $\mu_1 = 0.2$, $v_1 = 2$ m/s.

Esercizio 2



Un disco omogeneo di massa M , raggio R è vincolato a ruotare senza attrito attorno al centro O , su un piano verticale, in presenza di gravità ed è fermo quando viene urtato anelasticamente da un proiettile di massa m e velocità $\vec{v}_0$, diretta come in figura. Nell'urto, il proiettile si conficca sul bordo del disco, nel punto A , a distanza R dal centro O e lungo la verticale che passa per O e non se ne distacca più.

1. Si calcoli la velocità angolare del sistema disco + proiettile subito dopo l'urto anelastico.
2. Qual'è il valore minimo di v_0 , v_{0min} , affinché il sistema compia dopo l'urto una rotazione di almeno π (proiettile che raggiunge la posizione verticale)?

Dati numerici: $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $R = 60 \text{ cm}$, $m = 0.1 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$.

Esercizio 3

Una massa di 9 g d'acqua (corrispondente ad un numero di moli $n = 0.5$) alla temperatura iniziale di $T_i = 20^\circ\text{C}$ viene trasformata in vapore alla temperatura finale $T_f = 300^\circ\text{C}$. Definendo la temperatura intermedia $T_0 = 100^\circ\text{C}$, si assumano i seguenti punti:

- tutte le trasformazioni avvengono a pressione atmosferica (costante);
- nel riscaldamento fra T_i e T_0 l'acqua non varia apprezzabilmente di volume ed il suo calore specifico rimane costante, pari a $c_V = 1 \text{ cal}/(\text{g } ^\circ\text{K})$;
- a T_0 il calore latente di evaporazione dell'acqua è $\lambda = 328 \text{ cal/g}$;
- nel riscaldamento fra T_0 e T_f il calore specifico molare del vapore acqueo a pressione costante varia secondo la legge $c_p = a + bT + cT^2$, dove $a = 8.8 \text{ cal}/(\text{mol } ^\circ\text{K})$, $b = -1.9 \cdot 10^{-3} \text{ cal}/(\text{mol } ^\circ\text{K}^2)$, $c = -2.2 \cdot 10^{-6} \text{ cal}/(\text{mol } ^\circ\text{K}^3)$.

Calcolare:

1. le quantità di calore Q_1 , Q_2 , Q_3 scambiate dal sistema nelle tre trasformazioni;
2. la variazione di entropia del sistema nel passaggio da T_i a T_f .

Soluzione Esercizio 1

1. La forza centripeta che tiene l'auto sulla curva circolare è la forza d'attrito statico e deve avere modulo

$$f_c = m \frac{v_0^2}{R} = 1.67 \text{ N} . \quad (1)$$

Siccome si tratta di attrito statico, si ha

$$f_c \leq \mu_S N , \quad (2)$$

dove $N = mg$. In totale

$$m \frac{v_0^2}{R} \leq \mu_S N = \mu_S mg , \quad (3)$$

e quindi

$$\mu_S \geq \mu_{S \min} = \frac{v_0^2}{gR} = 0.17 . \quad (4)$$

2. Conviene ragionare in un sistema di riferimento (non inerziale) centrato in C e che ruoti solidalmente all'auto. In tale sistema dobbiamo imporre l'annullarsi delle forze che agiscono sull'auto. Prendiamo l'asse delle x orizzontale con verso uscente da C e l'asse delle y verticale. Abbiamo:

$$f_c - N \sin \theta - f_t \cos \theta = 0 , \quad (5)$$

$$N \cos \theta - mg - f_t \sin \theta = 0 . \quad (6)$$

La situazione di minimo θ corrisponde all'avere la forza d'attrito (statico) al suo massimo valore

$$f_t = \mu_1 N . \quad (7)$$

Inoltre si ha

$$f_c = m \frac{v_1^2}{R} = 6.67 \text{ N} . \quad (8)$$

Risolviamo il sistema (5,6) per ottenere N e θ . Dalla seconda equazione otteniamo

$$N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} , \quad (9)$$

che sostituita nella prima dà

$$f_c - mg \frac{\sin \theta + \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} = 0 . \quad (10)$$

Escludiamo il valore per cui si annulla il denominatore della (10):

$$\tan \theta = \frac{1}{\mu_1} = 5 , \quad (11)$$

ovvero

$$\theta \neq \arctan 5 = 1.37 = 78.69^\circ . \quad (12)$$

Poniamo

$$K_c = \frac{f_c}{mg} = 0.68. \quad (13)$$

L'Eq. (10) diventa

$$K_c - \frac{\sin \theta + \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} = 0, \quad (14)$$

ovvero

$$(K_c - \mu_1) \cos \theta - (K_c \mu_1 + 1) \sin \theta = 0, \quad (15)$$

che ammette la soluzione

$$\theta = \arctan \frac{(K_c - \mu_1)}{(K_c \mu_1 + 1)} = 0.40 = 22.91^\circ, \quad (16)$$

che rispetta il vincolo in Eq. (12).

Soluzione Esercizio 2

1. L'urto è anelastico e quindi l'unica cosa che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto a O . In O , infatti, sono concentrate le possibili reazioni vincolari e prendendo O come centro di riduzione, queste non danno contributo. Prima dell'urto si ha

$$L_i = m v_0 R, \quad (17)$$

e dopo l'urto si ha

$$L_f = I_0 \omega_0 + m R^2 \omega = (I_0 + m R^2) \omega, \quad (18)$$

dove il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare al piano del moto passante per il centro O è:

$$I_O = \frac{1}{2} M R^2. \quad (19)$$

Siccome $L_i = L_f$, si trova:

$$\omega = \frac{m v_0 R}{(I_0 + m R^2)} = \frac{2m v_0}{(M + 2m) R} = 2.78 \text{ s}^{-1}. \quad (20)$$

2. Dopo l'urto il sistema è unito e parte con velocità angolare pari ad ω_0 . Siccome il vincolo è liscio e l'unica forza in gioco è la forza peso, che è conservativa, si può usare la conservazione dell'energia per determinare il valore minimo di v_0 .

All'istante iniziale abbiamo solo energia cinetica

$$E_i = T_0 = \frac{1}{2} \tilde{I}_0 \omega_0^2, \quad (21)$$

dove

$$\tilde{I}_0 = I_0 + m R^2 = \left(\frac{1}{2} M + m \right) R^2. \quad (22)$$

Possiamo prendere come valore minimo di v_0 , e quindi di ω_0 , quello che fa sì che il sistema si fermi esattamente dopo aver fatto un giro di π . In quella situazione l'energia cinetica è nulla e abbiamo solo energia potenziale. Il disco non subisce variazioni di energia potenziale, quindi è solo la massa m a dover essere contata:

$$E_f = V_\pi = 2mgR. \quad (23)$$

Per cui

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}M + m \right) R^2 \omega_{0min}^2 = 2mgR. \quad (24)$$

Si ricava allora:

$$\omega_{0min} = \pm \sqrt{\frac{8mg}{(M + 2m)R}} = 3.3 \text{ s}^{-1} \quad (25)$$

dove abbiamo scelto il senso positivo come antiorario, e si deve avere $\omega > \omega_{0min}$.

Usando l'Eq. (20), si ha quindi:

$$v_{0min} = \frac{(M + 2m)R}{2m} \omega_{0min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2gR(M + 2m)}{m}} = 11.89 \text{ m/s}. \quad (26)$$

Soluzione Esercizio 3

Dividiamo il processo in tre parti: *i*) l'acqua viene portata dalla temperatura T_i alla temperatura T_0 ; *ii*) tutta la quantità d'acqua presente subisce una transizione di fase da liquido a vapore, alla temperatura T_0 ; *iii*) una volta che tutta l'acqua è evaporata, il vapore passa dalla temperatura T_0 alla T_f .

- *i*) Durante la prima trasformazione il volume dell'acqua non varia apprezzabilmente. Quindi non si fa lavoro meccanico e tutta l'energia spesa per riscaldare l'acqua va sotto forma di energia interna dell'acqua stessa. Si ha

$$Q_1 = \int_{T_i}^{T_0} mc_V dT = mc_V(T_0 - T_i) = 720 \text{ cal} = 3014 \text{ J}. \quad (27)$$

- *ii*) La seconda trasformazione è una transizione di fase. Dato quindi il calore latente λ , si ha

$$Q_2 = \lambda m = 2952 \text{ cal} = 12356 \text{ J}. \quad (28)$$

- *iii*) Nella terza trasformazione si riscalda il gas tenendolo a pressione costante. La quantità di calore fornita sarà quindi

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_{T_0}^{T_f} nc_p(T) dT = n \int_{T_0}^{T_f} (a + bT + cT^2) dT \\ &= na(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nb(T_f^2 - T_0^2) + \frac{1}{3}nc(T_f^3 - T_0^3) = 740 \text{ cal} = 3098 \text{ J} \end{aligned} \quad (29)$$

Per quanto riguarda le entropie, quindi, abbiamo:

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_0} \frac{dQ}{T} = mc_V \int_{T_i}^{T_0} \frac{dT}{T} = mc_V \ln \frac{T_0}{T_i} = 2.17 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 9.09 \text{ J/}^\circ\text{K}, \quad (30)$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_0} = 7.91 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 33.11 \text{ J/}^\circ\text{K}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} n c_p(T) \frac{dT}{T} = n \int_{T_0}^{T_f} \left(\frac{a}{T} + b + cT \right) dT \\ &= na \ln \frac{T_f}{T_0} + nb(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nc(T_f^2 - T_0^2) = 1.59 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 6.68 \text{ J/}^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (32)$$

e quindi

$$\Delta S_{if} = 11.67 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 48.88 \text{ J/}^\circ\text{K}. \quad (33)$$