

Esame 3 Febbraio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

Anno Accademico 2016-2017

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esame - Fisica Generale I

3 Febbraio 2017

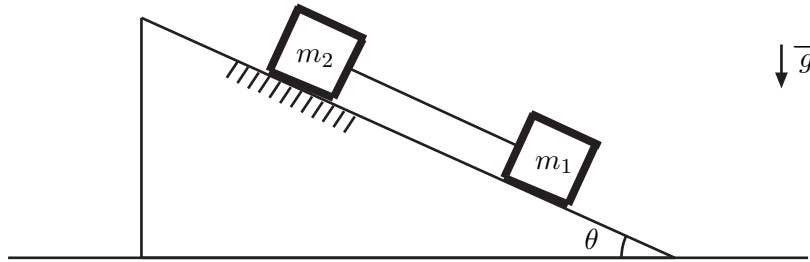
R. Bonciani, P. Dore

Regole per lo scritto

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 (contrassegnati con *) in 3h.

Esercizio 1 *

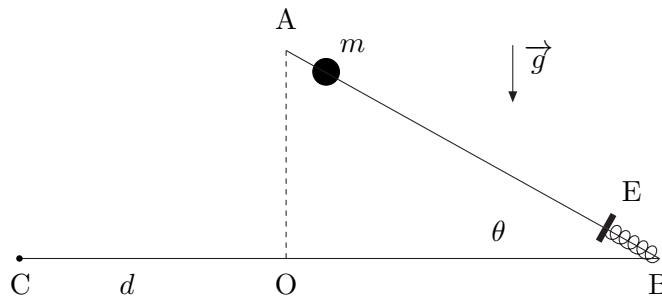
Due corpi di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 1$ kg, posti su un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, sono legati fra loro da una fune ideale. Il corpo m_1 è libero di scorrere senza attrito sul piano inclinato, mentre fra m_2 e il piano c'è attrito con coefficiente $\mu_d = 0.3$.



1. Calcolare l'accelerazione di m_2 .
2. Se ad m_2 viene applicata una forza costante e in direzione parallela al piano, calcolare il valore di F per il quale il sistema si muove verso l'alto con velocità costante.
3. Calcolare il valore della tensione della fune nei due casi.

Esercizio 2

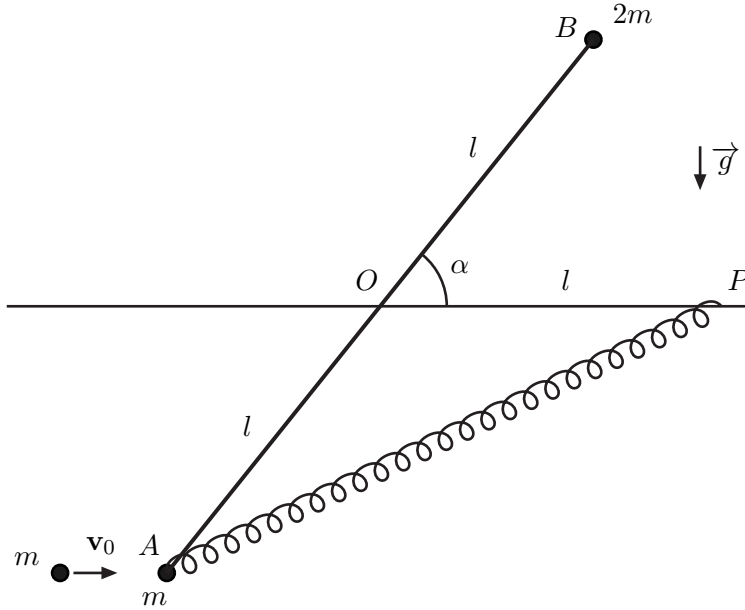
Un anellino di massa $m = 200$ g viene infilato in una guida filiforme scabra AB di lunghezza $L = 1$ m, aperta all'estremo A e inclinata di $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Fra anello e guida c'è attrito dinamico con coefficiente $\mu_d = 0.2$. In fondo alla guida è posta una molla di costante elastica $k = 90$ N/m e lunghezza di riposo $l_0 = 30$ cm. All'istante iniziale la molla è in equilibrio ($EB = l_0$). L'anello parte da A con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 5$ m/s, diretta lungo la guida verso il punto B .



1. Calcolare la compressione massima della molla Δl .
2. Calcolare la velocità v_1 con cui l'anello ritorna in A dopo essere stato respinto verso l'alto dalla molla.
3. Calcolare la distanza d da O a cui cade l'anello (dopo aver lasciato il punto A , il moto dell'anello prosegue nel vuoto).

Esercizio 3 *

Un manubrio è costituito da un'asta omogenea e da due punti materiali fissati ai suoi estremi A e B . L'asta, che ha massa $m = 40$ g e lunghezza $2l$, con $l = 20$ cm, è incernierata nel suo punto medio O , fissato su un piano verticale, attorno al quale può ruotare senza attrito. Il punto materiale fissato in A ha massa m , mentre quello in B ha massa $2m$. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile ($l_0 = 0$) collega l'estremità A al punto P sull'asse orizzontale passante per O . Il punto P dista l da O .



1. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'asta forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con l'asse orizzontale OP . Calcolare la costante elastica della molla.
2. A $t = 0$ un punto materiale di massa m urta il punto A con velocità $\mathbf{v}_0$ diretta orizzontalmente come in figura e di modulo $v_0 = 10$ m/s. L'urto è perfettamente anelastico e avviene in un tempo trascurabile. Calcolare la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto.

Esercizio 4 *

Due moli di gas perfetto biatomico compiono il seguente ciclo: dallo stato iniziale A con $p_A = 2$ atm e $V_A = 10$ l il sistema compie una trasformazione IRREVERSIBILE che lo porta nello stato B , con $p_B = 2p_A$ e $V_B = V_A/2$; una isobara REVERSIBILE porta poi il sistema nello stato C , con $V_C = V_A$ e infine il sistema torna nello stato A con una trasformazione isocora REVERSIBILE. Il lavoro totale compiuto nel ciclo è $L_{TOT} = 15$ l·atm.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron.
2. Calcolare il calore Q_{AB} scambiato nella trasformazione irreversibile da A a B .
3. Calcolare il rendimento η del ciclo.
4. Calcolare la variazione di entropia ΔS_{AB} nella trasformazione irreversibile da A a B .

Soluzione esercizio 1

1. Poiché sono collegati dalla fune, i due corpi procedono con la stessa accelerazione a . Scegliendo l'asse x orientato verso il basso, le equazioni del moto dei due corpi sono:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \theta - T \\ m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu_d m_2 g \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

Sommando le due equazioni si ricava:

$$(m_1 + m_2) a = [(m_1 + m_2) \sin \theta - \mu_d m_2 \cos \theta] g \quad (2)$$

e infine

$$a = g \left[\sin \theta - \mu_d \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \theta \right] = 4.27 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

2. Poiché si muovono con velocità costante i due corpi hanno accelerazione nulla. Scegliendo l'asse x orientato verso l'alto, le equazioni del moto dei due corpi in questo caso sono:

$$\begin{cases} T' - m_1 g \sin \theta = 0 \\ F - m_2 g \sin \theta - \mu_d m_2 g \cos \theta - T' = 0 \end{cases} \quad (4)$$

da cui:

$$F = [(m_1 + m_2) \sin \theta + \mu_d m_2 \cos \theta] g = 22.17 \text{ N} \quad (5)$$

3. Nel primo caso la tensione T si ricava sostituendo il valore di a , calcolato nel punto 1, nell'equazione del moto (1) per il corpo m_1 :

$$T = m_1 (g \sin \theta - a) = 1.91 \text{ N} \quad (6)$$

Nel secondo caso la tensione T' si ricava direttamente dall'equazione del moto (4) per il corpo m_1 :

$$T' = m_1 g \sin \theta = 14.72 \text{ N} \quad (7)$$

Soluzione esercizio 2

1. Per determinare la compressione massima della molla possiamo utilizzare il teorema delle forze vive. Consideriamo il tratto discendente, da quando l'anello parte da A con velocità iniziale v_0 fino a quando si ferma con la molla massimamente compressa in E' a distanza $l_0 - \Delta l$ dal punto B .

Si ha

$$L_{AE'} = -\frac{1}{2} m v_0^2 = 2.5 \text{ J}. \quad (8)$$

D'altra parte, si ha anche

$$L_{AE'} = V(A) - V(E') + \int_A^{E'} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}, \quad (9)$$

$$= mgL \sin \theta - mg(l_0 - \Delta l) \sin \theta - \frac{1}{2} k \Delta l^2 - N \mu_d [L - (l_0 - \Delta l)]. \quad (10)$$

Uguagliando le due relazioni si ottiene

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = mgL \sin \theta - mg(l_0 - \Delta l) \sin \theta - \frac{1}{2} k \Delta l^2 - N \mu_d [L - (l_0 - \Delta l)], \quad (11)$$

ovvero

$$\Delta l^2 - 2 \left(\frac{g}{\omega^2} \sin \theta - \frac{N\mu_d}{k} \right) \Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - 2 \left(\frac{g}{\omega^2} \sin \theta - \frac{N\mu_d}{k} \right) (L - l_0) = 0. \quad (12)$$

Per trovare N si utilizza il secondo principio della dinamica in direzione perpendicolare al piano inclinato, ricavando

$$N = mg \cos \theta = 1.7 \text{ N}, \quad (13)$$

che sostituita in (12) dà:

$$\Delta l^2 - \frac{g}{\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) \Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) (L - l_0) = 0, \quad (14)$$

dove abbiamo esplicitato il valore di $\sin(\pi/6) = 1/2$ e di $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

L'Eq. (14) ha due soluzioni

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) \pm \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4} (1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) (L - l_0)}. \quad (15)$$

Prendiamo la soluzione positiva, e quindi

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) + \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4} (1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2} (1 - \sqrt{3}\mu_d) (L - l_0)} = 26 \text{ cm}. \quad (16)$$

2. La velocità v_1 con cui l'anello torna in A sarà data sempre dal teorema delle forze vive da A in A :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -2N\mu_d [L - (l_0 - \Delta l)], \quad (17)$$

ovvero

$$v_1^2 = v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d (L - l_0 + \Delta l), \quad (18)$$

quindi

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d (L - l_0 + \Delta l)} = 4.7 \text{ m/s}. \quad (19)$$

3. Da A a C il problema si riduce ad un problema di balistica. Prendendo come origine degli assi cartesiani il punto O , l'anello parte da $(0, L \sin \theta)$ con velocità iniziale (v_{1x}, v_{1y}) con $v_{1x} = -v_1 \cos \theta$ e $v_{1y} = v_1 \sin \theta$.

La soluzione generale del moto è

$$\begin{cases} x(t) = v_{1x}t + x(0), \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{1y}t + y(0), \end{cases} \quad (20)$$

e mettendo le condizioni iniziali si trova l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{g}{2v_1^2 \cos^2 \theta} x^2 - \tan \theta x + L \sin \theta. \quad (21)$$

Imponendo il passaggio da $(-d, 0)$ (con $d > 0$), ed esplicitando i valori trigonometrici, si ottiene:

$$0 = -\frac{2gd^2}{3v_1^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}d + \frac{L}{2}, \quad (22)$$

cioè l'equazione del secondo ordine

$$d^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_1^2}{g} d - \frac{3}{4} \frac{Lv_1^2}{g} = 0. \quad (23)$$

L'Eq. (23) ha due soluzioni delle quali dobbiamo prendere quella positiva:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{v_1^2}{g} + \sqrt{\frac{3}{16} \frac{v_1^4}{g^2} + \frac{3}{4} \frac{Lv_1^2}{g}} = 2.6 \text{ m} \quad (24)$$

Soluzione esercizio 3

1. Se BOP è l'angolo α , si avrà $AOP = \pi - \alpha$ e

$$OAP = OPA = \frac{1}{2}(\pi - AOP) = \frac{\alpha}{2}. \quad (25)$$

Se $\alpha = \pi/3$, quindi, si ha $OAP = OPA = \pi/6$.

Si può trovare la soluzione al primo quesito utilizzando la seconda cardinale oppure con l'energia.

Seconda Cardinale

Per applicare la seconda cardinale dobbiamo trovare il valore del modulo della forza elastica $\mathbf{F}_e$ applicata in A . La lunghezza $AP = L$ sarà data da

$$L = 2l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = l\sqrt{3} = 34.6 \text{ cm}. \quad (26)$$

Quindi il modulo della forza elastica, applicata in A verso P , è

$$F_e = kL = kl\sqrt{3}. \quad (27)$$

Scrivendo la seconda cardinale della statica con centro di riduzione in O , si ha

$$mgl \cos \alpha + lF_e \sin \frac{\alpha}{2} - 2mgl \cos \alpha = 0, \quad (28)$$

e sostituendo il valore di F_e , si trova

$$k = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13 \text{ N/m}. \quad (29)$$

Energia

Troviamo l'energia potenziale per il sistema. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza di O . Quindi

$$V(\alpha) = 2mgl \sin \alpha - mgl \sin \alpha + \frac{1}{2}kL^2, \quad (30)$$

$$= mgl \sin \alpha + 2l^2k \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (31)$$

Quindi, imponendo

$$\left. \frac{dV}{d\alpha} \right|_{\alpha=\pi/3} = \left(mgl \cos \alpha - 2l^2k \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \Big|_{\alpha=\pi/3} = 0, \quad (32)$$

si ottiene

$$k = \frac{mg \cos \alpha}{l \sin \alpha} \Big|_{\alpha=\pi/3} = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13 \text{ N/m}. \quad (33)$$

2. Nell'urto istantaneo la forza elastica non si comporta in maniera impulsiva. Le reazioni vincolari sono concentrate in O . Quindi i momenti angolari rispetto ad O , calcolati subito prima e subito dopo l'urto devono essere uguali. Quindi

$$L_{ini} = mv_0 l \sin \alpha, \quad (34)$$

$$L_{fin} = \tilde{I}_0 \omega, \quad (35)$$

dove

$$\tilde{I}_0 = 4ml^2 + I_0 = 4ml^2 + m \frac{l^2}{3} = \frac{13}{3} ml^2. \quad (36)$$

Infine, imponendo $L_{ini} = L_{fin}$ si trova

$$\omega = \frac{3v_0}{13l} \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{26} \frac{v_0}{l} = 10.0 \text{ s}^{-1}. \quad (37)$$

Soluzione esercizio 4

2. La temperature degli stati A, B e C si ricavano dall'equazione di stato:

$$\begin{cases} T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 122 \text{ K} \\ T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{2P_A \frac{1}{2} V_A}{nR} = \frac{P_A V_A}{nR} = T_A \\ T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_B V_A}{nR} = 2 \frac{P_A V_A}{nR} = 2T_A = 244 \text{ K} \end{cases} \quad (38)$$

Il calore scambiato nella trasformazione AB si ricava per differenza tra il calore totale scambiato durante il ciclo e quelli scambiati nelle trasformazioni reversibili:

$$Q_{AB} = Q_{TOT} - Q_{BC} - Q_{CA} \quad (39)$$

dove $Q_{TOT} = L_{TOT} = 15 \text{ l} \cdot \text{atm} = 1520 \text{ J}$, perché nel ciclo $\Delta U_{TOT} = 0$, ed i calori nelle trasformazioni reversibili sono dati da:

$$\begin{cases} Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = 70 \text{ l} \cdot \text{atm} = 7093 \text{ J} \\ Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) = -50 \text{ l} \cdot \text{atm} = -5066 \text{ J} \end{cases} \quad (40)$$

Quindi $Q_{AB} = -5 \text{ l} \cdot \text{atm} = -507 \text{ J}$.

3. Nel ciclo il calore viene assorbito solo durante la trasformazione BC, quindi $Q_{ASS} = Q_{BC} = 70 \text{ l} \cdot \text{atm}$ ed il rendimento è:

$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{ASS}} = 21\% \quad (41)$$

4. Poiché $T_A = T_B$ posso calcolare ΔS_{AB} lungo la corrispondente isoterma reversibile ($dU = 0$) che collega i due stati:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{1}{T_A} \int_{V_A}^{V_B} p dV = nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \quad (42)$$

$$= nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -0.114 \text{ l} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} = -11.55 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (43)$$