

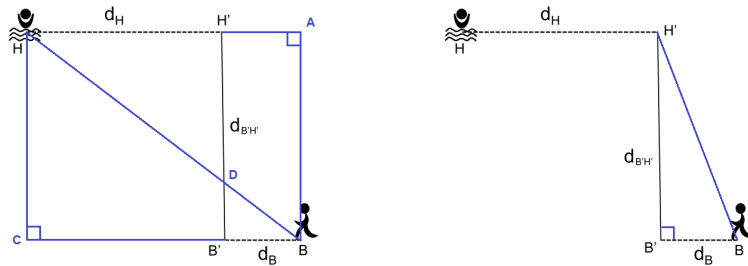
Esercitazione 1

Esercizio 1 - Moto rettilineo uniforme

Un bagnino B è sulla spiaggia a distanza $d_B = 50$ m dalla riva e deve soccorrere un bagnante H che è in acqua a $d_H = 100$ m dalla riva. La distanza tra il punto B' che sulla riva è il più vicino al bagnino e il punto H' che sulla riva è il più vicino al bagnante è $d_{B'H'} = 80$ m. Sapendo che B corre a velocità $v_1 = 5$ m/s e nuota a $v_2 = 2$ m/s, determinare (in secondi, s):

- a. il tempo che serve al bagnino per raggiungere il bagnante lungo la traiettoria più breve;
- b. il tempo che serve al bagnino per raggiungere il bagnante nuotando il meno possibile.

Soluzione



- a. la traiettoria più breve è il segmento BH (figura a sinistra). Indicando con D l'intersezione tra BH e la riva, BH verrà percorso a piedi per un tratto BD e a nuoto per un tratto DH . La lunghezza dei due segmenti si ottiene osservando che i triangoli ABH e $H'DH$ sono simili, così come BCH e $BB'D$, valgono quindi le seguenti proporzioni:

$$\frac{d_{DH}}{d_{BH}} = \frac{d_H}{d_{AH}}$$

$$\frac{d_{BD}}{d_{BH}} = \frac{d_B}{d_{BC}}$$

dove $d_{AH} = d_{BC} = d_B + d_H = 150$ m e $d_{BH} = \sqrt{d_{AB}^2 + d_{AH}^2} = 170$ m. Quindi:

$$d_{DH} = \frac{d_{BH} d_H}{d_{AH}} = 113 \text{ m}$$

$$d_{BD} = \frac{d_{BH} d_B}{d_{BC}} = 57 \text{ m}$$

Nota la lunghezza dei due segmenti, il tempo impiegato per raggiungere il bagnante è dato da

$$t = t_c + t_n = \frac{d_{BD}}{v_1} + \frac{d_{DH}}{v_2} = 68 \text{ s}$$

- b. La traiettoria che consente al bagnino di nuotare il meno possibile è data dalla composizione dei due segmenti BH' e $H'H$ (figura a destra); di conseguenza, il tempo necessario a percorrere questa seconda traiettoria è dato da

$$t = t_c + t_n = \frac{d_{BH'}}{v_1} + \frac{d_{H'H}}{v_2} = \frac{\sqrt{d_{B'H'}^2 + d_B^2}}{v_1} + \frac{d_H}{v_2} = 69 \text{ s}$$

Esercizio 2 - Moto uniformemente accelerato

Il motore di un'automobile può imprimere un'accelerazione massima $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$ e l'impianto frenante può decelerarla al massimo con $a_2 = -4 \text{ m/s}^2$. Calcolare il tempo minimo necessario affinché l'auto, partendo da ferma, arrivi in un punto distante $s = 500 \text{ m}$ dal punto di partenza con velocità nulla.

Soluzione

Indicando con t_1 l'istante in cui cessa l'azione accelerante del motore e ha inizio l'azione frenante, la velocità e lo spazio percorso dall'automobile sono dati da

$$\begin{aligned}v(t) &= a_1 t_1 + a_2 (t - t_1) \\s(t) &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2\end{aligned}$$

Tenuto conto che $v_1 = v(t_1) = a_1 t_1$ e che, all'istante finale, $v_f = 0 \text{ m/s}$ e $s_f = 500 \text{ m}$, dal sistema precedente si ricava

$$\begin{aligned}t_1 &= \sqrt{\frac{2s_f}{a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} = 18.25 \text{ s} \\t &= \sqrt{\frac{2s_f}{a_1} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} = 27.39 \text{ s}\end{aligned}$$

Notare che il rapporto tra t e t_1 (adimensionale) non dipende dallo spazio percorso, ma solamente dal rapporto tra le accelerazioni

$$\frac{t}{t_1} = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$

Nel nostro caso, troviamo che il tempo di frenata $(t - t_1)$ è pari alla metà del tempo di accelerazione t_1 .

Esercizio 3 - Legge oraria

Il moto di un punto lungo l'asse x è descritto dalla legge oraria $x(t) = At^3 - 6Bt^2 + 3C$ con $A = 1 \text{ m/s}^3$, $B = 1 \text{ m/s}^2$ e $C = 1 \text{ m}$. In quanti e quali istanti si annullano la velocità e l'accelerazione? Descrivere inoltre a parole il moto del punto dall'istante $t = 0$ a $t = 10 \text{ s}$.

Soluzione

La velocità e l'accelerazione sono rispettivamente

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3At^2 - 12Bt = 3t(At - 4B)$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6At - 12B = 6(At - 2B)$$

da cui si ricava che la velocità si annulla negli istanti $t_0 = 0 \text{ s}$ e $t_3 = 4 \text{ s}$, mentre l'accelerazione si annulla in $t_2 = 2 \text{ s}$. La posizione si annulla in $t_1 = 0.76 \text{ s}$ e $t_4 = 5.91 \text{ s}$. All'istante iniziale, il punto si trova in $x(0) = 3 \text{ m}$ con velocità nulla e accelerazione $a(0) = -12 \text{ m/s}^2$. Negli istanti successivi, si muove lungo il verso negativo dell'asse x , passando per l'origine a t_1 . Tra t_0 e t_2 , velocità ed accelerazione sono entrambe negative. A t_2 , l'accelerazione si annulla e la velocità ha, in modulo, un massimo. Dopo t_2 , l'accelerazione è positiva e la velocità decresce in modulo, fino ad annullarsi in t_3 . Qui il moto si inverte. Per $t > t_3$, il punto procede nella direzione positiva dell'asse x (l'origine viene nuovamente superata a t_4); velocità ed accelerazione sono entrambe positive.

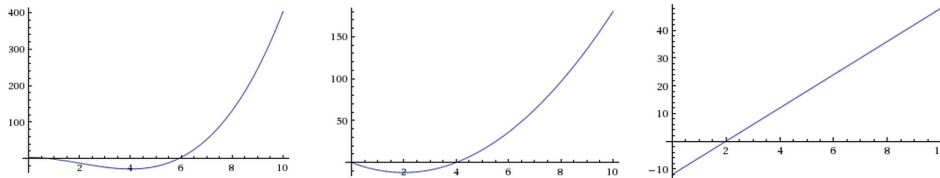


Figure 1: Posizione, velocità ed accelerazione del punto materiale in funzione del tempo, tra gli istanti $t = 0 \text{ s}$ e $t = 10 \text{ s}$.

Esercizio 4 - Studio di un moto con $v = f(t)$

La velocità di un punto che si muove sull'asse x è data da $v(t) = A(Bt - 1)^4$ con $A = 1 \text{ m/s}$ e $B = 1 \text{ s}^{-1}$. Studiare il moto sapendo che la posizione iniziale è $x(t = 0) = x_0 = -0.2 \text{ m}$.

Soluzione

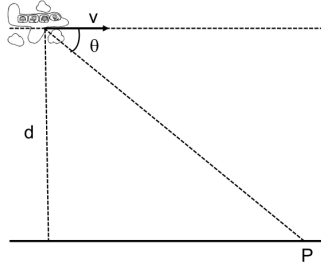
La posizione e l'accelerazione del punto sono date da

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \frac{A}{5B} \left[(Bt - 1)^5 + 1 \right] = \frac{(t-1)^5}{5}$$
$$a(t) = 4AB(Bt - 1)^3 = 4(t - 1)^3$$

Il punto parte da x_0 e si muove lungo la direzione positiva dell'asse x , raggiungendo l'origine a $t_1 = 1 \text{ s}$; la velocità è positiva e si annulla a t_1 ; l'accelerazione è negativa fino a t_1 , quando si annulla. Di conseguenza, il punto rallenta e raggiunge l'origine con velocità ed accelerazione nulle.

Esercizio 5 - Moto dei gravi

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità $v = 600 \text{ km/h}$ ad un'altezza $d = 1 \text{ km}$. All'istante $t = 0$ esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P . Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dall'aereo al momento dello sgancio.



Soluzione

Si tratta di un moto in due dimensioni, per cui definiamo un sistema di riferimento Oxy , con origine O nel punto di sgancio e asse y diretto verso il basso. Il problema si risolve considerando che, nel tempo che l'oggetto impiega a cadere al suolo (cioè a percorrere l'altezza d), deve essere coperta la distanza tra il punto di sgancio e la coordinata x del punto P . Ora, il moto lungo y è un moto uniformemente accelerato (con accelerazione di gravità g), mentre il moto lungo x è uniforme con velocità v . Da queste considerazioni, si ricava

$$\begin{aligned}x_P &= vt \\ d &= \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

da cui $t = 14.2 \text{ s}$ e $x_P = 2367 \text{ m}$ (si ricordi che $1 \text{ km/h} = (1000/3600) \text{ m/s}$). L'angolo θ rispetto all'orizzontale si ricava da

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{d}{x_P} \rightarrow \theta = 22.9^\circ$$

Annotazione. Piccola annotazione riguardante la descrizione del moto in base al sistema di riferimento. Nel sistema di riferimento solidale con l'aereo, l'aereo rimane immobile, l'oggetto si muove esclusivamente lungo l'asse y ed è il punto P a muoversi con velocità $-v$ verso le x negative. Nel sistema di riferimento solidale con il punto P , l'aereo si muove con velocità v verso le x positive, il punto P rimane immobile e l'oggetto descrive un moto bidimensionale dato dalla composizione di un moto uniformemente accelerato lungo y e un moto uniforme (con velocità v) lungo x .

Esercizio 6 - Traiettoria circolare

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 1$ m con velocità di modulo $v = A + Bt^2$, con $A = 4$ m/s e $B = 1$ m/s³. Calcolare:

- la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso tra $t_1 = 0$ s e $t_2 = 2$ s;
- il modulo dell'accelerazione del punto materiale negli istanti t_1 e t_2 .

Soluzione

- a. la lunghezza dell'arco percorso si ottiene integrando la velocità tra gli istanti dati

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (A + Bt'^2) dt' = \left[At + B \frac{t^3}{3} \right]_{t_1}^{t_2} = 10.7 \text{ m}$$

- b. l'accelerazione è data dalla composizione delle due componenti tangenziale e centripeta

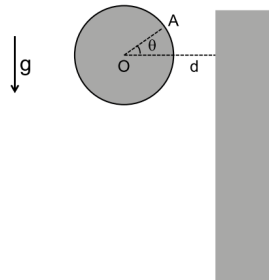
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \hat{u}_C$$

dove $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_C$ sono rispettivamente i versori relativi alle direzioni tangenziale e centripeta. Il modulo dell'accelerazione nei due istanti è pertanto

$$a(t) = \sqrt{(2Bt)^2 + \left[\frac{(A + Bt^2)^2}{R} \right]^2} \rightarrow \begin{cases} a(t_1) = 16 \text{ m/s}^2 \\ a(t_2) = 64.1 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Esercizio 7 - Moto circolare e moto dei gravi

Una ruota di raggio $R = 50$ cm gira con moto uniforme in senso orario, intorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro O , con velocità angolare $\omega = 2\pi/T = 4$ s⁻¹. Nell'istante in cui il raggio OA forma l'angolo $\theta = \pi/6$ con l'asse x , si stacca da A un punto materiale che dopo un certo tempo colpisce una parete distante $d = 1$ m da O . Calcolare il tempo di volo del punto e la sua velocità nell'istante dell'urto.



Soluzione

Al momento del distacco, il punto si trova ad una distanza $d' = d - R \cos \theta$ dalla parete ed è dotato di una velocità di direzione tangenziale alla circonferenza e modulo $v_i = \omega R = 2$ m/s. Individuiamo un sistema di riferimento Oxy con origine O nel centro della ruota e asse y diretto verso il basso. Le componenti x e y della velocità sono date da $v_x = v \sin \theta = 1$ m/s e $v_y = v \cos \theta = 1.73$ m/s. Il moto del punto è dato dalla composizione di un moto uniforme con velocità v_x lungo l'asse x e un moto uniformemente accelerato con accelerazione di gravità g lungo l'asse y . Il tempo di volo corrisponde al tempo di impatto con la parete, cioè

$$t_{volo} = \frac{d'}{v_x} = \frac{d - R \cos \theta}{v_x} = 0.57 \text{ s}$$

La velocità finale è

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2(t_{volo})} = \sqrt{v_x^2 + (v_{iy} + gt_{volo})^2} = 7.39 \text{ m/s}$$

Esercizio 8 - Sistemi di riferimento

Un uomo lungo la riva di un fiume vede passare davanti a sé a distanza $d = 30$ m dalla sponda un prezioso oggetto e decide di recuperarlo. L'oggetto è trasportato dalla corrente del fiume, che scorre a velocità $v_F = 0.5$ m/s ed il nuotatore si tuffa nel momento in cui l'oggetto passa proprio davanti a lui. Sapendo che l'uomo nuota a velocità $v_U = 1.0$ m/s, determinare:

- il tempo impiegato per raggiungere l'oggetto;
- le coordinate dell'uomo quando raggiunge l'oggetto nel sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale dell'uomo e assi perpendicolari, di cui uno parallelo alla sponda del fiume;
- direzione e verso, nello stesso sistema di riferimento del punto *b*, in cui deve nuotare l'uomo per tornare nella sua posizione iniziale;
- il tempo impiegato a tornare indietro e lo spazio percorso.

Soluzione

Definiamo due sistemi di riferimento: il primo Oxy è fermo rispetto alla riva, ha origine nella posizione dell'uomo nel momento in cui si tuffa, asse x coincidente con la riva del fiume e asse y diretto verso l'oggetto prezioso; il secondo $O'x'y'$ coincide con Oxy nel momento in cui l'uomo si tuffa ma trasla rispetto ad esso con velocità costante pari a v_F e parallela all'asse x , nello stesso verso in cui scorre il fiume.

- in $O'x'y'$ l'oggetto è fermo a distanza d dall'origine e l'uomo nuota lungo l'asse y' con velocità v_U costante, quindi il tempo t_0 impiegato per raggiungere l'oggetto è dato da:

$$t_0 = \frac{d}{v_U} = 30 \text{ s}$$

- in $O'x'y'$ le coordinate dell'uomo al tempo t_0 sono $x'(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = d$, per trovare le coordinate nel sistema Oxy bisogna invertire le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + OO'_x(t) \\ y(t) = y'(t) + OO'_y(t) \end{cases} \quad (1)$$

Poiché $OO'_y(t_0) = 0$ e $OO'_x(t_0) = v_F t = 15$ m, allora $x(t_0) = 15$ m e $y(t_0) = 30$ m.

- definiamo θ l'angolo tra la direzione in cui deve nuotare l'uomo e l'asse y' , allora in $O'x'y'$ le componenti della velocità dell'uomo sono $v'_x = -v_U \sin \theta$ e $v'_y = -v_U \cos \theta$. La sua posizione iniziale è data da $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = d = 30$ m ed il moto è descritto da

$$\begin{cases} x'(t) = x'(t_0) + v'_x t = -v_U(t - t_0) \sin \theta \\ y'(t) = y'(t_0) + v'_y t = -v_U(t - t_0) \cos \theta \end{cases}$$

Sapendo che quando l'uomo torna alla posizione iniziale $y' = 0$, dalla seconda equazione si ricava:

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{y(t_0)}{v_U \cos \theta} \quad (2)$$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione si trova $x'(t) = -y'_0 \tan \theta$.

Passiamo ora al sistema Oxy usando la prima delle equazioni (1), dove $OO'_x(t) = OO'_x(t_0) + v_F(t - t_0)$:

$$x(t) = -y'_0 \tan \theta + OO'_x(t_0) + y(t_0) \frac{v_F}{v_U \cos \theta}$$

Sapendo che quando l'uomo torna al punto di partenza $x = 0$ possiamo risolvere l'equazione trovando $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ che definisce la direzione in cui l'uomo deve nuotare.

- per trovare il tempo impiegato a tornare indietro basta usare la (2): $\Delta t = 50$ s.
In Oxy l'uomo ha nuotato dalla posizione $x(t_0) = 15$ m, $y(t_0) = 30$ m all'origine del sistema di riferimento, quindi lo spazio percorso è dato da:

$$s = \sqrt{(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2} = 33.5 \text{ m}$$