

Esercitazione 2

Esercizio 1 - Resistenza dell'aria

Un blocchetto di massa $m = 0.01$ Kg (10 grammi) viene appoggiato delicatamente con velocità iniziale zero su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α . L'attrito fra blocchetto e piano è caratterizzato da coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.4$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Quel blocchetto, se e quando si muove con velocità v , subisce una forza di resistenza dell'aria proporzionale alla sua velocità istantanea ($f_{res} = -\beta v$) con coefficiente $\beta = 10^{-4}$ Kg s $^{-1}$. Determinare il moto del blocchetto per $\alpha = \pi/10$ e $\alpha = \pi/8$.

Soluzione

Considero un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale del blocchetto e l'asse x parallelo al piano inclinato. Considerando le proiezioni delle forze sui due assi si ottiene:

$$\begin{aligned}x : \quad & ma_x = mg \sin \alpha - F_A \\y : \quad & R_N - mg \cos \alpha = 0\end{aligned}$$

dove R_N è la reazione vincolare del piano e F_A la forza di attrito. Dalla seconda equazione si ricava $R_N = mg \cos \alpha$ e quindi, sostituendo nella prima:

$$ma_x = mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha$$

Il blocchetto inizia a scivolare lungo il piano se $a_x > 0$, ovvero se

$$\alpha > \arctan \mu_s \simeq 0.38$$

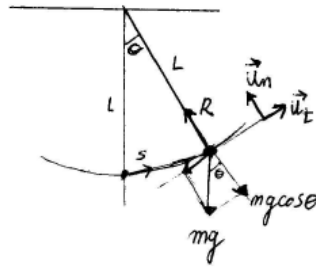
Allora il blocchetto si muove solo nel caso $\alpha = \pi/8$. In questo caso l'equazione del moto lungo l'asse x è $ma_x = mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha - \beta v$, che ammette come soluzione $v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$ con $v_\infty = \frac{mg}{\beta}(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$.
Si ricava infine:

$$x(t) = v_\infty t - \frac{mv_\infty}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Esercizio 2 - Pendolo semplice

Una particella di massa m è attaccata a un sostegno rigido tramite un filo inestensibile (o un'asta) di massa trascurabile e lunghezza L . Il sistema, spostato dalla posizione di equilibrio e abbandonato con velocità iniziale nulla, si muove sotto l'azione della forza peso della particella. Scrivere l'equazione del moto e la legge oraria della particella per piccole oscillazioni, cioè, per piccoli valori dell'angolo θ , per cui è valida l'approssimazione $\sin \theta \simeq \theta$. Si assuma, per semplicità, che non agiscano attriti dovuti all'aria o allo sfregamento nel punto di attacco del filo.

Soluzione



Scomponendo il moto lungo gli assi radiale r e tangenziale s alla traiettoria circolare, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} ma_s = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta \\ ma_r = m \cdot \frac{1}{L} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = R - mg \cos \theta \end{cases}$$

La seconda equazione permette di ricavare un'espressione per la tensione R del filo, imponendo $a_r = 0$. Sostituendo nella prima equazione $s = L\theta$ e approssimando $\sin \theta \simeq \theta$ si ottiene l'equazione del moto per le piccole oscillazioni:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

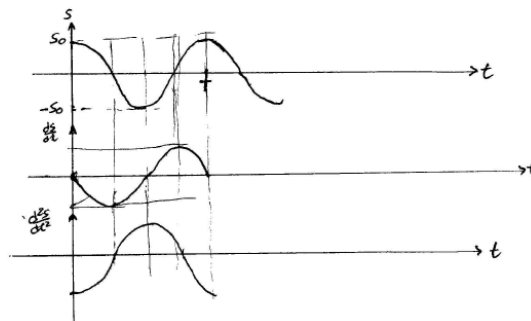
che è l'equazione del moto di un oscillatore armonico semplice, la cui soluzione è:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Tornando alla variabile s , se $s(t=0) = s_0 = L\theta_0$ si ottiene $\varphi = 0$. In questo caso particolare, posizione, velocità ed accelerazione del pendolo sono rappresentati in funzione del tempo nei grafici qui sotto.



Esercizio 3 - Pendolo semplice 2

Un orologiaio deve aggiustare un orologio a pendolo che accumula un ritardo di 1 minuto ogni ora. Sapendo che il pendolo è costituito da una massa m appesa ad un filo di lunghezza L , si discuta quali aggiustamenti è necessario apportare per risolvere il problema in condizioni di piccole oscillazioni.

Soluzione

Poiché il periodo T del pendolo non dipende dalla massa, per risolvere il problema l'orologiaio deve agire sulla lunghezza. Il tempo misurato dall'orologio è proporzionale al numero di oscillazioni del pendolo, in modo tale che n oscillazioni corrispondano ad un'ora. Poiché l'orologio è in ritardo esso impiega 61 minuti per compiere n oscillazioni, in formule $nT = 61$ min. L'orologiaio deve modificare il periodo del pendolo in modo tale che impieghi 60 minuti per compiere n oscillazioni. Il nuovo periodo T' deve quindi verificare la condizione

$$nT' = 60 \text{ min} = \frac{60}{61}nT$$

Poiché

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \\ T' &= 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \end{aligned}$$

la nuova lunghezza del pendolo L' deve verificare la condizione

$$L' = \left(\frac{60}{61}\right)^2 L = 0.9675 L$$

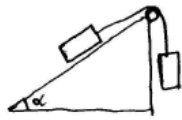
L'orologiaio deve quindi accorciare la lunghezza del pendolo del 3.25 %.

Esercizio 4 - Piano inclinato, attrito

Due masse $m_1 = 5 \text{ kg}$ ed $m_2 = 10 \text{ kg}$ sono collegate come in figura. Il piano, inclinato di $\alpha = 30^\circ$, è scabro con coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e dinamico $\mu_d = 0.3$. Determinare se le due masse, inizialmente in quiete, si muovono ed in caso affermativo con quale accelerazione.

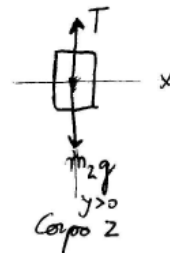
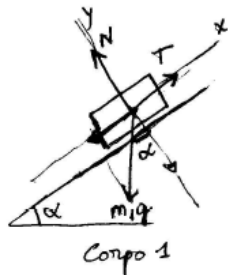
Soluzione

4]



i) Consideriamo che non c'è attrito

i.i) Il sistema è in equilibrio statico



asse x: $T - m_1 g \sin \alpha_0 = 0 \quad (1)$

asse y: $N - m_1 g \cos \alpha_0 = 0 \quad (2)$
reazione del piano sul corpo

asse x: non ci sono forze

asse y: $m_2 g - T = 0 \quad (3)$

$(1) + (3) \rightarrow m_1 \sin \alpha_0 = m_2 \rightarrow \boxed{\sin \alpha_0 = \frac{m_2}{m_1}} \quad m_2 < m_1$
 (se non non c'è equilibrio)

se $m_2 = m_1 \rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$



i.ii) Il sistema si muove con accelerazione a ($\alpha \neq \alpha_0$)

$(1') \rightarrow T - m_1 g \sin \alpha = m_1 a$

$(3') \rightarrow m_2 g - T = m_2 a$

$(2') \rightarrow N - m_1 g \cos \alpha = 0$

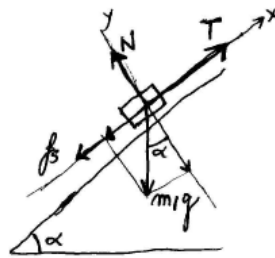
Per come abbiamo scelto gli assi, l'accelerazione del corpo 2 è uguale a quella del corpo 1, ma potrebbero avere un segno opposto se avessimo scelto gli assi in un altro modo.

$(1') + (3') \rightarrow m_2 g - m_1 g \sin \alpha = (m_1 + m_2) a$

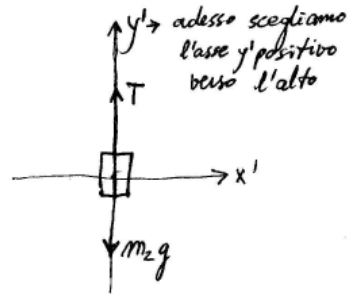
$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g$ se $\alpha > \alpha_0 \rightarrow a < 0$ (il corpo 1 scende)
 se $\alpha < \alpha_0 \rightarrow a > 0$ (il corpo 1 sale)

ii) Consideriamo che c'è attrito

ii.i) Il sistema è in equilibrio statico



Corpo 1



Corpo 2

asse x: $T - m_1 g \sin \alpha - f_s = 0 \quad (1)$

in realtà non sappiamo il verso di f_s
potrebbe essere il contrario, quindi

$$-\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N$$

($f_s > 0$ se è diretto verso il basso)

asse y: $N - m_1 g \cos \alpha = 0 \quad (2)$

asse x': non ci sono forze

asse y': $T - m_2 g = 0 \quad (3)$

(1) + (3) $\rightarrow m_1 g \sin \alpha + f_s = m_2 g \rightarrow f_s = (m_2 - m_1 \sin \alpha) g$

Nel nostro caso, con $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ \rightarrow$

$f_s = +73,58 \text{ N} \rightarrow$ questo è il valore che dovrebbe avere f_s per equilibrare il sistema.

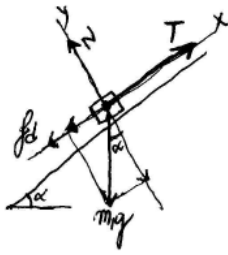
Ma sappiamo che

$$(2) \rightarrow N = m_1 g \cos \alpha \quad \left. \begin{array}{l} -\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N \\ -\mu_s m_1 g \cos \alpha \leq f_s \leq \mu_s m_1 g \cos \alpha \end{array} \right\}$$

Nel nostro caso $\mu_s m_1 g \cos \alpha = 21,24 \text{ N}$

Quindi la forza di attrito statico non riesce ad equilibrare il sistema
e ci sarà un'accelerazione.

ii) Il sistema si muove con accelerazione



Corpo 1

asse x:

$$T - m_1 g \sin \alpha - f_d = m_1 a \quad (1')$$

se consideriamo $f_d = \mu_d N > 0$, l'equazione (1')

solo è valida per $a > 0$ (il corpo 1 sale)

Se alla fine troviamo un risultato con $a < 0$ dovremo ripetere il calcolo cambiando il segno a f_d .

asse y: $N - m_1 g \cos \alpha = 0 \quad (2') \rightarrow N = m_1 g \cos \alpha$

$$(1') \rightarrow T - m_1 g (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) = m_1 a$$

$$(3') \rightarrow T - m_2 g = -m_2 a$$

$$m_2 g - m_1 g (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1 = 5 \text{ kg}, m_2 = 10 \text{ kg} \quad \mu_d = 0,3, \alpha = 30^\circ \rightarrow \boxed{a = 4,055 \text{ m/s}^2}$$

la tensione del filo sarà

$$(3') \rightarrow T = m_2 (g - a) = 57,55 \text{ N}$$



Corpo 2

asse y':

$$T - m_2 g = m_2 a' \quad (3')$$

dove $a' = -a$

(se il corpo 1 sale, il 2 scende)

Se avessimo considerato l'asse y' positivo verso il basso, la eq. (3')

sarebbe:

$$m_2 g - T = m_2 a'$$

con $a' = a$ (se $a > 0 \rightarrow a' > 0$)

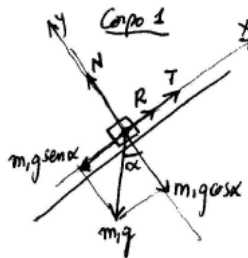
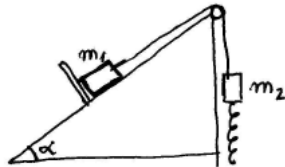
Il corpo 1 sale per il piano inclinato, la direzione che abbiamo considerato di f_d è corretta.

Esercizio 5 - Piano inclinato, molla

Due corpi sono collegati da un filo come in figura; le masse valgono $m_1 = 14 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, l'angolo d'inclinazione del piano è $\theta = 30^\circ$. Il corpo m_2 è anche legato al suolo da una molla di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo nulla. Nella situazione della figura la lunghezza della molla è $x_0 = 0.2 \text{ m}$ e il sistema è in quiete perché m_1 è bloccato da un appoggio (rappresentato da una barretta grigia nel disegno). Calcolare la tensione del filo e determinare modulo direzione e verso della reazione vincolare dell'appoggio.

Soluzione

5



asse x:

$$T + R - m_1 g \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

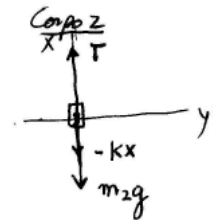
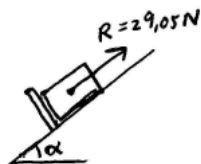
R è la reazione vincolare dell'appoggio che è perpendicolare a questo e parallela al piano inclinato. Non sappiamo in quale verso punta, se fosse verso il basso troveremo una soluzione $R < 0$

asse y:

$$N - m_1 g \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$(3) \rightarrow T = Kx_0 + m_2 g \rightarrow k = 100 \text{ N/m}, x_0 = 0,2 \text{ m}, m_2 = 2 \text{ kg} \rightarrow T = 39,62 \text{ N}$$

$$(1) \rightarrow R = m_1 g \sin \alpha - T \rightarrow m_1 = 14 \text{ kg}, \alpha = 30^\circ, T = 39,62 \text{ N} \rightarrow \boxed{R = 29,05 \text{ N}}$$



scegliamo l'asse x' verticale positivo verso l'alto ($x_0 > 0$)

asse x' :

$$T - Kx_0 - m_2 g = 0 \quad (3)$$

asse y' $\rightarrow$ non ci sono forze

Esercizio 6 - Moto circolare, attrito

Due automobili da corsa arrivano affiancate prima di una curva semicircolare, che entrambe percorrono a velocità costante lungo due traiettorie di raggio, rispettivamente, $R_1 = 95$ m e $R_2 = 105$ m (vedi figura). Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra ruote ed asfalto vale $\mu_s = 0.7$, si determini la massima velocità con cui ognuna delle due macchine può percorrere la curva senza slittare e quale automobile, in queste condizioni, arrivi prima al termine della curva.

Soluzione

6)

$m \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$ non c'è accelerazione tangenziale

$m \frac{(ds/dt)^2}{R} = F_s$ accelerazione normale (centripeta)

Attrito statico $F_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$

$$\frac{m v^2}{R} \leq \mu_s mg \rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s g R}$$

Per la macchina 1 $\rightarrow v_1 \leq \sqrt{0,7 \cdot 9,81 \cdot 95} = 25,54 \text{ m/s } (\approx 91,94 \text{ km/h})$

2 $\rightarrow v_2 \leq \sqrt{0,7 \cdot 9,81 \cdot 105} = 26,85 \text{ m/s } (= 96,67 \text{ km/h})$

Il tempo per percorrere la curva sarà

$$t_1 = \frac{\pi R_1}{v_1} = 11,68 \text{ s}$$
$$t_2 = \frac{\pi R_2}{v_2} = 12,29 \text{ s}$$