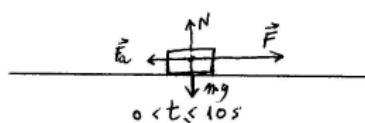


Esercitazione 4

Esercizio 1 - Attrito

Un blocco di massa $m = 2 \text{ kg}$ è posto su un piano orizzontale scabro. Una forza avente direzione orizzontale e modulo costante $F = 20 \text{ N}$ agisce sul blocco, inizialmente fermo, dall'istante $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10 \text{ s}$. Cessata l'azione della forza, il blocco rallenta fermandosi all'istante $t_2 = 25 \text{ s}$. Si calcoli il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocco e il piano.

Soluzione



$$\vec{F} - \vec{F}_a = m \vec{a}_1$$

$$F - \mu_k mg = m a_1$$

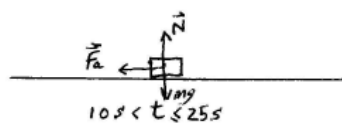
$$a_1 > 0$$

$$a_1 = \frac{F - \mu_k mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu_k g$$

$$v_1(t) = v_{01} + a_1 \cdot t = a_1 t$$

$$v_1(10) = \left(\frac{F}{m} - \mu_k g \right) \cdot 10 = (10 - \mu_k \cdot 9.81) \cdot 10 \text{ m/s}$$

$$v_1(t=10) = (100 - 98.1 \cdot \mu_k) \text{ m/s}$$



$$\vec{F}_a = m \vec{a}_2$$

$$-\mu_k mg = m a_2$$

$$a_2 < 0$$

$$a_2 = -\mu_k g$$

$$v_2(t) = v_{02} - \mu_k g (t - 10)$$

$$v_{02} = v_1(10) = 100 - 98.1 \mu_k$$

$$v_2(t=25) = 0$$

↓

$$100 - 98.1 \mu_k = 9.81 \cdot \mu_k \cdot 15$$

$$\mu_k (98.1 + 9.81 \cdot 15) = 100$$

$$\mu_k = \frac{100}{245.65} = 0.4077$$

possiamo risolvere questo problema utilizzando il teorema dell'impulso

$$I = \int_{t_0}^{t_2} \vec{F}_{\text{net}} dt = m(v_f - v_i)$$

siccome la velocità iniziale e quella finale sono zero $\rightarrow v_f - v_i = 0 \rightarrow I = 0$

$$I = \int_{t_0}^{t_2} F_{\text{net}} dt = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (F - \mu_k mg) dt + \int_{t_1}^{t_2} (-\mu_k mg) dt = F(t_1 - t_0) - \mu_k mg(t_2 - t_0)$$

$$\mu_k = \frac{F(t_1 - t_0)}{mg(t_2 - t_0)} = \frac{20 \text{ N} \cdot 10 \text{ s}}{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 25 \text{ s}} = 0.4077$$

Esercizio 2 - Potenza

Una forza $\vec{F} = \vec{F}(t)$ agente su un corpo puntiforme di massa m , ne causa il moto descritto dalle seguenti equazioni parametriche: $x(t) = c_1 t^3$, $y(t) = c_2 t^2$, $z(t) = c_3 t$, dove c_1 , c_2 e c_3 sono delle costanti. Si determini la potenza sviluppata dalla suddetta forza applicata.

Soluzione

$$\vec{r} = c_1 t^3 \vec{u}_x + c_2 t^2 \vec{u}_y + c_3 t \vec{u}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3c_1 t^2 \vec{u}_x + 2c_2 t \vec{u}_y + c_3 \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y$$

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) = m(6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y)$$

$$P = \frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{\delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = m(18c_1^2 t^3 + 4c_2^2 t)$$

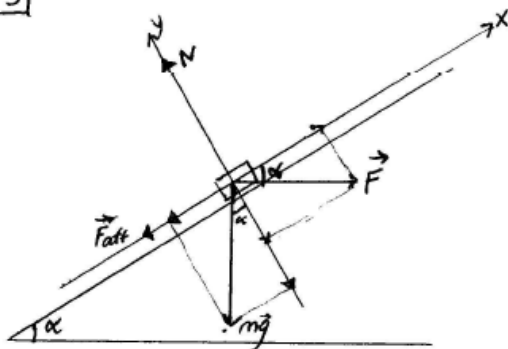
Esercizio 3 - Lavoro, attrito, piano inclinato

Ad un blocco di massa $m = 4.8 \text{ kg}$, che si trova su un piano inclinato di un angolo $\theta = 38^\circ$ rispetto all'orizzontale, è applicata la forza $\vec{F}$, di modulo $F = 47 \text{ N}$ diretta orizzontalmente. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco ed il piano inclinato è $\mu_d = 0.33$ ($\mu_s > \mu_d$). Inizialmente il blocco è in moto lungo il piano inclinato verso l'alto con velocità di modulo $v_0 = 4.3 \text{ m/s}$. Successivamente il blocco rallenta fino a fermarsi dopo un intervallo di tempo T . Calcolare:

- la lunghezza dello spostamento del blocco fino all'istante $t = T$;
- il lavoro della forza totale agente sul blocco nell'intervallo di tempo T ;
- modulo, direzione e verso della forza d'attrito statico che agisce il piano esercita sul blocco nell'istante $t = T$, in cui il blocco si ferma.

Soluzione

3)



asse x

$$F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu_d N = ma \quad (1)$$

asse y

$$-F \sin \alpha + mg \cos \alpha + N = 0$$

$$\rightarrow N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow a = \frac{1}{m} (F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu_d (F \sin \alpha + mg \cos \alpha))$$

$$a = -2.87 \text{ m/s}^2$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{T} = \frac{0 - v_i}{T} \rightarrow T = \frac{-v_i}{a} = 1.5 \text{ s}$$

$$x(t) = x_0 + v_{i,x} t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = v_{i,x} t - \frac{1}{2} a t^2 \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{x(T) = 3.22 \text{ m}}$$

ii) $\vec{F}_r = [F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu_k (F \sin \alpha + mg \cos \alpha)] \vec{u}_x = -13,79 \text{ N } \vec{u}_x$

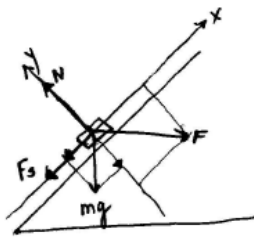
$\vec{r} = 3,22 \text{ m } \vec{u}_x$

$L_r = \vec{F} \cdot \vec{r} = -13,79 \cdot 3,22 \text{ N} \cdot \text{m} = -44,4 \text{ J}$

Usando il teorema dell'energia cinetica

$L_T = E_{cf} - E_{ci} = 0 - \frac{1}{2} m v_{m1}^2 = -44,4 \text{ J}$

iii)



asse $y \rightarrow$ in equilibrio $N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha = 66,05 \text{ N}$

asse x $F \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_s = 0$

consideriamo che F_s è diretto verso il basso, ma ancora non lo sappiamo. Se risulta un valore $F_s < 0$ sarebbe verso l'alto

$F_s = F \cos \alpha - mg \sin \alpha = 8 \text{ N}$

si verifica $F_s < \mu_s N$

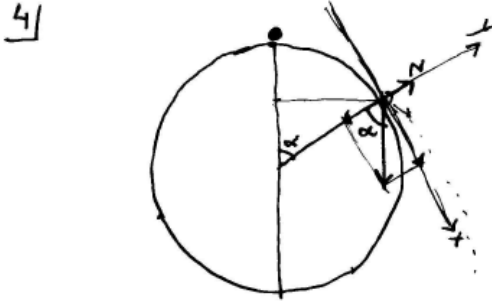
$\mu_s N \approx \mu_0 N = 0,33 \cdot 66,05 \text{ N} = 21,8 \text{ N}$



Esercizio 4

Un corpo puntiforme viene lasciato scivolare, partendo da fermo, sulla sommità di una superficie cilindrica liscia di raggio R . Si calcoli l'angolo α in corrispondenza del quale il corpo si stacca dal cilindro.

Soluzione



asse x

$$mg \sin \alpha = m a_t = m \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

asse y

$$mg \cos \alpha - N = m a_c = m \frac{v^2}{R}$$

Quando il corpo si stacca dal cilindro $N=0$

$$mg \cos \alpha_0 = m \frac{v^2}{R} \rightarrow \cos \alpha_0 = \frac{v^2}{gR} ; v^2 = gR \cos \alpha_0 \quad (1)$$

usando il Teorema di Conservazione dell'energia:

$$E_i = E_{pi} + E_{ci} = mg 2R + \frac{1}{2} m v_i^2 = mg 2R \quad (v_i = 0)$$

$$E_f = E_{pf} + E_{cf} = mg R (1 + \cos \alpha_0) + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_i = E_f \rightarrow mg 2R = mg R (1 + \cos \alpha_0) + \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

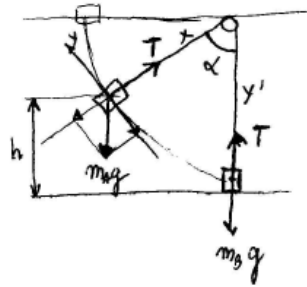
$$(1), (2) \rightarrow 2 = 1 + \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} \cos \alpha_0 \rightarrow \cos \alpha_0 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\alpha_0 = 48,19^\circ}$$

Esercizio 5

Un corpo A di massa $m_A = 2$ kg è collegato tramite una fune ideale, di lunghezza $2l = 4$ m, ad un corpo B di massa $m_B = 3$ kg tramite una carrucola O. Inizialmente il corpo B è appoggiato su un piano orizzontale ed il tratto del filo OB è verticale, mentre il corpo A, in quiete, è tenuto col tratto di filo OA teso ed orizzontale. Si lascia libero il corpo A. Si determini di quanto si abbassa il corpo A, in verticale, prima che il corpo B si stacchi dal piano d'appoggio.

Soluzione



L'equazione del moto circolare del corpo A, proiettata sull'asse radiale è:

$$T - m_A g \cos \alpha = m_A \frac{v_A^2}{l}$$

Inoltre, per la conservazione dell'energia meccanica durante il moto del corpo A:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g h = m_A g l$$

dove $h = l(1 - \cos \alpha)$. Da quest'ultima si ricava un'espressione per v_A che sostituita nella prima equazione dà:

$$T = 3m_A g \cos \alpha$$

Il corpo B si stacca dal piano d'appoggio quando $T = m_B g$, quindi:

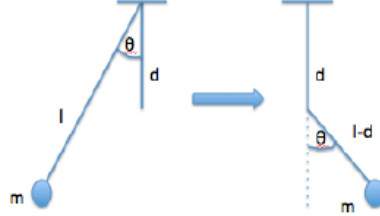
$$3m_A g \cos \alpha = m_B g$$

da cui $\cos \alpha = \frac{1}{3} \frac{m_B}{m_A}$. Sostituendo i dati si ottiene $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e quindi $\alpha = 60^\circ$. Il corpo A è quindi sceso di $l - h = l \cos \alpha = 1$ m.

Esercizio 6 - Pendolo a due lunghezze

Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato all'estremità di una corda di lunghezza l inizialmente fermo in corrispondenza di un piccolo angolo θ_0 alla sinistra della verticale. Alla destra si trova un piano verticale di altezza $d < l$, che ha l'effetto pratico di accorciare la lunghezza della corda, quando questa oscilla sul lato destro. Utilizzando la conservazione dell'energia, si determini:

- la velocità angolare ω_0 del punto materiale quando $\theta = 0$ per la prima volta;
- l'angolo massimo θ_1 che si ha sul lato destro in corrispondenza della massima ampiezza;
- la velocità angolare ω_1 del punto materiale quando $\theta = 0$ per la seconda volta.



Soluzione

- a. l'energia potenziale all'inizio del moto ($\theta = \theta_0$) è pari all'energia cinetica in $\theta = 0$:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 l^2 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \cos \theta_0)}$$

- b. l'energia potenziale in $\theta = \theta_0$ è pari all'energia potenziale in $\theta = \theta_1$:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = mg(l - d)(1 - \cos \theta_1) \quad \rightarrow \quad \theta_1 = \arccos \left[1 - \frac{l}{l - d}(1 - \cos \theta_0) \right]$$

- c. l'energia potenziale in $\theta = \theta_0$ è pari all'energia cinetica in $\theta = 0$; questa volta però $v_1 = \omega_1(l - d)$:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_1^2(l - d)^2 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2gl}{(l - d)^2}(1 - \cos \theta_0)} = \frac{l}{l - d}\omega_0$$

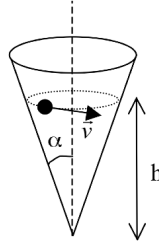
Nota: nel limite delle piccole oscillazioni è possibile sviluppare $\cos \theta$ in serie di Taylor:

$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_0 \simeq \theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \theta_1 \simeq \arccos \left[1 - \frac{1}{2} \frac{l}{l-d} \theta_0^2 \right] \\ \omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{l-d}}(1 - \cos \theta_1) \simeq \theta_1 \sqrt{\frac{g}{l-d}} \end{cases}$$

Esercizio 7 - Imbuto

Sulla parete interna di un imbuto ($\alpha = 20^\circ$) può scivolare senza attrito una pallina puntiforme di massa $m = 0.1$ kg. Se la pallina compie una traiettoria circolare orizzontale di velocità uniforme ad una quota $h = 10$ cm dal vertice inferiore dell'imbuto (vedi figura) calcolare:

- la reazione vincolare N dell'imbuto sulla pallina;
- la velocità v della pallina;
- l'accelerazione tangenziale e centripeta della pallina.



Soluzione

Nel sistema di riferimento con origine nella pallina, asse x diretto lungo il raggio della traiettoria circolare ed asse y verticale le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = N \cos \alpha \\ N \sin \alpha - mg = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove $R = h \tan \alpha$ è il raggio della traiettoria circolare.

- la reazione vincolare si ricava dalla seconda delle (1): $N = \frac{mg}{\sin \alpha}$;
- la velocità si ricava dalla prima delle (1), sostituendo l'espressione per N appena ricavata: $v = \sqrt{gh}$;
- l'accelerazione tangenziale è nulla perché la pallina si muove con velocità uniforme, l'accelerazione centripeta è $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{g}{\tan \alpha}$.

Nota: è possibile scegliere, in modo del tutto equivalente, un sistema di riferimento con asse y ortogonale alla superficie interna del cono e asse x diretto lungo la superficie stessa; in questo caso l'accelerazione centripeta si decompone nelle sue componenti lungo i nuovi assi e le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} \cos \alpha = N - mg \sin \alpha \\ m \frac{v^2}{R} \sin \alpha = mg \cos \alpha \end{cases}$$