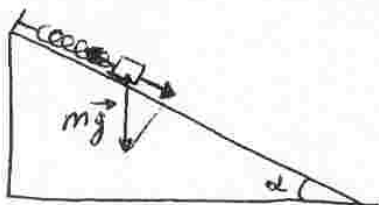


Carrello collegato a una molla sul piano inclinato (con attrito)

III-1

Piano inclinato II (moto armonico smorzato)



↑ In equilibrio:

$$mg \sin \alpha - K(x - x_2) = 0$$

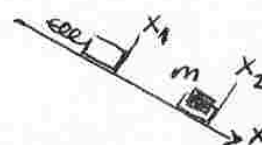
$x - x_2$: allungamento molla

Con carrello (massa m_c) vuoto, equilibrio in x_1

$$m_c g \sin \alpha = K(x_1 - x_2) \quad (I)$$

Con massa m nel carrello

$$(m_c + m) g \sin \alpha = K(x_2 - x_2) \quad (II)$$



Da (II) - (I): $(m_c + m - m_c) g \sin \alpha = Kx_2 - Kx_1 + Kx_2$

$$\Rightarrow K(x_2 - x_1) = mg \sin \alpha \quad \text{Noti } m, x_1, x_2, \alpha \Rightarrow K = \frac{mg \sin \alpha}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{K \pm \Delta K}$$

$$(M = m_c + m)$$

↑ Con m nel carrello, equilibrio in $x_{eq} = \frac{M g \sin \alpha}{K} (= x_2) \quad (x_2 = 0)$

Allungo la molla, poi lascio: $M g \sin \alpha - Kx = M \ddot{x}$

$$\Rightarrow x(t) - x_{eq} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{come molla in verticale})$$

$\Rightarrow$ oscilla intorno a x_{eq} con $\omega = \sqrt{K/M}$

(N.B. massa molla trascurabile)

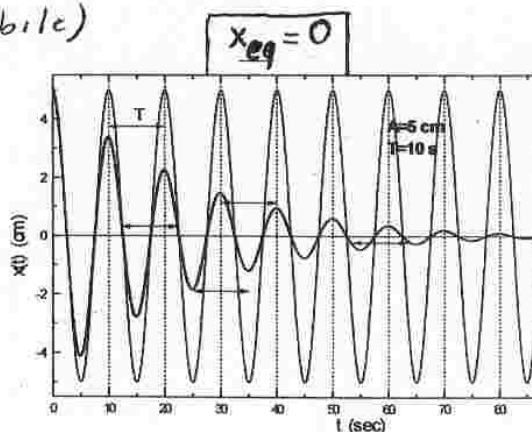
$$x(t) = A \cos \omega t \quad (\varphi = \pi/2)$$

oscillazione di ampiezza costante A con periodo

$$T = 2\pi/\omega$$

Facendo le misure,
osservo oscillazione di
ampiezza decrescente,
periodo T costante:

SMORZAMENTO



Possibili cause } dissipative $\Rightarrow$ perdita di energia

III-2

1) Forza "di attrito" } proporzionale alla velocità :
(attrito con l'aria)

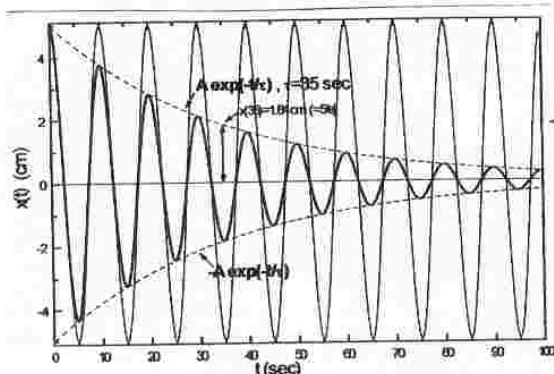
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad \otimes$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$$

$\Rightarrow x(t) = A e^{-\beta t/2m} \sin(\omega' t + \varphi)$ se "effetto di smorzamento" è "piccolo"

$\Rightarrow$ se $\frac{k}{m} \gg \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 \quad (\Rightarrow \omega' \approx \omega)$



$\rightarrow$ Ampiezza $A e^{-t/\tau}$
($\tau = 2m/\beta$)
Per $t = \tau$, ampiezza = A/e

N.B. $[\beta\dot{x}] = [F] = m \ell t^{-2} \quad [\beta] = [F]/[\dot{x}] = \frac{m \ell t^{-2}}{\ell t^{-1}} = m t^{-1}$
 $\Rightarrow [m/\beta] = \frac{m}{m t^{-1}} = t$

$\Rightarrow$ Se $\beta\dot{x}$ non trascurabile: smorzamento esponenziale

SOLUZIONE EQUAZIONE $\otimes$: RIVEDERE

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + (\beta/m)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega^2 = k/m)$$

Soluzione: $x(t) = A'e^{\alpha_1 t} + B'e^{\alpha_2 t}$, con α_1, α_2 soluzioni di

$$\alpha^2 + (\beta/m)\alpha + \omega^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \omega^2} \quad \rightarrow \text{Discriminante } \Delta$$

1) $\Delta = 0 = \frac{\beta^2}{4m^2} - \omega^2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -\beta/2m \Rightarrow x(t) = e^{-\beta/2m t} (At + B)$

SMORZAMENTO CRITICO

2) $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ reali e negativi $\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t/2m} [A'e^{\gamma t} + B'e^{-\gamma t}]$ con $\gamma = \sqrt{\Delta}$
SMORZAMENTO FORTE (SENZA OSCILLAZIONI)

3) $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ COMPLESSI $\omega^2 > \beta^2/4m^2$, $\gamma = \sqrt{\omega^2 - \beta^2/4m^2} > 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\beta/2m + i\gamma, \quad \alpha_2 = -\beta/2m - i\gamma \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t/2m} [A'e^{i\gamma t} + B'e^{-i\gamma t}]$$

$A, B \Leftrightarrow$ condizioni al contorno - Con $x(0) = A$ e $v(0) = 0$

$$x(t) = A e^{-\beta t/2m} \sin(\omega' t + \varphi) \quad \text{con } \tan \varphi = 2m\gamma/\beta$$

SMORZAMENTO DEBOLE $\Leftrightarrow$ OSCILLAZIONI SMORZATE

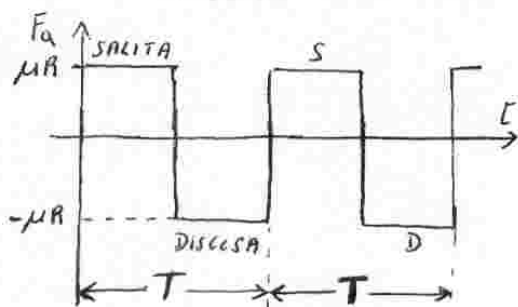
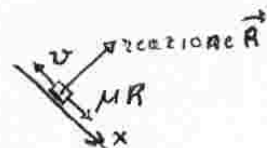
2) Forza di attrito F_a "del tipo" μR

III.3

N.B. μR verso l'alto se corpo scende

μR " il basso " " sale

$\Rightarrow$ NON è una forza COSTANTE



F_a di attrito (rodente, volvente...)

è una forza DISSIPATIVA

$\Rightarrow$ provoca perdite di energia

$\Rightarrow$ diminuzione delle ampiezze di oscillazione (periodo T costante)

Per calcolare perdite di energia dovute ad attrito F_a (v. III.7-9)
In $t=0$ massa in $x=x_0$ (molla allungata)

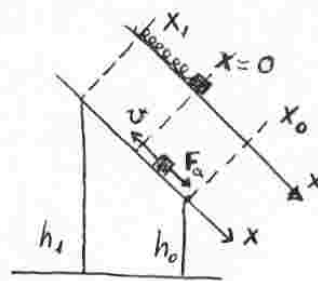
$v(t=0)=0$ - Considero SALITA.

In $t=0$ massa lasciata libera

$\Rightarrow m$ sale verso l'alto, F_a verso il basso

m sale fino ad $x=x_1$ (in t_1), poi

inizia a ridiscendere. N.B. in t_1 , $v(t_1)=v_1=0$



$$\left. \begin{aligned} \text{Se manca attrito } E_0 &= \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2} K x_0^2 = \\ v_1 = v_0 = 0 \quad \Bigg| \quad E_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2} K x_1^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{CONSERVAZIONE} \\ \text{ENERGIA} \\ E_1 = E_0 \end{array}$$

Con attrito $E_1 - E_0$ (negativo $\Leftrightarrow$ perdite di energia) =

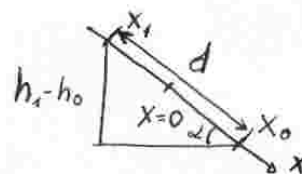
$$= -F_a d \text{ (lavoro negativo fatto da } F_a \text{)}$$

N.B. il problema è determinare $x_1 \Rightarrow$ fino a dove risale m

d = distanza percorsa = $x_0 - (-x_1) = x_0 + x_1$

$$h_1 - h_0 = d \sin \alpha = (x_0 + x_1) \sin \alpha$$

$$F_a = \mu mg \cos \alpha$$



$$\Rightarrow E_1 - E_0 = -F_a d \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} K x_1^2 + 2x_1}_{a} \underbrace{(mg \sin \alpha + F_a)}_b + \underbrace{2mg x_0 \sin \alpha + 2F_a x_0 - K x_0^2}_c = 0$$

$\Rightarrow$ equazione di secondo grado in $x_1 \Rightarrow x_1 = x_0 - D_s$, $D_s = 2mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)/K$

Analogamente, in discesa scende fino a $x_2 = x_1 - D_d$,

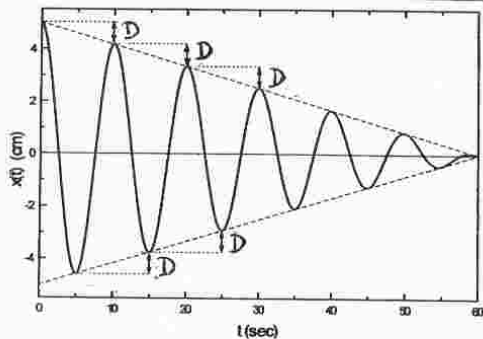
con $D_d = 2mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)/K$

$\Rightarrow$ Nel periodo T , le ampiezze diminuisce di $D = D_s + D_d = \frac{4mg\mu \cos \alpha}{K}$

Quindi,

III-4

calcolando l'effetto delle perdite di energia dovute alle forze di attrito F_a (costante in modulo, che cambia segno dopo ogni T):



$\Leftrightarrow$ smorzamento lineare:

in ogni periodo T , l'ampiezza si riduce (sempre) di D

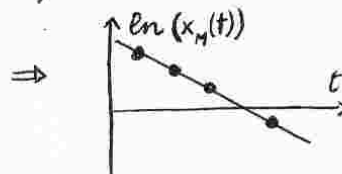
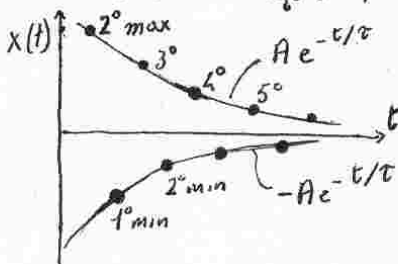
$$\Rightarrow x(t) = \left(A - \frac{D}{T}t\right) \cos \omega t$$

$$(\omega = \sqrt{k/m})$$

$$D = \frac{4 M g \mu \cos \alpha}{k}$$

N.B. La legge $\left(A - \frac{D}{T}t\right)$ è una legge empirica introdotta per descrivere la decrescita lineare delle ampiezze di oscillazione

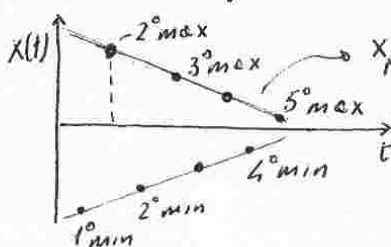
Nel caso (1) di smorzamento esponenziale, se considero i valori $x_i(t)$ per i quali $x(t)$ è Massima (x_M) si ha:



$$\ln x_M(t) = \ln A - \frac{t}{\tau}$$

SE smorzam esponenziale $\Rightarrow$ andamento lineare di $\ln x_M(t)$ (analogamente per i minimi x_m)

Nel caso (2) di smorzamento lineare, se considero solo i valori $x_i(t)$ per i quali $x(t)$ è Massima (x_M) si ha:



$$x_M(t) = A - \frac{D}{T}t$$

$t =$	0	T	2T	3T
$x_M =$	A	A-D	A-2D	A-3D
		(2)	(3)	(4)

Analogamente, per i minimi x_m :

$t =$	T/2	T/2 + T	T/2 + 2T
$x_m =$	A' = A - D/2	A' - D	A' - 2D
	(1)	(2)	(3)