

# 1 Percolazione

La percolazione affronta il problema puramente geometrico della connettività di un sistema di punti disposti nello spazio secondo una distribuzione predefinita. Nel caso più semplice i punti sono distribuiti su un reticolo (in  $d$  dimensioni). Dati i punti e la loro distribuzione, occorre fornire anche una definizione di connessione tra due punti. Si usa il termine site-percolation quando due punti adiacenti sono definiti connessi, di bond-percolation quando tra due punti esiste un legame.

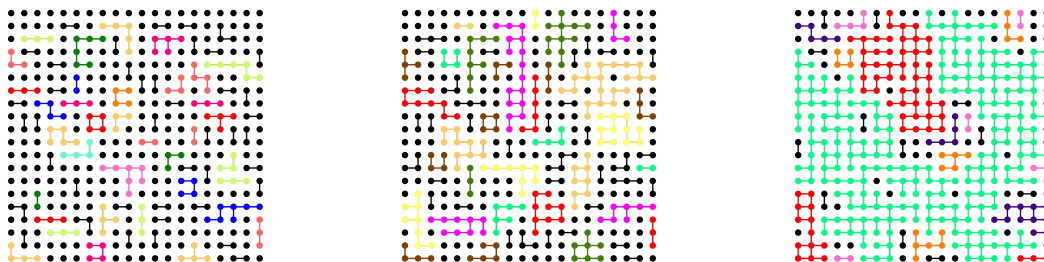


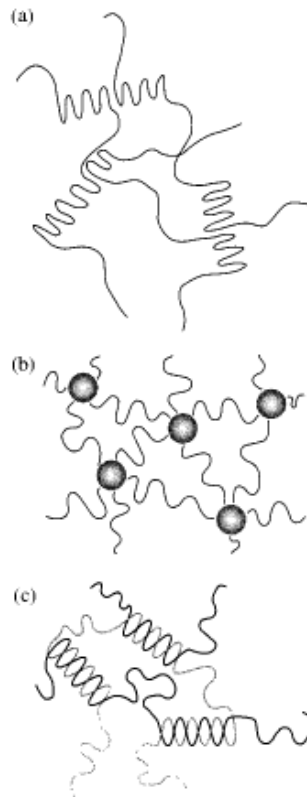
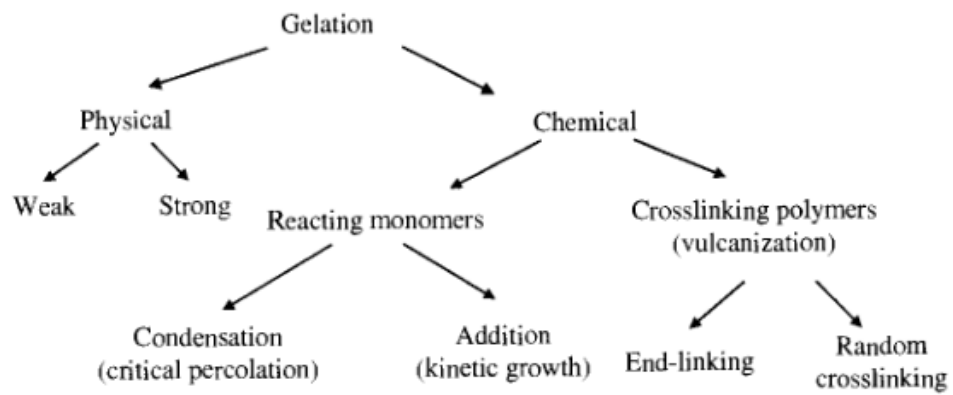
Figure 1: Esempio di random-site percolation su reticolo quadrato per 3 diversi valori della probabilità di esistenza di un legame. I diversi clusters sono indicati con diversi colori

Una delle domande principali che si pone la teoria è la valutazione del valore del parametro di controllo (la densità di siti in site-percolation o la probabilità di legame in bond-percolation) per il quale il sistema raggiunge una configurazione percolante, cioè che include un cluster di dimensioni confrontabili a quelle del sistema. Altrettanto importante è predire il comportamento di osservabili che risentono delle proprietà di connettività in vicinanze della cosiddetta soglia di percolazione. La figura 1 mostra un esempio di site-percolation in due dimensioni per tre diversi valori della concentrazione  $p$  di siti occupati. Particelle adiacenti sono state collegate da legami e partizionate in clusters. A bassa  $p$  i clusters sono piccoli e separati. Raggiunto il valore critico  $p = 1/2$ , si osserva un cluster infinito anche se con connessioni tenui (cioè tale che basta eliminare pochi legami per disconnettere il cluster in più clusters di dimensioni minori).

Perché occuparsi di percolazione? Ci sono numerosi fenomeni in fisica che richiedono concetti di connettività ed in particolare modo di esistenza di un "cluster" infinito che trasmetta una informazione su dimensioni macroscopiche. Pensiamo ad esempio alla conducibilità elettrica in un sistema disordinato, alla elasticità in un sistema a due componenti con diverse proprietà meccaniche, alla diffusione su sistemi disordinati, per esempio di malattie, nella propagazione di incendi in foreste.

L'approccio percolativo è di particolare rilevanza nello studio dei sistemi polimerici e colloidali, in particolar modo per lo studio dello stato gel. I sistemi polimerici con molecole che formano cross-link chimici costituiscono uno dei sistemi nei quali la formazione di un network permanente dipende dalla funzionalità dei polimeri e dal numero di legami. I gels vengono divisi in due grandi categorie: gel chimici e gel fisici. Nei primi i legami sono il risultato di una reazione chimica e dunque la energia del legame, di molto superiore a  $kT$ , garantisce la stabilità del legame medesimo. Nei gel fisici, un aumento di temperatura anche modesto può fondere il gel, poiché l'energia del legame è dell'ordine di  $kT$ .

## Random branching and gelation



**Fig. 6.3**  
Examples of strong physical gels  
with crosslinks that are: (a) lamellar  
microcrystals; (b) glassy nodules;  
(c) double helices.

In vicinanza della soglia di percolazione, come nei fenomeni critici vicino il punto critico, molte proprietà connesse alla connettività mostrano leggi di scale (potenze), cioè mostrano l'assenza di una lunghezza caratteristica. La caratterizzazione degli esponenti di scala consente di stabilire la classe di universalità del fenomeno percolativo, in piena analogia con i fenomeni termici. Per imparare, esaminiamo prima il caso risolubile della bond-percolation in una dimensione, che ci consentirà di definire le grandezze utilizzate nella descrizione e le loro inter-relazioni.

## 1.1 1-d site percolation

In questo problema, il parametro di controllo esterno è la probabilità  $p$  di occupazione di un sito di una catena infinita. Questo modello unidimensionale è chiaramente patologico, perché la soglia di percolazione richiede che tutti i siti siano presenti, cioè che  $p_c = 1$ . Quindi, in questo modello, possiamo solo studiare il comportamento per  $p < p_c$ .

La probabilità  $p_s$  che un sito scelto a caso appartenga ad un cluster di size  $s$  è data da

$$p_s = sp^s(1-p)^2 \quad (1)$$

Questa relazione ci dice che se "atterriamo" a caso su un sito, lo troviamo occupato con probabilità  $p$ . Se vogliamo che altri  $s-1$  siti vicini siano occupati e contemporaneamente vogliamo che i due siti estremi della catena siano vuoti, si comprende il contributo  $p^s(1-p)^2$ . Se poi ci ricordiamo che possiamo "atterrare" su uno qualsiasi degli  $s$  siti, otteniamo la formula finale sopra scritta.

Naturalmente, se sommiamo  $p_s$  su tutte le sizes  $s$  dobbiamo trovare la probabilità che il sito sia occupato. Infatti

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_s = \sum_{s=1}^{\infty} sp^s(1-p)^2 = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} sp^s = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} p \frac{d}{dp} p^s = p(1-p)^2 \frac{d}{dp} \sum_{s=1}^{\infty} p^s \quad (2)$$

$$= p(1-p)^2 \frac{d}{dp} \frac{p}{1-p} = p(1-p)^2 \frac{1}{(1-p)^2} = p \quad (3)$$

Dalla conoscenza di  $p_s$  possiamo calcolare subito la probabilità  $n_s$  che un cluster scelto a caso abbia size  $s$  (normalizzata sul numero di siti). Infatti  $n_s$  deve soddisfare

$$\sum_{s=1}^{\infty} sn_s = p \quad (4)$$

perché se moltiplichiamo ogni cluster per la sua size e sommiamo dobbiamo trovare il numero di siti occupati. Quindi banalmente troviamo anche che

$$n_s = p^s(1-p)^2 \quad (5)$$

e che il primo momento della distribuzione altro non e' che il numero di siti occupati.

E' piu' interessante studiare il comportamento del secondo momento della distribuzione  $n_s$ , chiamato *mean cluster size*  $S$  e definito come

$$S = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s n_s}{\sum_{s=1}^{\infty} n_s} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s n_s}{p} \quad (6)$$

Il calcolo di  $S$  da

$$pS = \sum_{s=1}^{\infty} s n_s = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s = (1-p)^2 \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} \sum_{s=1}^{\infty} p^s + p \frac{d}{dp} \sum_{s=1}^{\infty} p^s \right\} = \quad (7)$$

$$= (1-p)^2 \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} \frac{p}{(1-p)} + p \frac{d}{dp} \frac{p}{(1-p)} \right\} \quad (8)$$

e sapendo che

$$\frac{d}{dp} \frac{p}{(1-p)} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad (9)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} \frac{p}{(1-p)} = \frac{d}{dp} \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{2}{(1-p)^3} \quad (10)$$

troviamo

$$pS = (1-p)^2 \left\{ \frac{2}{(1-p)^3} + \frac{1}{(1-p)^2} \right\} = \frac{p(1+p)}{1-p} \quad (11)$$

da cui

$$S = \frac{1+p}{1-p} \quad (12)$$

Il mean cluster size diverge alla transizione percolativa  $p = 1$  secondo una legge di potenza con esponente  $-1$ .

Esaminiamo adesso la probabilita'  $P_2(r)$  che un sito occupato scelto a caso sia connesso ad un sito distante  $r - 1$ , cioe' che siano parte di uno stesso cluster di almeno  $r$  siti. Questa probabilita' e' data da

$$P_2(r) = 2p^{r-1} \quad (13)$$

Infatti, per ogni direzione (destra-sinistra), la connettivita' e' garantita se  $r - 1$  siti sono occupati. Possiamo riscrivere la stessa probabilita' come

$$P_2(r) = 2p^{r-1} = \frac{2}{p}e^{-r/\xi} \quad (14)$$

dove abbiamo definito la lunghezza di connettivita'  $\xi$  come

$$\xi = -\frac{1}{\ln p} \quad (15)$$

Quando ci avviciniamo alla transizione,  $p \rightarrow p_c \equiv 1$ , possiamo scrivere

$$\ln p = \ln p_c + (p - p_c) \quad (16)$$

ed intorno a  $p_c$

$$\ln p = \ln 1 + (p - p_c) \approx -|p - p_c| \quad (17)$$

e

$$\xi \sim \frac{1}{|p - p_c|} \quad (18)$$

Dunque la lunghezza di connettivita' diverge alla transizione anche essa come una legge di potenza.

Le quantita'  $S$  e  $P_2(r)$  sono legate da una relazione integrale. Infatti, vale

$$S = 1 + p \sum_{r>0} P_2(r) = 1 + 2p \sum_{r>0} p^{r-1} = 1 + 2p \sum_r p^{r-1} = 1 + \frac{2p}{1-p} = \frac{1+p}{1-p} \quad (19)$$

Infine, esaminiamo una maniera alternativa di scrivere  $n_s$ , per  $|p - p_c| \ll 1$ .

$$n_s = (1-p)^2 p^s = (1-p)^2 e^{s \ln(p)} = (p_c - p)^2 e^{-s(p-p_c)} \quad (20)$$

definendo una variabile  $x = s(p - p_c)$  possiamo scrivere

$$n_s = \frac{x e^{-x}}{s^2} = s^{-2} x e^{-x} = s^{-1} f(x) \quad (21)$$

che ci dice che  $n_s$  in vicinanza della percolazione e' scrivibile come una legge di potenza per una funzione di scala  $f(x)$  della variabile  $x$ . Notiamo che un grafico di  $s^2 n_s$  vs.  $x$  darebbe un completo "collasso" (data collapse) di tutte le curve, indipendentemente dal valore di  $p - p_c$ .

In sintesi, in vicinanza del punto critico in una dimensione, le proprieta' percolative sono sintetizzate nella seguente tabella.

Table 1: Results 1-d percolation

$$\left| \begin{array}{l} S \sim |p - p_c|^{-1} \\ \xi \sim |p - p_c|^{-1} \\ n_s \sim s^{-2} f[s|p - p_c|] \\ P_\infty = 0 \end{array} \right|$$

### 1.1.1 Lo stesso problema per molecole bifunzionali

Supponiamo di avere una molecola con due gruppi reattivi, che chiamiamo A e B e supponiamo che l'unico legame possibile sia il sito A con il sito B.

Chiamiamo adesso  $p$  la frazione di siti A legati ( $\#$  siti reattivi su  $\#$  siti totale, uguale al numero  $N$  di molecole). Immediatamente possiamo scrivere che

$$N_{clusters} = N(1 - p)$$

poiche' ogni cluster ha un solo sito A che non ha reagito. Dunque la lunghezza media dei clusters sara'

$$N/N_{clusters} = \frac{1}{1 - p}$$

Il numero di clusters composti da  $n$  monomeri, (con  $n - 1$  siti che hanno reagito) sara'

$$N_n = N(1 - p)^2 p^{n-1}$$

ed il numero totale di clusters  $\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N(1 - p)^2 \sum_{m=0}^{\infty} p^m = N(1 - p)$  poiche'  $\sum_{m=0}^{\infty} p^m = \frac{1}{1 - p}$

## 1.2 Un altro caso in cui esiste solo il sol: *hyperbranched polymers*

Consideriamo il caso di molecole con  $f$  patches, di cui uno A e  $f - 1$  B con solo possibili legami AB.

Se chiamiamo  $p$  la probabilita' che un sito B abbia reagito (formato un legame con un A) allora la probabilita' che un sito A abbia reagito e'  $p(f - 1)$ . Quanto tutti i siti A hanno reagito,  $p(f - 1) = 1$ , e quindi il massimo valore raggiunto da  $p$  e'  $1/(f - 1)$ . La frazione di siti A che non hanno reagito e'  $1 - p(f - 1)$ . Poiche' ogni aggregato ha un solo sito A che non ha reagito, possiamo scrivere immediatamente il numero di clusters come

$$N_{clusters}(p) = N[1 - p(f - 1)]$$

e la dimensione media dei clusters come

$$N/N_{clusters} = \frac{1}{1 - p(f - 1)}$$

La dimensione media dei clusters diverge quando  $p = 1/(f - 1)$ , cioe' quanto tutti gli  $A$  hanno reagito. Oltre percolazione non si puo' andare !

Guardiamo come calcolare il cluster size distribution, cioe' il numero di clusters composti da  $n$  monomeri. Questo termine ha un contributo combinatoriale ed un contributo "energetico", legato al numero di legami. Un cluster di size  $n$  ha solo UN sito  $A$  non reagito e  $n - 1$  siti  $B$  reagiti, su un totale di  $n(f - 1)$ . Chiamando  $a_n$  il termine combinatoriale gli  $n - 1$  siti che hanno reagito danno un contributo  $p^{n-1}$  e gli  $n(f - 1) - (n - 1)$  siti che non hanno reagito un contributo  $(1 - p)^{n(f-1)-(n-1)}$

$$N_n = N_{cluster} a_n p^{n-1} (1 - p)^{n(f-1)-(n-1)} = a_n p^{n-1} (1 - p)^{n(f-2)+1} =$$

La degenerazione e' il numero di modi, dati  $n$  monomeri, di legarli con  $n - 1$  legami. Possiamo scegliere il primo  $B$  da legare in  $n(f - 1)$  modi, il secondo in  $n(f - 1) - 1$  modi. etc. Il numero totale di modi e' dunque (primo legame sottrai 0, secondo sottrai 1, all' N-1 sottrai N-2)

$$n(f - 1)[n(f - 1) - 1].....[n(f - 1) - (n - 2)] = \frac{[n(f - 1)]!}{[n(f - 1) - (n - 1)]!}$$

che va ancora diviso per  $N!$  poiche' i monomeri sono indistinguibili, cosi' che

$$a_n = \frac{[n(f - 1)]!}{[n(f - 1) - (n - 1)]! N!}$$

e

$$N_n = N_{cluster} \frac{[n(f - 1)]!}{[n(f - 2) + 1]! N!} p^{n-1} (1 - p)^{n(f-2)+1} =$$

Vicino alla percolazione  $N_n$  ha un comportamento a legge di potenza, con esponente  $-1.5$ , e con un cut-off esponenziale.

### 1.3 Bond percolation sul reticolo di Bethe

Il reticolo di Bethe e' un reticolo senza *loops*, in cui ogni sito e' connesso con  $z$  vicini. L'assenza di strutture cicliche consente il calcolo analitico delle proprieta' percolative. Iniziamo dal calcolo di  $p_c$  per bond percolation. Se chiamiamo  $p$  la probabilita' di esistenza di un legame, la probabilita' che un sito arbitrario scelto come origine sia connesso ad uno dei siti distanti un passo reticolare e'  $C_1 = zp$ . La probabilita' che sia connesso ad uno dei siti distanti due e'  $C_2 = (z - 1)pC_1$ . Infatti ci sono  $z(z - 1)$  siti distanti due e per essere connesso a ciascuno servono due bond ( $p^2$ ). La probabilita' che sia connesso ad un sito distante  $N$  passi sara'  $C_N = (z - 1)pC_{N-1} = [(z - 1)p]^{N-1} C_1$ . La probabilita' che il sito centrale sia connesso con l'infinito sara' zero se  $(z - 1)p < 1$  e diversa da zero  $(z - 1)p > 1$ . Il valore critico e' dunque dato da

$$p_c = \frac{1}{z - 1} \tag{22}$$

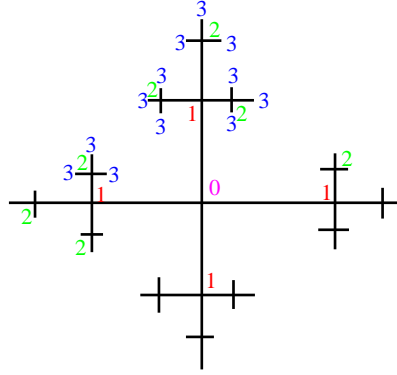


Figure 2: Bethe Lattice

Stimiamo ora frazione di particelle che appartengono al cluster infinito.

Come passo preliminare, calcoliamo  $Q(p)$ , definita come la probabilita' che un sito non sia connesso ad infinito attraverso una specifica branca.

Se consideriamo un sito arbitrario ed una branca, la probabilita'  $Q(p)$  per quella branca puo' essere scritta come

$$Q(p) = 1 - p + pQ(p)^{z-1} \quad (23)$$

poiche' e' "vuoto" con probabilita'  $1 - p$  e "pieno" con probabilita'  $p$ . Se e' pieno, non andra' ad infinito solo se tutte le  $z - 1$  sottobranche non sono connesse.

La soluzione dell' equazione precedente ci da la dipendenza da  $p$  di  $Q(p)$ . Nel caso risolubile analiticamente di  $z = 3$ , abbiamo

$$Q(p) = 1 - p + pQ(p)^2 \quad (24)$$

che ha soluzione

$$Q(p) = \frac{1 \pm (1 - 2p)}{2p} \quad (25)$$

La soluzione  $Q(p) = 1$  e' sempre presente. La seconda soluzione

$$Q(p) = \frac{1 - p}{p}$$

appare solo quando  $Q(p) < 1$  cioe' per  $p > 1/2 = p_c$ . Quindi, per  $p > p_c$ ,  $1 - Q(p)$ , che e' la probabilita' che un legame arbitrariamente scelto sia connesso ad infinito diviene non nulla.

Calcoliamo ora  $P_\infty$ , la probabilita' che un sito scelto a caso appartenga al cluster infinito. Naturalmente  $P_\infty = 0$  per  $p < p_c$ . Il sito e' connesso ad infinito se nessuna delle branche e' connessa ad infinito ( $Q(p)^z$ ). Dunque

$$P_\infty = 1 - Q(p)^z \quad (26)$$

Per  $p < p_c$ ,  $Q(p) = 1$  e dunque  $P_\infty = 0$ . Per studiare il comportamento di  $P_\infty$  intorno  $p_c$  guardiamo esplicitamente il caso  $z = 3$ , per il quale

$$P_\infty = \left[ 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^3 \right] \quad (27)$$

Intorno a  $p_c$

$$\begin{aligned} \frac{dP_\infty}{dp} &= \left[ -3 \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \frac{-p-1+p}{p^2} \right] \\ P_\infty &\approx \left[ 3 \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \frac{1}{p^2} \right]_{p=p_c} (p - p_c) = 12(p - p_c) \end{aligned} \quad (28)$$

$P_\infty = 0$  cresce dunque con una legge di potenza intorno a  $p_c$  con esponente  $\beta = 1$ , tipico esponente di campo medio.

Esaminiamo ora il mean cluster size  $S$ , definito come dimensione del cluster media.  $S$  indica la dimensione media del cluster a cui appartiene un sito arbitrario. Chiamiamo con  $T$  la dimensione media del cluster di una branca del reticolo di Bethe. Anche per  $T$  e' possibile scrivere una relazione di ricorrenza

$$T = p(1 + (z-1)T) + (1-p)0 \quad (29)$$

$$T = p/[1 - p(z-1)] = \frac{pp_c}{p_c - p} \quad (30)$$

Questa espressione indica che il cluster size di una branca arbitraria ha la stessa dimensione media del cluster size di ogni sottobranca.

Per calcolare ora  $S$ , scegliamo un sito arbitrario e scriviamo (sostituendo poi  $z = \frac{1+p_c}{p_c}$ )

$$S = 1 + zT = p_c \frac{1+p}{p_c - p} \sim (p_c - p)^{-1} \quad (31)$$

Il mean cluster size diverge con potenza  $\gamma = -1$

Diamo ora uno sguardo alla distribuzione delle dimensioni dei clusters. Qui entra molto chiaramente la topologia del reticolo di Bethe, perche' fa si che ogni cluster, indipendentemente dalla sua forma, ha lo stesso perimetro (definito come numero di legami confinanti con il cluster, o numero di siti vuoti confinanti con il cluster). Questa proprieta' (che e' vera in una dimensione ed in Bethe), consente di scrivere immediatamente

$$n_s = g_s p^s (1-p)^{t_s} \quad (32)$$

dove  $t_s$  e' il perimetro e  $g_s$  e' un termine combinatoriale che dice in quanti modi si puo' costruire un cluster di size  $s$ . Considerando site percolation, il primo sito ha  $z$  perimetri, ogni sito aggiunto, consuma un sito perimetrale ma ne aggiunge  $z - 1$ . Da qui  $t_s = z + (s - 1)(z - 2) = 2 + s(z - 2)$ . Poiche'  $g_s$  e' difficile da calcolare, consideriamo il rapporto tra  $n_s(p)$  e  $n_s(p_c)$ .

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \frac{(1-p)^2}{(1-p_c)^2} \frac{[p(1-p)^{(z-2)}]^s}{[p_c(1-p_c)^{(z-2)}]^s} \quad (33)$$

Se espandiamo  $y \equiv \frac{p(1-p)^{(z-2)}}{p_c(1-p_c)^{(z-2)}}$  intorno a  $p_c$  troviamo (sempre sostituendo  $z$  con  $p_c$

$$y \approx 1 + \frac{(p - p_c)^2}{2p_c^2(p_c - 1)} \quad (34)$$

Da cui possiamo scrivere

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \approx \left(1 + \frac{(p - p_c)^2}{2p_c^2(p_c - 1)}\right)^s = e^{s \log \left(1 + \frac{(p - p_c)^2}{2p_c^2(p_c - 1)}\right)} = e^{-cs} \quad (35)$$

con  $c = \frac{(p - p_c)^2}{2p_c^2(p_c - 1)}$

La conclusione di questo calcolo e' che, vicino a  $p_c$ ,

$$n_s(p) = n_s(p_c) e^{-cs} \quad (36)$$

dove, lo ricordiamo,  $n_s(p_c)$  ingloba  $g_s$ . Invece di calcolare (cosa possibile ma lunga per Bethe)  $g_s$ , prendiamo la soluzione per  $n_s(p_c)$  e continuiamo da li'. Questa soluzione, che per Bethe e' calcolabile analiticamente, diviene una unsatz per tutti gli altri casi. Assumiamo dunque che

$$n_s(p_c) \sim s^{-\tau} \quad (37)$$

e dunque

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} e^{-cs} \quad (38)$$

L'esponente  $\tau$  puo' essere calcolato per consistenza. Infatti,  $S = \sum_s s^2 n_s$ . Possiamo scrivere

$$S = \sum s^{2-\tau} e^{-cs} \quad (39)$$

e, vicino a  $p_c$  dove il

$$S = \int_0^\infty s^{2-\tau} e^{-cs} ds \quad (40)$$

$$S = c^{\tau-3} \int_0^\infty (cs)^{2-\tau} e^{-cs} d(cs) \sim c^{\tau-3} \quad (41)$$

Poiche' sappiamo che  $S \sim (p_c - p)^{-1}$  dobbiamo concludere che  $2(\tau - 3) = -1$ , dove il 2 nasce dal fatto che  $c \sim (p - p_c)^2$ . Quindi troviamo  $\tau = \frac{5}{2}$ .

In sintesi, due esponenti insiti in  $n_s$  ( $\tau$  e l'esponente che controlla  $c$ ) determinano il valore di  $\gamma$  (e, si puo' mostrare, anche di  $P_\infty$ .)

## 2 Ipotesi di scaling

Quanto abbiamo imparato in una dimensione ed in Bethe suggerisce una validita' generale di  $n_s(p)$  vicino  $p_c$ . La teoria della percolazione postula che  $n_s(p)$  sia scrivibile vicino  $p_c$  come

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} f[s^\sigma(p - p_c)] \quad (42)$$

dove  $f[z]$  e' una funzione di scala, dipendente dal modello, con delle opportune proprieta'. Vediamo come dal cluster size distribution cosi' definito (esponenti  $\tau$  e  $\sigma$ ) nascono le relazioni con gli esponenti  $\beta$  e  $\gamma$ . La relazione con  $\gamma$  si ottiene ripetendo quanto fatto per il calcolo di  $S$  si trova

$$\gamma = (\tau - 3)/\sigma \quad (43)$$

Senza alcuna pretesa di eccessiva formalita', possiamo ricavare la relazione per  $P_\infty$  a partire dal fatto che  $P_\infty + \sum s n_s = p$ . Poiche' a'  $p_c$ ,  $P_\infty = 0$  possiamo scrivere

$$P_\infty + \sum s(n_s - n_s(p_c)) = p - p_c \quad (44)$$

o, nell'ipotesi di scaling, trascurando termini in  $O(p - p_c)$  (che se del caso possono essere aggiunti a posteriori)

$$P_\infty = \int s^{1-\tau} (f[0] - f[z]) ds \quad (45)$$

Passando da  $ds$  a  $dz$  con  $dz = \sigma s^{\sigma-1}(p - p_c)ds = z/s ds$

$$P_\infty = \int s^{2-\tau} (f[0] - f[z]) dz/z = (p - p_c)^{-\frac{2-\tau}{\sigma}} \int z^{(2-\tau)/\sigma} (f[0] - f[z]) dz/z \quad (46)$$

$$P_\infty \sim (p - p_c)^{-(2-\tau)/\sigma} \quad (47)$$

da cui

$$\beta = \frac{2 - \tau}{\sigma} \quad (48)$$

### 3 La struttura dei clusters vicino $p_c$

Vicino  $p_c$  il sistema e' composto da clusters di tutte le dimensioni. Questi clusters hanno un raggio di girazione  $R_s$  che scala con la size del cluster  $s$ . Se fossero clusters compatti sapremmo gia' che  $R_s \sim s^{\frac{1}{d}}$ . Ma in linea di principio, oggetti ramificati come i cluster di percolazione possono scalare con esponenti diversi  $D < d$ . In tutta generalita' assumiamo  $R_s \sim s^{\frac{1}{D}}$ . La dimensione frattale dei clusters controlla l'esponente critico per la divergenza della lunghezza di connettivita'. Infatti la connettivita' misura la size media dei clusters.

Definiamo la lunghezza di connettivita' come

$$\xi^2 = \frac{\sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (49)$$

dove ogni cluster di size  $s$  contribuisce con  $s^2$  distanze. Stiamo dunque calcolando la distanza media (al quadrato) di tutte le coppie connesse). Immediatamente vediamo, con le stesse tecniche di prima, che

$$\xi^2 = \frac{(p - p_c)^{-\frac{2/D+3-\tau}{\sigma}}}{(p - p_c)^{-\frac{3-\tau}{\sigma}}} \quad (50)$$

da cui

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu} = (p - p_c)^{-\frac{1}{D\sigma}} \quad (51)$$

che da'

$$\nu = \frac{1}{D\sigma} \quad (52)$$

## 4 Il caso risolubile esattamente di Flory-Stockmayer

Nel caso di particelle con funzionalita'  $f$  che si aggregano senza formare loop chiuse, e' possibile mostrare che la distribuzione dei clusters e' data da

$$N_n = N(1 - p_b)^f \frac{f(fn - n)!}{n!(fn - 2n + 2)!} [p_b(1 - p_b)^{f-2}]^{n-1} \quad (53)$$

e che la percolazione e' raggiunta quando  $p_b^c = \frac{1}{f-1}$ . La struttura dei clusters a  $p_b^c$  e' dunque data da

$$N_n(p_b^c) = N \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^f \frac{f(fn - n)!}{n!(fn - 2n + 2)!} \left[ \frac{1}{f-1} \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^{f-2} \right]^{n-1}$$

Approssimando i termini fattoriali usando la relazione di Stirling

$$\ln m! = m \ln(m) - m + \frac{1}{2} \ln(2\pi m)$$

$$\begin{aligned} \ln N_n = \ln N + f \ln \frac{f-2}{f-1} + \ln f + [(fn-n) \ln(fn-n) - (fn-n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-n))] - [n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)] - \\ [(fn-2n+2) \ln(fn-2n+2) - (fn-2n+2) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-2n+2))] + (n-1) \ln \left[ \frac{1}{f-1} \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^{f-2} \right] \end{aligned}$$

Scrivendo

$$(fn - 2n + 2) = n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right]$$

il termine

$$\begin{aligned} (fn - 2n + 2) \ln(fn - 2n + 2) = n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] [\ln n(f - 2) + \ln \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right]] \approx \\ n(f - 2) \ln n(f - 2) + 2 \ln n(f - 2) - n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] \frac{2}{n(f - 2)} \approx n(f - 2) \ln n(f - 2) + 2 \ln n(f - 2) - 2 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\frac{1}{2} \ln(2\pi(fn - 2n + 2)) = \frac{1}{2} \ln(2\pi n(f - 2)) + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n(f - 2)) - \frac{1}{n(f - 2)}$$

Troviamo cosi'

$$\begin{aligned}\ln N_n/N &= f \ln \frac{f-2}{f-1} + \ln f + [n(f-1) \ln n + n(f-1) \ln(f-1) - (fn-n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-n))] - [n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)] \\ &\quad - [n(f-2) \ln n + n(f-2) \ln(f-2) - n(f-2) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(f-2)n) + 2 \ln[n(f-2)] - 2 - \frac{1}{n(f-2)}] \\ &\quad + (n-1) \ln \frac{1}{f-1} + (n-1)(f-2) \ln \left( \frac{f-2}{f-1} \right)\end{aligned}$$

ed ancora

$$\begin{aligned}\ln(N_n/N) &= f \ln \frac{f-2}{f-1} + \ln f + [nf \ln n - \cancel{n \ln n} + n(f-1) \ln(f-1) - nf + \cancel{n} + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(f-1))] \\ &\quad - [\cancel{n \ln n} - \cancel{n} + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)] - \\ &\quad [nf \ln n - \cancel{2 \ln n} + n(f-2) \ln(f-2) - nf + \cancel{2n} + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(f-2)) + 2 \ln[n(f-2)] - 2 - \frac{1}{n(f-2)}] \\ &\quad + (n-1) \ln \frac{1}{f-1} + (n-1)(f-2) \ln \left( \frac{f-2}{f-1} \right) \\ \ln(N_n/N) &= f \ln(f-2) - f \ln(f-1) + \ln f + \cancel{nf \ln n} + n(f-1) \ln(f-1) - \cancel{nf} + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(f-1) \\ &\quad - \cancel{nf \ln n} - n(f-2) \ln(f-2) + \cancel{nf} - \frac{1}{2} \ln(2\pi n) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(f-2) - 2 \ln[n(f-2)] + 2 + \frac{1}{n(f-2)} - (n-1) \ln(f-1) + \\ &\quad (n-1)(f-2) \ln(f-2) - (n-1)(f-2) \ln(f-1)\end{aligned}$$

e raggruppando i termini in  $\ln(f-1)$  e  $\ln(f-2)$ ,

$$\begin{aligned}\ln(N_n/N) &= \ln(f-2)[f - n(f-2) - \frac{1}{2} + (n-1)(f-2) - 2] \\ &\quad + \ln(f-1)[-f + n(f-1) + \frac{1}{2} - (n-1) - (n-1)(f-2)] \\ &\quad + \ln f - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - 2 \ln n + \frac{1}{n(f-2)}\end{aligned}$$

si trova cosi'

$$\begin{aligned}
\ln(N_n/N) &= -\frac{1}{2} \ln(f-2) \\
&\quad -\frac{1}{2} \ln(f-1) \\
&\quad + \ln f - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{5}{2} \ln n + \frac{1}{n(f-2)}
\end{aligned}$$

cioe' una legge di potenza per grandi  $n$ . Per grandi  $n$ ,  $e^{-\frac{1}{n(f-2)}} = 1$  e

$$N_n(p_b^c) = N \frac{f}{\sqrt{(f-1)(f-2)2\pi}} n^{-\frac{5}{2}}$$

#### 4.1 Riassunto degli esponenti

Per Bethe:  $\tau = 5/2, \sigma = 1/2, D = 4$ .

In 3-d  $\tau = 2.18, \sigma = 0.45, D = 2.53$ .

Le relazioni tra esponenti critici e esponenti geometrici sono

$$\gamma = \frac{3-\tau}{\sigma} \tag{54}$$

$$\beta = \frac{\tau-2}{\sigma} \tag{55}$$

$$\nu = \frac{1}{D\sigma} \tag{56}$$