# 1 Parseval

Mostriamo qui che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(p)|^2 dp$$

dove $\psi(x)$ e $g(k)$ sono legate da una trasformata di Fourier:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p)$$

e

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

Dimostrazione:

$$|\psi|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x)^* \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \bar{\psi}(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x)^* e^{ipx/\hbar} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \bar{\psi}(p) \bar{\psi}(p)^* = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\bar{\psi}(p)|^2$$

# 2 Esercizi:1

In un problema unidimensionale, consideriamo una particella la cui funzione d' onda e'

$$\psi(x) = N \frac{e^{ip_0 x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

con $a$ e $p_0$ costanti reali.

- Quanto vale $N$ ?
- Quale e' la probabilita' di trovare la particella tra $-a/\sqrt{3}$ e $a/\sqrt{3}$ ?
- Quale e' il valore medio di $P$

## 2.1 Risoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad \rightarrow \quad N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = N^2 \frac{\pi}{a} = 1$$

$$N = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

La probabilita' di trovare la particella tra $-a/\sqrt{3}$ e $a/\sqrt{3}$ e'

$$P = \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} |\psi(x)|^2 dx = \frac{a}{\pi}\int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a} arctg(x/a)|_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\pi} 2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$$

Il valore medio di P lo otteniamo calcolando

$$< P >= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \frac{d}{dx}\psi(x) dx =$$

$$-i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \frac{ip_0}{\hbar}\psi(x) dx - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* N e^{ip_0 x/\hbar} \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx =$$

$$p_0 - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* N e^{ip_0 x/\hbar} \frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} \frac{-1}{2} 2x dx = p_0$$

essendo l' ultimo integrando dispari.

# 3 Esercizi: 2

La funzione d' onda di una particella in una dimensione e' al tempo $t = 0$

$$\psi(x,t) = N \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|/k_0} e^{ikx}$$

con $k_0$ e $N$ costanti.

- Quanto vale $N$ ?
- Quale e' la probabilita $\mathcal{P}$ che misurando $P$ al tempo 0 si trovi un risultato compreso tra -$p_1$ e $p_1$ ?
- Quale sarebbe la risposta alla domanda precedente al tempo $t$ ?
- Quale e' la forma del pacchetto d' onde a t=0?

Occorre prima di tutto normalizzare la funzione d' onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ N \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|/k_0} e^{ikx} \right] \left[ N \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-|k'|/k_0} e^{-ik'x} \right]$$

$$= N^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk dk' e^{-|k|/k_0} e^{-|k'|/k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} e^{-ik'x}$$

$$= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' e^{-|k|/k_0} e^{-|k'|/k_0} 2\pi\delta(k-k') = 2\pi N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-2|k|/k_0} = 4\pi N^2 \int_{0}^{\infty} dk e^{-2k/k_0} =$$

$$= 4\pi N^2 \frac{k_0}{2} \quad \rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0}}$$

e

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|/k_0} e^{ikx}$$

che possiamo scrivere come

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

identificando

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{k_0}} \exp(-|k|/k_0)$$

La probabilita' di trovare un certo $k$ e' $|g(k)|^2$. Quindi, passando a $t = 2k/k_0$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{k_0} 2 \int_0^{p_1/\hbar} \exp(-2k/k_0) dk = \frac{1}{k_0} k_0 \int_0^{2p_1/\hbar k_0} \exp(-t) dt = [1 - \exp(-2p_1/\hbar k_0)]$$

che tende a 1 per $p_1 \to \infty$.

Per trovare il pacchetto d' onde dobbiamo risolvere l' integrale in $k$

$$\sqrt{k_0}\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|/k_0} e^{ikx} = \int_{-\infty}^{0} dk e^{k/k_0} e^{ikx} + \int_{0}^{\infty} dk e^{-k/k_0} e^{ikx}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dk e^{k(k_0^{-1}+ix)} + \int_{0}^{\infty} dk e^{-k(k_0^{-1}-ix)} = \frac{1}{(k_0^{-1}+ix)} \int_{-\infty}^{0} dt e^{t} + \frac{1}{(k_0^{-1}-ix)} \int_{0}^{\infty} dt e^{-t}$$

(con la condizione reale di $k_0^{-1} \pm ix > 0$)

$$= \frac{1}{(k_0^{-1}+ix)} + \frac{1}{(k_0^{-1}-ix)} = \frac{2k_0^{-1}}{k_0^{-2}+x^2} = \frac{2k_0}{1+k_0^2 x^2}$$

e

$$|\psi(x,0)|^2 = \frac{4k_0}{(1+k_0^2x^2)^2}$$

# 4 Esercizi: 3

Consideriamo una particella in una buca di potenziale infinita di ampiezza $a$ ($V(x) = \infty, x < 0, x > a$). Chiamiamo $|\psi_n >$ e $E_n$ gli autovettori ed autovalori di $H$. Come sappiamo

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = n^2 E_1$$

Assumiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia in

$$|\phi(0)>= a_1|\psi_1> +a_2|\psi_2> +a_3|\psi_3> +a_4|\psi_4>$$

- Con quale probabilita' misuriamo al tempo 0 un valore dell' energia minore di $3E_1$?
- Quale e media e varianza di $H$ ?
- Quale e' $|\psi(t)>$ ?
- Misurando H si trova $16E_1$. Quale e' la funzione d' onda dopo la misura ? Come evolve per tempi successivi ? Cosa si trovera' misurando H di nuovo ?

### 4.1 risoluzione

- Con probabilita' $|a_1|^2$.
-
  $$< \phi|H|\psi >= [a_1^* < \psi_1|+a_2^* < \psi_2|+a_3^* < \psi_3|+a_4^* < \psi_4|]H[a_1|\psi_1> +a_2|\psi_2> +a_3|\psi_3> +a_4|\psi_4>$$
  $$= \sum_{i=1}^{4} |a_i|^2 E_i$$
  ed analogamente
  $$< \phi|H^2|\psi >= \sum_{i=1}^{4} |a_i|^2 E_i^2$$
-
  $$|\phi(t)>= a_1|\psi_1> e^{-iE_1t/\hbar} + a_2|\psi_2> e^{-iE_2t/\hbar} + a_3|\psi_3> e^{-iE_3t/\hbar} + a_4|\psi_4> e^{-iE_4t/\hbar}$$
- $E_4 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$. Dopo la misura $|\psi(t) >= |\psi_4 > e^{-iE_4t/\hbar}$ e rimarra' sempre in quell' autostato.

## 5 Esercizi: 4

Consideriamo una particella di massa $m$ con Hamiltoniana data da

$$H = H_x + H_y = \frac{P_x^2}{2m} + V(x) + \frac{P_y^2}{2m} + V(y)$$

dove $V$ indica una buca di potenziale infinita di ampiezza $a$ ($V(x) = \infty, x < 0, x > a$ e $(V(y) = \infty, y < 0, y > a)$.

- Tra $\{H\}$, $\{H_x\}$, $\{H_x, H_y\}$, $\{H, H_x\}$ quale set forma un CSCO ?
- Consideriamo la funzione d' onda

$$\psi(x,y) = N\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})\sin(\frac{2\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{a})$$

dentro la buca e zero fuori.

  - Quale e' il valore di $< H >$
  - Se si misura $H$ quali valori si possono ottenere e con che probabilita' ?
  - Se si misura $H_x$ quali valori si possono ottenere e con che probabilita' ?
  - Se si trova misurando $H_x$ $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ cosa si trovera' in misure successive di $H_y$ ?
  - Misuriamo simultaneamente $H_x$ e $P_y$. Quale e' la probabilita' di trovare

$$E_x = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

e $p_0 < p_y < p_o + dp$ ?

## 5.1 Risoluzione

Ricordiamo la formula

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

La funzione d'onda puo' dunque essere scritta come

$$\psi(x,y) = N\left[\sin(\frac{3\pi x}{a}) + \sin(\frac{\pi x}{a})\right]\left[\sin(\frac{3\pi y}{a}) + \sin(\frac{\pi y}{a})\right]$$

Ricordando che le autofunzioni di una particella in una buca infinita sono

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}) \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

possiamo identificare $N$ con $\frac{1}{\sqrt{4}}\frac{2}{a}$ e riscrivere

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4}}\left[\phi_1(x) + \phi_3(x)\right]\left[\phi_1(y) + \phi_3(y)\right] = \frac{1}{\sqrt{4}}\left[\phi_1(x)\phi_1(y) + \phi_1(x)\phi_3(y) + \phi_3(x)\phi_1(y) + \phi_3(x)\phi_3(y)\right]$$

Ad occhio si puo' verificare che con il fattore $\frac{1}{\sqrt{4}}$ la funzione d'onda e' propriamente normalizzata. Dunque per esempio

$$H_x|\psi(x,y)>= \frac{1}{\sqrt{4}}\left[E_1\phi_1(x)\phi_1(y) + E_1\phi_1(x)\phi_3(y) + E_3\phi_3(x)\phi_1(y) + E_3\phi_3(x)\phi_3(y)\right]$$

- Per trovare $< H_x >$ dobbiamo calcolare

$$< \psi(x,y)|H_x|\psi(x,y) >= \frac{1}{4}\left[2E_1 + 2E_3\right] = \frac{E_1+E_3}{2}$$

e analogamente per $H_y$. Cosi' troviamo

$$< H >= E_1 + E_3$$

- Se si misura $H_x$ con uguale probabilita' si trova $E_1$ o $E_3$. Analogamente per $H_y$. Quindi i possibili risultati di $H$ sono

$$2E_1 = 25\% \qquad 2E_3 = 25\% \qquad E_1 + E_3 = 50\%$$

- La misura su $x$ non incide sulle future misure su $y$. Quindi la probabilita' di trovare misurando $H_y$ $E_1$ o $E_3$ resta inalterata

- La probabilita' $\mathcal{P}$ di trovare $E_3$ misurando $H_x$ e' 0.5. Questo numero va moltiplicato per la probabilita' di trovare $p_0 < p_y < p_o + dp$. Se trasformiamo la funzione d'onda nella base dei momenti (basta trasformare solo la parte in $y$) troviamo (stando attenti a scrivere correttamente la normalizzazione della parte in $y$)

$$\bar{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \left[\phi_1(y) + \phi_3(y)\right] e^{-ipx/\hbar}dx$$

e la probabilita' richiesta e' dunque

$$\mathcal{P} = 0.5|\bar{\phi}(p_0)|^2 dp$$

I calcoli espliciti possono essere sviluppati, scrivendo $e^{-ipx/\hbar} = \cos(ipx/\hbar) + i\sin(ipx/\hbar)$ e ricordando che

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

e

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

# 6 Esercizi:5

Consideriamo un sistema fisico il cui spazio tridimensionale e' definito dalla base ortonormale formata dai 3 kets $|u_1>, |u_2>$ e $|u_3>$. In questa base $H$ e i due osservabili $A$ e $B$ sono scrivibili come

$$H = \hbar\omega_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad A = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B = b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

con $\omega_0$, $a$ e $b$ costanti reali positive. Al tempo $t=0$ il sistema e' nello stato

$$|\psi(0)>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1>+\frac{1}{2}|u_2>+\frac{1}{2}|u_3>$$

- Al tempo $t=0$ viene misurata l' energia. Quali valori si trovano e con che probabilita' ? Quale e' il valore medio di $H$ e la varianza di $H$ al tempo $t=0$?
- Al tempo 0 si misura $A$ invece che $H$. Che risultati si possono trovare e con che probabilita' ? Quale e' lo stato del sistema subito dopo la misura ?
- Scrivere $|\psi(t)>$
- Calcolare $<A(t)>$ e $<B(t)>$
- Al tempo $t$ quali risultati si trovano se si misura $A$ ? E se si misura $B$ ?

## 6.1 risoluzione

- Nella base scelta $H$ e' diagonale. Dunque se si misura $H$ si trova 1 con probabilita' 0.5 e 2 con probabilita' 0.5 (in unita' di $\hbar\omega_0$). Il valore medio di $H$ e'

$$<H>=\frac{1}{2}1+\frac{1}{4}2+\frac{1}{4}2=1.5\hbar\omega_0$$

mentre

$$<H^2>=\frac{1}{2}1+\frac{1}{4}4+\frac{1}{4}4=2.5\hbar^2\omega_0^2$$

La varianza e' dunque

$$\Delta H=\sqrt{2.5-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

- Si troveranno gli autovalori di $A$ che hanno un prodotto scalare non nullo con $|\psi(0)>$. Se diagonalizziamo $A$ troviamo che la base in cui $A$ e' diagonale e'

$$|a_1>=|u_1> \qquad |a_2>=\sqrt{\frac{1}{2}}(|u_2>+|u_3>) \qquad |a_3>=\sqrt{\frac{1}{2}}(|u_2>-|u_3>)$$

e gli autovalori corrispondenti sono $a$, $a$ e $-a$. Quindi si trovera' $a$ con probabilita' 1/2, di nuovo $a$ con probabilita'

$$|\sqrt{\frac{1}{2}}(<u_2|+<u_3|)(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1>+\frac{1}{2}|u_2>+\frac{1}{2}|u_3>)|^2=|\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}|^2=\frac{1}{2}$$

e $-a$ con probabilita'

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(< u_2| - < u_3|)(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1 > + \frac{1}{2}|u_2 > + \frac{1}{2}|u_3 >)|^2 = |\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}|^2 = 0$$

Dunque si trovera' sempre $a$. Potevamo aspettarcelo perche' nella base di $A$ $|\psi(0) >= \sqrt{\frac{1}{2}}(|a_1 > + |a_2 >)$ Dopo la misura, la funzione d' onda rimarra' identica a quella precedente.

- $$|\psi(t) >= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1 > e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2}|u_2 > e^{-i2\omega_0 t} + \frac{1}{2}|u_3 > e^{-i2\omega_0 t}$$

- Calcolare $< A(t) >$ e $< B(t) >$ Calcoliamo il commutatore tra $H$ e $A$

$$[H, A]/(\hbar\omega_0 a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Visto che $[H, A] = 0$, $< A > (t)$ e' uguale al valore al tempo 0.

Vediamo invece $< B >$. Possiamo fare il calcolo matricialmente

$$\frac{B|\psi(t) >}{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{< \psi(t)|B|\psi(t) >}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}\frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{i2\omega_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{i2\omega_0 t}\frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-i\omega_0 t} + e^{+i\omega_0 t}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}$$

- Visto che $A$ commuta con $H$, qualsiasi misura di $A$ non perturba il sistema e dunque i risultati non cambiano. Se misuriamo $B$ invece proietteremo il sistema in uno degli autostati di $B$. La probabilita' dei possibili valori di $B$ cambia nel tempo. Si vede guardando la matrice di $B$ che

$$|b_3 >= |u_3 > \qquad |b_1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}(|u_1 > + |u_2 >) \qquad |b_2 >= \sqrt{\frac{1}{2}}(|u_1 > - |u_2 >)$$