

Questa parte delle lezioni segue il libro Cohen-Tannoudjim, Diu, Laloë, Quantum Mechanics.

1 Importanza dell'oscillatore armonico in fisica

Questo capitolo è dedicato allo studio di un sistema fisico particolarmente importante: l'oscillatore armonico monodimensionale. L'esempio più semplice di un tale sistema è quello di una particella di massa m costretta a muoversi in un potenziale che dipende solo da x e che ha la forma:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

(dove k è una costante positiva reale). La particella viene attratta verso il punto $x = 0$ [il minimo di $V(x)$, corrispondente alla posizione di equilibrio stabile] da una forza

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

proporzionale alla distanza x tra la particella e il punto $x = 0$. Sappiamo che nella meccanica classica, la traiettoria del punto materiale è una oscillazione sinusoidale di frequenza angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

In realtà, un gran numero di sistemi sono governati (almeno approssimativamente) dalle equazioni dell'oscillatore armonico. Ogni volta che si studia il comportamento di un sistema fisico in prossimità di una posizione di equilibrio stabile, si arriva a equazioni che, nel limite delle piccole oscillazioni, sono quelle di un oscillatore armonico. I risultati che otterremo in questo capitolo sono applicabili, quindi, a tutta una serie di importanti fenomeni fisici - per esempio, le vibrazioni degli atomi di una molecola sulla loro posizione di equilibrio o le oscillazioni di atomi o ioni di un reticolo cristallino. L'oscillatore armonico è anche coinvolto nello studio dell'elettromagnetismo. Sappiamo che in una cavità esiste un numero infinito di possibili onde stazionarie (i modi normali della cavità). Il campo elettromagnetico può essere espanso in termini di questi modi e può essere mostrato, usando le equazioni di Maxwell, che ciascuno dei coefficienti di questa espansione (che descrive lo stato del campo a ogni istante) obbedisce a un'equazione differenziale che è identica a quella di un oscillatore armonico la cui frequenza angolare ω è quella del modo normale associato. In altre parole, il campo elettromagnetico è formalmente equivalente a un insieme di oscillatori armonici indipendenti. La quantizzazione del campo è ottenuta quantizzando questi oscillatori associati ai vari modi normali della cavità. Abbiamo visto, inoltre, che è stato lo studio del comportamento di questi oscillatori all'equilibrio termico (radiazione di corpo nero) che, storicamente, ha portato Planck a risolvere il problema del corpo nero.

L'oscillatore armonico svolge anche un ruolo importante nella descrizione di un insieme di particelle identiche che si trovano tutte nello stesso stato quantistico (devono ovviamente

essere bosoni). Come vedremo dopo, questo nasce dal fatto che i livelli di energia di un oscillatore armonico sono equidistanti, la spaziatura tra due livelli adiacenti pari a $\hbar\omega$. Con il livello di energia indicato dal numero intero n (situato a una distanza $n\hbar\omega$ sopra lo stato fondamentale) può quindi essere associato un set di n particelle identiche (o quanti), ognuna con un'energia $\hbar\omega$. La transizione dell'oscillatore dal livello n al livello $n + 1$ o $n - 1$ corrisponde alla creazione o distruzione di un quanto di energia $\hbar\omega$. In questo capitolo, introdurremo il operatori a^\dagger e a , che ci permettono di descrivere questa transizione dal livello n al livello $n + 1$ o $n - 1$. Questi operatori, chiamati operatori di creazione o distruzione, sono usati nella meccanica statistica quantistica e nella teoria dei campi quantistici.

Lo studio dettagliato dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica è quindi estremamente importante da un punto di vista fisico. Inoltre, è uno dei pochi sistemi per cui l'equazione di Schroedinger può essere risolta rigorosamente.

Utilizzeremo l'oscillatore armonico (e poi dopo il momento angolare) anche per mostrare come risolvere un'equazione agli autovalori trattando solo con gli operatori e le relazioni di commutazione.

2 Caso Classico: Richiami

L'equazione $F = ma$ per una particella in un potenziale armonico è

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

la cui soluzione generale è

$$x = x_M \cos(\omega t + \phi)$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$ e x_M e ϕ sono determinate dalle costanti di integrazione dalle condizioni iniziali. La particella oscilla quindi sinusoidalmente intorno all'origine, con un'ampiezza x_M e una frequenza angolare ω . L'energia cinetica della particella è

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

dove $p = m dx/dt$ è la quantità di moto della particella. L'energia totale è:

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Sostituendo la soluzione generale nella precedente espressione troviamo:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_M^2$$

L'energia della particella e' quindi indipendente dal tempo (questa e' una proprieta' generale di sistemi conservativi) e puo' assumere qualsiasi valore positivo (o zero), poiche' x_M e' a priori arbitrario. Se fissiamo l'energia totale E , troviamo che il moto e' compreso tra $x = \pm x_M$. In questi punti l'energia potenziale e' massima e uguale a E , e l'energia cinetica e' zero. D'altro canto, in $x = 0$, l'energia potenziale e' zero e l'energia cinetica e' massima.

L'importanza del potenziale armonico deriva dalla seguente considerazione. Considera un potenziale arbitrario $V(x)$ che ha un minimo a $x = x_0$. Espandendo la funzione $V(x)$ in una serie di Taylor intorno a x_0 otteniamo:

$$V(x) = a + b(x - x_0)^2 + c(x - x_0)^3 + \dots$$

I coefficienti di questa espansione sono dati da:

$$a = V(x_0) \quad b = \frac{1}{2!} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_0} \quad c = \frac{1}{3!} \frac{d^3 V}{dx^3} \Big|_{x_0}$$

e il termine lineare in $(x - x_0)$ e' zero poiche' x_0 corrisponde al minimo di $V(x)$. La forza derivata dal potenziale $V(x)$ e' nell'intorno di x_0

$$F_x = -2b(x - x_0) - 3c(x - x_0)^2 + \dots$$

Poiche' $x = x_0$ rappresenta un minimo, il coefficiente b e' positivo. Il punto $x - x_0$ corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile per la particella. Inoltre, per $(x - x_0)$ sufficientemente piccolo, F_x e $(x - x_0)$ hanno segni opposti poiche' b e' positivo. Se l'ampiezza del movimento della particella e' sufficiente piccolo il termine cubico in $V(x)$ puo' essere trascurato rispetto a quelli precedenti tornando al caso dell'oscillatore armonico con

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=x_0}}$$

Poiche' l'ampiezza del movimento deve rimanere piccola, l'energia del l'oscillatore armonico sara' anche essa piccola.

Per le energie piu' elevate, il modo della particella sara' periodico ma non sinusoidale. Se espandiamo la funzione $x(t)$ in una serie di Fourier troveremo, non uno, ma diversi termini sinusoidali. Diciamo in questo caso che abbiamo a che fare con un oscillatore anarmonico.

3 Oscillatore Armonico in una dimensione

La Hamiltoniana del sistema e'

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$$

ed essendo H indipendente dal tempo, quel che occorre risolvere e' l' equazione agli autovalori

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Alcune considerazioni:

- Gli autovalori sono positivi (sono sempre maggiori del minimo di $V(x)$).
- Le autofunzioni sono pari o dispari, poiche' $V(-x) = V(x)$.
- Lo spettro e' discreto, visto che il potenziale localizza

Prima di risolvere il problema, semplifichiamo la notazione passando a operatori adimensionali

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i \quad H = \hbar\omega \hat{H} \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

Ora dobbiamo risolvere

$$\hat{H}|\psi_\nu^i\rangle = \epsilon_\nu|\psi_\nu^i\rangle$$

dove in linea di principia abbiamo assunto la possibilita' che l' autovalore ϵ_ν sia degenero ($i = 1, \dots, g_\nu$)

Introduciamo ora due operatori a e a^\dagger , definiti da

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

In termini di a e a^\dagger gli operatori \hat{X} e \hat{P} sono

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \quad \hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

Il commutatore $[a, a^\dagger] = 1$. Infatti

$$aa^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + iPX - iXP) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + 1)$$

mentre

$$a^\dagger a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + i\hat{X}\hat{P} - i\hat{P}\hat{X}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1)$$

Quindi anche

$$\hat{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2} = aa^\dagger - \frac{1}{2}$$

Introduciamo adesso l' operatore $N = a^\dagger a$. A differenza di a e a^\dagger , N e' hermitiano (essendo H). Infatti $N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = N$. Gli autovalori di N sono gli stessi di \hat{H} .

Infine calcoliamo i commutatori di N con a e a^\dagger . Ricordandoci che $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ (che si dimostra facilmente sommando e sottraendo ACB)

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a]a = -a$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a^\dagger = a^\dagger$$

L'equazione da risolvere e' ora

$$N|\psi_\nu^i\rangle = \nu|\psi_\nu^i\rangle$$

Ora dimostriamo prima di tutto che gli autovalori ν sono positivi o nulli. Consideriamo il modulo quadro del vettore $a|\psi_\nu^i\rangle$

$$\|a|\psi_\nu^i\rangle\|^2 = \langle \psi_\nu^i | a^\dagger a |\psi_\nu^i\rangle = \langle \psi_\nu^i | N |\psi_\nu^i\rangle = \nu \langle \psi_\nu^i | \psi_\nu^i\rangle \geq 0$$

Segue anche che se $\nu = 0$, allora $a|\psi_0^i\rangle = 0$. Abbiamo appena visto che $\nu = \|a|\psi_\nu^i\rangle\|^2$. Quindi $a|\psi_0^i\rangle = 0$ per ogni i .

Passiamo ora a mostrare che se ν e' non nullo $a|\psi_\nu^i\rangle$ e' un autovettore di N con autovalore $\nu - 1$.

$$a|\psi_\nu^i\rangle = -[N, a]|\psi_\nu^i\rangle = (aN - Na)|\psi_\nu^i\rangle = \nu a|\psi_\nu^i\rangle - Na|\psi_\nu^i\rangle \rightarrow Na|\psi_\nu^i\rangle = (\nu - 1)a|\psi_\nu^i\rangle$$

In modo analogo si puo' dimostrare che $a^\dagger|\psi_\nu^i\rangle$ e' sempre un vettore non nullo e che $a^\dagger|\psi_\nu^i\rangle$ e' un autovettore di N con autovalore $\nu + 1$.

Ora mostriamo che lo spettro di N e' composto da numeri interi positivi o nulli (non negativi). Assumiamo che ν non sia intero e mostriamo che questa assunzione viola una delle proprieta' precedentemente dimostrate. Quindi, assumiamo che $n < \nu < n + 1$. Consideriamo ora successive applicazioni di a . Ciascuna di queste genera un autovettore con autovalore diminuito di uno. Fino a che non arriviamo a $0 < \nu < 1$. La successiva applicazione di a genererebbe un autovettore non nullo con autovalore negativo. E questo abbiamo visto essere impossibile. Se $\nu = n$ il problema non sorge, perche' quando dopo ripetute applicazioni di a si arriva a $|\psi_0^i\rangle$, a quel punto l' applicazione successiva di a genera un vettore nullo.

Ne consegue che in meccanica quantistica l' energia di un oscillatore armonico e' quantizzata

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

con $n = 0, 1, \dots, \infty$. Inoltre lo stato fondamentale ha energia non nulla $\hbar\omega/2$.

Il fatto che lo stato fondamentale non abbia energia nulla e' ancora una volta, come nel caso della particella in una buca infinita, una conseguenza del principio di indeterminazione che non consente di avere energia cinetica nulla e simultaneamente energia potenziale nulla.

Adesso possiamo passare alla rappresentazione spaziale delle funzioni d'onda. Iniziando da $\nu = 0$ possiamo scrivere, sostituendo la rappresentazione di a

$$a|\psi_0^i\rangle = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})|\psi_0^i\rangle = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \sqrt{\frac{i}{m\hbar\omega}}P\right)|\psi_0^i\rangle = 0$$

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\psi_0^i(x) = 0$$

la cui soluzione generale e' una gaussiana

$$\psi_0^i(x) = ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

dove c viene determinata con la normalizzazione. La soluzione mostra anche che lo stato fondamentale e' non degenere. Applicazioni successive di a^\dagger a $\psi_0^i(x)$ generano vettori proporzionali agli autovettori di N , cioe' tutti gli stati eccitati (anche essi non degeneri).

Per definire bene l'azione di a e a^\dagger consideriamo che

$$a^\dagger|\phi_n\rangle = A|\phi_{n+1}\rangle$$

cosi' che $|A|^2 = n + 1$. Cosi'

$$a^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle \quad a|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle$$

Includendo il coefficiente di proporzionalita' (assunto per convenzione reale) possiamo allora scrivere

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\psi_0\rangle$$

Calcoliamo adesso medie e varianze di \hat{X} e \hat{P} .

$$\langle \hat{X} \rangle = \langle \psi_n | \hat{X} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) | \psi_n \rangle = 0 \quad \langle \hat{P} \rangle = \langle \psi_n | \hat{P} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) | \psi_n \rangle = 0$$

e

$$\langle \hat{X}^2 \rangle = \langle \psi_n | \hat{X}^2 | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \frac{1}{2}(a + a^\dagger)^2 | \psi_n \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_n | aa + a^\dagger a^\dagger + aa^\dagger + a^\dagger a | \psi_n \rangle$$

e poiche' $[a, a^\dagger] = 1$, $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$, e dunque $aa^\dagger = N + 1$ da cui

$$\langle \hat{X}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_n | N + 1 + N | \psi_n \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

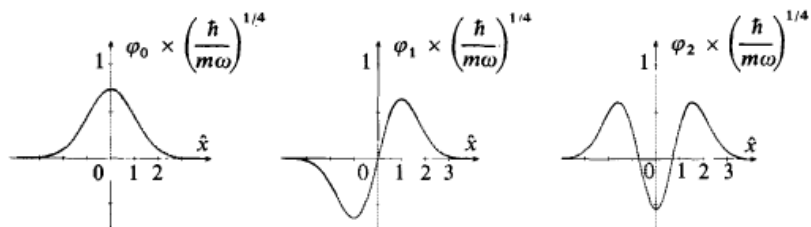


FIGURE 4
Wave functions associated with the first three levels of a harmonic oscillator.



FIGURE 5
Probability densities associated with the first three levels of a harmonic oscillator.

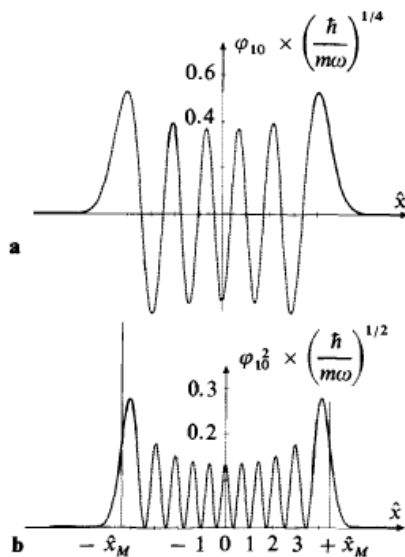


FIGURE 6
Shape of the wave function (fig. a) and of the probability density (fig. b) for the $n = 10$ level of a harmonic oscillator.

ed analogamente

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Passando a grandezze dimensionali abbiamo cosi' che

$$\Delta X \Delta P = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar$$

Avendo calcolato $\langle \hat{X}^2 \rangle$ e $\langle \hat{P}^2 \rangle$, troviamo che

$$\langle V(X) \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2} \quad \langle \frac{P^2}{2m} \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2}$$

esattamente come in fisica classica.

4 Evoluzione dei valori medi

Consideriamo un oscillatore armonico il cui stato a $t = 0$ e'

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |\phi_n\rangle$$

La funzione d' onda al tempo t e'

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-in\omega t} |\phi_n\rangle$$

Il valore medio di un generico osservabile e' dunque

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n(0)^* c_m(0) e^{-i(m-n)\omega t} \langle \phi_n | A | \phi_m \rangle$$

e quindi compariranno solo la frequenza fondamentale ω e le sue armoniche superiori.

Se $A = X$, troviamo

$$\langle \psi(t) | X | \psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n(0)^* c_m(0) e^{-i(m-n)\omega t} \langle \phi_n | X | \phi_m \rangle =$$

e poiche' $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega(m-n)t} c_n(0)^* c_m(0) \sqrt{m+1} \langle \phi_n | \phi_{m+1} \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(m-n)\omega t} c_n(0)^* c_m(0) \sqrt{m} \langle \phi_n | \phi_{m-1} \rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)^* c_{n-1}(0) e^{i\omega t} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)^* c_{n+1}(0) e^{-i\omega t} \sqrt{n+1} =$$

e riportando la prima sommatoria da 0

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(0)^* c_n(0) e^{i\omega t} \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)^* c_{n+1}(0) e^{-i\omega t} \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} 2 \operatorname{Re}(c_{n+1}(0)^* c_n(0) e^{i\omega t})$$

che mostra che l' unica frequenza che entra nella evoluzione temporale e' ω . Avremmo trovato lo stesso risultato guardando l' evoluzione del valore medio in termini di commutatore. Avevamo visto che quando $H = V(R) + P^2/2m$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X \rangle &= \frac{1}{m} \langle P \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle P \rangle &= - \langle \nabla V(X) \rangle = -m\omega^2 \langle X \rangle \end{aligned}$$

cioe' la stessa espressione classica

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle X \rangle = -\omega^2 \langle X \rangle$$

5 L' oscillatore armonico tridimensionale

Come esercizio. Trovare autofunzioni ed autovalori e degenerazione

6 Una particella carica in una buca armonica

Proviamo adesso a risolvere il problema di una particella carica in una buca di potenziale armonica in presenza di un campo elettrico \mathcal{E}

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 - q \mathcal{E} X$$

Sommando e sottraendo $q^2 \mathcal{E}^2 / 2m\omega^2$

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 - q \mathcal{E} X + \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} = \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(X - \frac{q \mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

Se cambiamo variabile

$$U = X - \frac{q \mathcal{E}}{m\omega^2}$$

la equazione di Schroedinger diventa

$$\left(\frac{P_U^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 U^2\right) |\psi\rangle = \left(E + \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right) |\psi\rangle$$

Gli autovalori saranno dunque

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

7 Oscillatori Accoppiati

Un problema interessante, che ci fa capire come sistemi di particelle interagenti con potenziali armonici possano essere trattati come oscillatori armonici indipendenti, e' costituito da due particelle in buche quadratiche accoppiate tra loro. La Hamiltoniana classica del problema e'

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x_2 + a)^2 + \lambda m\omega^2(x_1 - x_2)^2$$

Se facciamo un cambio di variabili e passiamo da x_1 e x_2 al centro di massa e distanza relativa

$$x_{CM} = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad x_R = x_1 - x_2 \quad v_{CM} = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \quad v_R = v_1 - v_2$$

Guardiamo come viene riscritta l' energia cinetica

$$m\frac{v_1^2}{2} + m\frac{v_2^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{2v_1v_2 - 2v_1v_2}{2} \right) = \frac{m}{2} \left(2v_{CM}^2 + \frac{1}{2}v_R^2 \right)$$

e se definiamo la massa totale e la massa ridotta come $M = 2m$ e $\mu = \frac{m}{2}$

$$m\frac{v_1^2}{2} + m\frac{v_2^2}{2} = \frac{M}{2}v_{CM}^2 + \frac{\mu}{2}v_R^2$$

Guardiamo adesso come viene riscritta l' energia potenziale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\omega^2(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x_2 + a)^2 + \lambda m\omega^2(x_1 - x_2)^2 &= \frac{1}{2}m\omega^2 [x_1^2 + a^2 - 2ax_1 + x_2^2 + a^2 + 2ax_2 + 2\lambda x_R^2] = \\ \frac{1}{2}m\omega^2 \left[\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} - 2ax_R + 2a^2 + 2\lambda x_R^2 \right] &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left[2x_{CM}^2 + \frac{x_R^2}{2} - 2ax_R + 2a^2 + 2\lambda x_R^2 \right] = \\ \frac{1}{2}m\omega^2 \left[2x_{CM}^2 + x_R^2 \left(\frac{1}{2} + 2\lambda \right) - 2ax_R + 2a^2 \right] &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left[2x_{CM}^2 + \frac{1 + 4\lambda}{2} \left(x_R^2 - \frac{4a}{1 + 4\lambda} x_R \right) + 2a^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m\omega^2 \left[2x_{CM}^2 + \frac{1+4\lambda}{2} \left(\left(x_R - \frac{2a}{1+4\lambda} \right)^2 - \frac{4a^2}{(1+4\lambda)^2} \right) + 2a^2 \right] = \\
& \frac{1}{2}m\omega^2 2x_{CM}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1+4\lambda}{2} \left(x_R - \frac{2a}{1+4\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{a^2}{1+4\lambda} + \frac{1}{2}m\omega^2 2a^2 = \\
& \frac{1}{2}M\omega^2 x_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2(1+4\lambda) \left(x_R - \frac{2a}{1+4\lambda} \right)^2 + m\omega^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{1+4\lambda} \right) = \\
& \frac{1}{2}M\omega^2 x_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2(1+4\lambda) \left(x_R - \frac{2a}{1+4\lambda} \right)^2 + m\omega^2 a^2 \frac{4\lambda}{1+4\lambda}
\end{aligned}$$