

Questa parte delle lezioni segue il libro Statistical Mechanics di Huang.

## 1 Ising

In alcuni metalli, abbassando la temperatura sotto un valore detto di Temperatura di Curie, una frazione finita degli spin degli atomi si allinea, dando origine ad una magnetizzazione del materiale. Il modello di Ising offre una rappresentazione cruda del fenomeno, che pero' ha svolto nella storia della meccanica statistica un ruolo cruciale, essendo un modello risolvibile analiticamenti in una e due dimensioni. Il modello di Ising e' definito su un reticolo (lineare, quadrato, cubico...). Su ognuno degli  $N$  siti reticolari e' collocato uno spin  $s$  che puo' avere solo due orientazioni, up ( $s = 1$ ) e down ( $s = -1$ ). Spin adiacenti interagiscono con un potenziale  $-\epsilon s_i s_j$ . Valori di  $\epsilon$  positivi indicano un ferromagnete,  $\epsilon$  negativi un anti-ferromagnete. L' Hamiltoniana del modello e' (indicando con  $\langle i, j \rangle$  le coppie di spin adiacenti)

$$\mathcal{H}\{s_i\} = - \sum_{\langle i, j \rangle} \epsilon s_i s_j - H \sum_{i=1}^N s_i$$

La funzione di partizione nel canonico e' data dalla somma sui  $2^N$  stati

$$Q(H, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} e^{-\beta \mathcal{H}\{s_i\}}$$

La magnetizzazione  $M = \langle \sum_{i=1}^N s_i \rangle$  la possiamo calcolare come derivata rispetto ad  $H$  di  $\ln Q(H, T)$

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Q}{\partial H} = - \frac{\partial A}{\partial H} = \frac{1}{Q} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \left( \sum_{i=1}^N s_i \right) e^{-\beta \mathcal{H}\{s_i\}} = \langle \sum_{i=1}^N s_i \rangle$$

## 2 Ising 1D

In una dimensione, con condizioni al contorno periodiche ( $s_{N+1} = s_1$ ),

$$\mathcal{H}\{s_i\} = - \sum_{i=1}^N \epsilon s_i s_{i+1} - H \sum_{i=1}^N s_i$$

e, simmetrizzando il termine con il campo magnetico

$$Q(H, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} e^{-\beta \sum_{i=1}^N (-\epsilon s_i s_{i+1} - \frac{H}{2} (s_i + s_{i+1}))}$$

Se definiamo una matrice  $P$

$$P = \begin{bmatrix} e^{\beta(\epsilon+H)} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{\beta(\epsilon-H)} \end{bmatrix}$$

possiamo riscrivere la funzione di partizione come

$$Q(H, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | P | s_2 \rangle \langle s_2 | P | s_3 \rangle \dots \langle s_N | P | s_1 \rangle$$

e poiche'  $\sum_{s_k} |s_k\rangle \langle s_k| = 1$ ,

$$Q(H, T) = \sum_{s_1} \langle s_1 | P^N | s_1 \rangle = \text{Tr} P^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

dove  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  sono gli autovalori di  $P$  e abbiamo sfruttato la invarianza della traccia. Per  $N$  grandi solo il maggiore tra  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  conta.

Per chiarire perche'  $\sum_{s_k} |s_k\rangle \langle s_k| = 1$  considerate un caso specifico, per esempio

$$\sum_{s_2} \langle s_1 | P | s_2 \rangle \langle s_2 | P | s_3 \rangle$$

che riconoscerete come la somma equivalente al prodotto riga per colonna della moltiplicazione di  $P$  per  $P$ , trovando cosi che

$$\sum_{s_2} \langle s_1 | P | s_2 \rangle \langle s_2 | P | s_3 \rangle = \langle s_1 | P^2 | s_3 \rangle$$

## 2.1 $H = 0$

Quando  $H = 0$ ,

$$P = \begin{bmatrix} e^{\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{\beta\epsilon} \end{bmatrix}$$

e il determinante  $|P - \lambda I| = 0$  diviene (indicando  $x = e^{\beta\epsilon}$ )

$$|P - \lambda I| = (x - \lambda)^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = x \pm \frac{1}{x}$$

e, poiche'  $e^x + e^{-x} = 2 \cosh(x)$

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta\epsilon} \pm e^{-\beta\epsilon} \quad Q_N = 2^N [\cosh^N(\beta\epsilon) + \sinh^N(\beta\epsilon)]$$

## 2.2 $H \neq 0$

In questo caso, chiamando  $x = \exp(\beta\epsilon)$  e  $y = \exp(\beta H)$

$$P = \begin{bmatrix} xy & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{x}{y} \end{bmatrix}$$

così che,

$$\begin{aligned}
(xy - \lambda) \left( \frac{x}{y} - \lambda \right) - \frac{1}{x^2} &= 0 & \lambda^2 - \lambda \left( xy + \frac{x}{y} \right) + x^2 - \frac{1}{x^2} &= 0 \\
\lambda_{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \left( xy + \frac{x}{y} \right) \pm \sqrt{x^2 y^2 + \frac{x^2}{y^2} + 2x^2 - 4x^2 + \frac{4}{x^2}} \right) \\
&= \frac{x}{2} \left[ \left( y + \frac{1}{y} \right) \pm \sqrt{\left( y - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{4}{x^4}} \right] = x \left[ \frac{1}{2} \left( y + \frac{1}{y} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \left( y - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x^4} \right)} \right] \\
\lambda_{\pm} &= e^{\beta\epsilon} \left[ \cosh(\beta H) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}} \right]
\end{aligned}$$

e per grandi  $N$

$$A = -k_B T \ln Q = -k_B T N \ln \lambda_+ = N \left( -\epsilon - k_B T \ln \left[ \cosh(\beta H) + \sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}} \right] \right)$$

La magnetizzazione per spin la otteniamo derivando  $A/N$  rispetto ad  $H$  (cambiando di segno) trovando

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{\partial A/N}{\partial H} = \frac{k_B T}{\left[ \cosh(\beta H) + \sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}} \right]} \left[ \beta \sinh(\beta H) + \beta \frac{\sinh(\beta H) \cosh(\beta H)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}}} \right] = \\
&= \frac{\sinh(\beta H)}{\left[ \cosh(\beta H) + \sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}} \right]} \left[ 1 + \frac{\cosh(\beta H)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}}} \right] = \frac{\sinh(\beta H)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta\epsilon}}}
\end{aligned}$$

Poiché  $\sinh(0) = 0$ ,  $M(H = 0, T) = 0$ . Per nessuna temperatura finita, il sistema in una dimensione si magnetizza spontaneamente.

Troviamo dunque che in assenza di campo, nonostante ci aspettiamo che spin adiacenti siano orientati nella stessa maniera, non è presente magnetizzazione. Il sistema apparirà come una sequenza di spin spesso paralleli con un numero di inversioni di segno che determinano in media magnetizzazione nulla.

↑↑↑↑↓↓↓↓↑↑↑↑↑↑↑↓↓↓↓↓↓↓↓↓↑↑↑↑↑↑↑↓↓↓↓↓↓↓↓↓↑↑↑↑↓↓↓↓↑↓↓↓↑↑↑↑↑↑↑↑

Possiamo capire meglio perché la magnetizzazione è sempre nulla (eccetto che strettamente a  $T = 0$ ) considerando l'energia libera in funzione del numero di "interfacce", chiamando interfaccia il luogo dove due spin successivi hanno segno opposto. Lo stato

fondamentale (l'unico con  $M = 1$ ) non ha interfacce ed ha una energia per spin pari a  $A(0) = -N\epsilon$ . Lo stato con una interfaccia ha energia libera  $A(1) = -N\epsilon + 2\epsilon - T \ln N$  dove abbiamo aggiunto l'energia associata all'aver flippato tutto gli spin a destra dell'interfaccia in modo coerente. Il termine entropico  $\ln N$  indica gli  $N$  luoghi dove possiamo collocare l'interfaccia. Continuando troviamo  $A(3) = -N\epsilon + 4\epsilon - T \ln[N(N-1)/2]$  e così via. Un grafico dell'energia libera in funzione del numero di interfacce vi fa vedere che per  $N \rightarrow \infty$  il minimo di  $A$  si ha per un numero di interfacce diverso da 0. Lo stato con una interfaccia (e  $M = 0$  !) diventa infatti più stabile dello stato fondamentale (con  $M = 1$ ) già per  $T = \frac{2\epsilon}{\ln N}$

### 2.3 Funzione di correlazione in Ising 1D

Per caratterizzare la lunghezza di correlazione tra spin dello stesso segno guardiamo la funzione di correlazione spaziale tra spin distanti  $j$  siti reticolari in assenza di campo magnetico

$$\langle s_i s_{i+j} \rangle = \frac{1}{Q_N} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} s_i s_{i+j} e^{-\beta \mathcal{H}\{s_k\}}$$

Calcoliamo questa funzione indichiamo con  $0.5 < p_{\uparrow\uparrow} < 1$  la probabilità che due spin adiacenti abbiano lo stesso segno ( $++$  o  $--$ ) e di conseguenza con  $1 - p_{\uparrow\uparrow}$  la probabilità che due spin adiacenti abbiano segno discorde (il limite inferiore 0.5 è dovuto al fatto che se gli spin sono messi a caso ( $T = \infty$ ) la probabilità di averne due adiacenti paralleli è  $1/2$ ). Ognuno dei  $j$  spin ha 2 stati per un totale di  $2^j$  stati tra  $i$  e  $i+j$ . Scrivendo

$$\begin{aligned} 1 &= (p_{\uparrow\uparrow} + (1 - p_{\uparrow\uparrow}))^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_{\uparrow\uparrow}^k (1 - p_{\uparrow\uparrow})^{j-k} = \\ &= \sum_{k=0,2,4}^j \binom{j}{k} p_{\uparrow\uparrow}^k (1 - p_{\uparrow\uparrow})^{j-k} + \sum_{k=1,3,5}^j \binom{j}{k} p_{\uparrow\uparrow}^k (1 - p_{\uparrow\uparrow})^{j-k} = S_{\text{pari}} + S_{\text{dispari}} \end{aligned}$$

notiamo che i contributi con  $k$  pari (la cui somma indichiamo con  $S_{\text{pari}}$ ) avranno uno spin finale (in  $i+j$ ) concorde con lo spin  $i$ . Gli altri ( $j-k$  dispari), la cui somma indichiamo con  $S_{\text{dispari}}$  contribuiranno con spin discordi. La funzione di correlazione è dunque data

$$\langle s_i s_{i+j} \rangle = 1 \times S_{\text{pari}} - 1 \times S_{\text{dispari}}$$

Se scriviamo

$$(2p_{\uparrow\uparrow} - 1)^j = (p_{\uparrow\uparrow} - (1 - p_{\uparrow\uparrow}))^j = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} p_{\uparrow\uparrow}^k (1 - p_{\uparrow\uparrow})^{j-k} = S_{\text{pari}} - S_{\text{dispari}}$$

troviamo proprio  $\langle s_i s_{i+j} \rangle$ ,

$$\langle s_i s_{i+j} \rangle = (2p_{\uparrow\uparrow} - 1)^j = e^{j \ln(2p_{\uparrow\uparrow} - 1)} =$$

che mostra che il decadimento della correlazione e' esponenziale con una lunghezza di correlazione spaziale  $\xi$

$$\xi = -\frac{1}{\ln(2p_{\uparrow\uparrow} - 1)} \quad \langle s_i s_{i+j} \rangle = e^{-j/\xi}$$

Se  $p_{\uparrow\uparrow} = 1/2$ , che corrisponde ad una probabilita' del tutto casuale,  $\xi = 0$ , se  $p_{\uparrow\uparrow} \rightarrow 1$ ,  $\xi \rightarrow \infty$

Se

$$p_{\uparrow\uparrow} = \frac{e^{\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon}}$$

a basse  $T$

$$p_{\uparrow\uparrow}(T \rightarrow 0) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta\epsilon}} = 1 - e^{-2\beta\epsilon}$$

e

$$\xi(T \rightarrow 0) = -\frac{1}{\ln(1 - 2e^{-2\beta\epsilon})} = \frac{e^{2\beta\epsilon}}{2}$$

Quindi, nonostante la magnetizzazione sia nulla, la lunghezza di correlazione diverge per  $T \rightarrow 0$ .

## 2.4 Lunghezza di correlazione (in assenza di campo magnetico). Metodo 2

Vogliamo calcolare

$$\langle s_k s_{k+r} \rangle = \frac{1}{Q_N} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} s_k s_{k+r} e^{\sum_{i=1}^N \beta \epsilon s_i s_{i+1}}$$

Se apparentemente complichiamo il modello rendendo gli  $\epsilon$   $i$  dipendenti, e chiamando  $\gamma_i = \beta \epsilon_i$  la funzione viene scritta

$$\langle s_k s_{k+r} \rangle = \frac{1}{Q_N} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} s_k s_{k+r} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}}$$

Notiamo che

$$\frac{\partial e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}}}{\partial \gamma_m} = s_m s_{m+1} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}}$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+1}} \dots \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+r-1}} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}} = s_k s_{k+1} s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{k+r-1} s_{k+r} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}} = s_k s_{k+1}^2 \dots s_{k+r-1}^2 s_{k+r} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}}$$

Poiche' i termini tipo  $s_k^2$  sono sempre uno, indipendentemente dal segno di  $s_k$ ,

$$\langle s_k s_{k+r} \rangle = \frac{1}{Q_N} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+1}} \dots \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+r-1}} e^{\sum_{i=1}^N \gamma_i s_i s_{i+1}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+1}} \dots \frac{\partial}{\partial \gamma_{k+r-1}} Q_N$$

Se ricalcolassimo la funzione di partizione per  $\gamma$  diversi troveremmo (per grandi  $N$  o per catena aperta)

$$Q_N = 2^N \sum_{i=1}^{N-1} \cosh \gamma_i$$

per cui, visto che  $d \ln(\cosh(x))/dx = \tanh(x)$ ,

$$\langle s_k s_{k+r} \rangle = \prod_{i=1}^r \tanh \gamma_{k+i-1}$$

e riscrivendo  $\gamma_i = \epsilon \beta$ ,

$$\langle s_k s_{k+r} \rangle = (\tanh \beta \epsilon)^r = e^{r \ln \tanh \beta \epsilon}$$

per cui

$$\xi = -\frac{1}{\ln \tanh \beta \epsilon}$$

Espandendo per  $T \rightarrow 0$ ,  $\tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \sim 1 - 2e^{-2x}$ , da cui

$$\xi = -\frac{1}{2e^{-2\beta\epsilon}}$$

## 2.5 Ising 2d

In questo sito trovate la simulazione in real time del modello di Ising in 2 d ( $k_B T_c / \epsilon = 2.269$ , reticolo quadrato).

<https://matthierbaum.github.io/ising.js/>

## 3 Il campo medio: Bragg-Williams

La funzione di partizione del modello di Ising puo' anche essere scritta in funzione di due grandezze: il numero totale di spin up ( $N_+$ ) ed il numero di coppie di spin adiacenti di tipo up-up  $N_{++}$ , conoscendo la funzionalita'  $\gamma$  del reticolo (2 in una dimensione, 4 in 2 dimensioni per un reticolo quadrato e 6 in 3 dimensioni per un reticolo cubico). Infatti possiamo scrivere che

$$\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-} \quad \gamma N_- = 2N_{--} + N_{+-} \quad N_+ + N_- = N$$

La prima relazione si dimostra contando i legami che partono da tutti gli spin up  $\gamma N_+$ . Tali legami connetteranno o spin up-up (e saranno contati due volte) e quelli che connettono

l' up con il down (contati una volta). Analogamente per la seconda relazione. Abbiamo cosi' che delle 5 quantita'  $N_+$ ,  $N_-$ ,  $N_{++}$ ,  $N_{--}$ ,  $N_{+-}$ , tre possono essere espresse in termine delle due rimanenti. Troviamo cosi' che

$$N_{+-} = \gamma N_+ - 2N_{++} \quad N_- = N - N_+ \quad N_{--} = \frac{\gamma}{2}N + N_{++} - \gamma N_+$$

Poiche'

$$\sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j = N_{++} + N_{--} - N_{+-} = 4N_{++} - 2\gamma N_+ + \frac{\gamma}{2}N$$

e la magnetizzazione  $M$

$$M = \sum s_i = N_+ - N_- = 2N_+ - N$$

possiamo riscrivere  $\mathcal{H}$  come

$$\mathcal{H}(N_+, N_{++}) = -4\epsilon N_{++} + 2(\epsilon\gamma - H)N_+ - \left(\frac{\gamma}{2}\epsilon - H\right)N \quad (1)$$

e corrispondentemente calcolare la funzione di partizione come

$$Q = e^{\beta(\frac{\gamma}{2}\epsilon - H)N} \sum_{N_+=0}^N e^{-2\beta(\epsilon\gamma - H)N_+} \sum'_{N_{++}} g(N_+, N_{++}) e^{4\beta\epsilon N_{++}}$$

dove  $g(N_+, N_{++})$  conta il numero di stati con  $N_+$  spin up e  $N_{++}$  coppie up-up.

L' approssimazione di Bragg-Williams consiste nel definire una relazione tra  $N_{++}$  e  $N_+$ . Assumendo che gli  $N_+$  siano distribuiti a caso con probabilita'  $N_+/N$ . In questo caso, una qualsiasi connessione tra primi vicini ha probabilita'  $(N_+/N)^2$  e dunque  $N_{++} = N\gamma/2(N_+/N)^2$ . Questo fa si che la sommatoria su  $N_{++}$  scompaia e

$$Q_{BW} = e^{\beta(\frac{\gamma}{2}\epsilon - H)N} \sum_{N_+=0}^N g(N_+) e^{-2\beta(\epsilon\gamma - H)N_+} e^{4\beta\epsilon N\gamma/2(N_+/N)^2}$$

dove  $g(N_+)$  conta il numero di stati con  $N_+$  spin up. Il numero di modi di scegliere  $N_+$  siti up da  $N$  siti e' dato da

$$g(N_+) = \frac{N!}{(N - N_+)!N_+!}$$

per cui

$$Q_{BW} = e^{\beta(\frac{\gamma}{2}\epsilon - H)N} \sum_{N_+=0}^N \frac{N!}{(N - N_+)!N_+!} e^{-2\beta(\epsilon\gamma - H)N_+} e^{2\beta\epsilon N\gamma(N_+/N)^2}$$

Se utilizziamo il trucco imparato precedentemente, valido per il logaritmo di una somma i cui termini dipendono da  $N$  con  $N$  grande, e' sufficiente calcolare solo il termine maggiore del logaritmo dell' argomento della sommatoria per capire quale e' l'  $N_+$  dominante.

Troviamo cosi',

$$\frac{d}{dN_+} \left[ \ln N! - \ln(N - N_+)! - \ln N_+! - 2\beta(\epsilon\gamma - H)N_+ + 2\beta\epsilon N\gamma \frac{N_+^2}{N^2} \right] = 0$$

e poiche',

$$\frac{d}{dN_+} \ln(N - N_+)! = \frac{d}{dN_+} (N - N_+) \ln(N - N_+) - (N - N_+) = -\ln(N - N_+) - 1 + 1 = -\ln(N - N_+)$$

e

$$\frac{d}{dN_+} [\ln N_+!] = \frac{d}{dN_+} [N_+ \ln N_+ - N_+] = \ln N_+$$

(da qui impariamo la regola che  $d \ln N! / dN = \ln N$ ). Abbiamo cosi',

$$\ln(N - N_+) - \ln N_+ - 2\beta(\epsilon\gamma - H) + 4\beta\epsilon N\gamma \frac{N_+}{N^2} = 0$$

che possiamo anche scrivere

$$\ln \left( \frac{N - N_+}{N_+} \right) = 2\beta(\epsilon\gamma - H) - 4\beta\epsilon\gamma \frac{N_+}{N}$$

Esprimendo tutto in funzione della magnetizzazione per sito  $L = \sum_i s_i / N$ , troviamo

$$\frac{N_+}{N} = \frac{L + 1}{2}$$

Se scriviamo

$$\ln \left( \frac{N - N_+}{N_+} \right) = \ln \left( \frac{N}{N_+} - 1 \right) = \ln \left( \frac{2}{L + 1} - 1 \right) = \ln \left( \frac{2 - L - 1}{L + 1} \right) =$$

troviamo

$$\ln \left( \frac{1 - L}{1 + L} \right) = 2\beta(\epsilon\gamma - H) - 2\beta\epsilon\gamma(L + 1)$$

$$\ln \left( \frac{1 - L}{1 + L} \right) = -2\beta H - 2\beta\epsilon\gamma L$$

che possiamo anche scrivere, mettendo una sbarretta su  $L$  ( $\bar{L}$ ) per indicare il valore massimo

$$\bar{L} = \tanh \left( \frac{H}{k_B T} + \frac{\epsilon\gamma}{k_B T} \bar{L} \right) \quad (2)$$

Infatti

$$\left( \frac{1 - \bar{L}}{1 + \bar{L}} \right) = e^{-2\beta H - 2\beta\epsilon\gamma \bar{L}} \rightarrow 1 - \bar{L} = (1 + \bar{L}) e^{-2\beta H - 2\beta\epsilon\gamma \bar{L}}$$

$$\bar{L}(e^{-2\beta H - 2\beta\epsilon\gamma\bar{L}} + 1) = 1 - e^{-2\beta H - 2\beta\epsilon\gamma\bar{L}}$$

$$\bar{L} = \frac{[e^{+\beta H + \beta\epsilon\gamma\bar{L}} + e^{-\beta H - \beta\epsilon\gamma\bar{L}}]}{[e^{-\beta H - \beta\epsilon\gamma\bar{L}} - e^{+\beta H + \beta\epsilon\gamma\bar{L}}]}$$

che possiamo condensare in

$$\bar{L} = \tanh[\beta H + \beta\epsilon\gamma\bar{L}]$$

(Ricordiamo che lo sviluppo di  $\tanh(x) \approx x - x^3/3 + 2x^5/15$ ). In assenza di campo ( $H = 0$ ), l' Eq. 2 puo' essere risolta numericamente. Ad alte temperature esiste solo la soluzione  $L = 0$ , che indica l' assenza di magnetizzazione. Ma quando  $T$  diventa minore della temperatura critica  $k_B T_c = \gamma\epsilon$ , nascono oltre alla soluzione instabile  $L = 0$  due soluzioni stabili  $L = \pm L_0$ . Ricordando che la derivata di  $\tanh ax$  e'  $4a/(e^{-ax} + e^{ax})^2$ , in  $x = 0$  e'  $a$ . Quindi avremo che la pendenza di  $\tanh\left(\frac{\epsilon\gamma}{k_B T}\bar{L}\right)$  e' uguale a uno (e dunque tangente a  $\bar{L}$  quando  $\frac{\epsilon\gamma}{k_B T} = 1$ . Questa relazione definisce  $T_c$ .

Se espandiamo per piccoli  $\bar{L}$  la funzione  $\tanh\left(\frac{T_c}{T}\bar{L}\right)$ , le soluzioni sono date da

$$\bar{L} = \frac{T_c}{T}\bar{L} - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\bar{L}\right)^3$$

che ammette come soluzioni, oltre a  $\bar{L} = 0$ , anche

$$\bar{L}^2 = \frac{3\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)}{\left(\frac{T_c}{T}\right)^3}$$

E se espandiamo la espressione funzione di  $T$  per  $T$  intorno a  $T_c$ ,

$$\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \sim \frac{T_c - T}{T_c}$$

per cui, per  $T < T_c$  abbiamo soluzioni non nulle

$$\bar{L} = \pm \sqrt{3\left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)}$$

L' energia libera in approssimazione BW si ottiene sostituendo la sommatoria con il termine piu' grande (ma con  $N_+/N = 2(\bar{L} + 1)$ )

$$Q_{BW} = e^{\beta(\frac{\gamma}{2}\epsilon - H)N} \frac{N!}{(N - N_+)!N_+!} e^{-2\beta(\epsilon\gamma - H)N_+} e^{4\beta\epsilon N\gamma/2(N_+/N)^2}$$

sempre dal termine dominante nella somma. Se calcoliamo

$$\ln \frac{N!}{(N - N_+)!N_+!} = N \ln N - N - [(N - N_+) \ln(N - N_+) - (N - N_+)] - [(N_+) \ln(N_+) - (N_+)] =$$

$$N \ln N - (N - N_+) \ln(N - N_+) - (N_+) \ln(N_+)$$

e mettendo in evidenza un  $N$  in ogni termine

$$= N \ln N - N(1 - N_+/N) \ln N(1 - N_+/N) - N(N_+/N) \ln N(N_+/N) =$$

$$N[-(1 - N_+/N) \ln N(1 - N_+/N) - (N_+/N) \ln N(N_+/N)]$$

e sostituendo  $N_+/N = (L + 1)/2$ ,

$$\frac{L+1}{2} N \left[ -\left(1 - \frac{L+1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{L+1}{2}\right) - \frac{L+1}{2} \ln \frac{L+1}{2} \right] = N \left[ -\frac{1-L}{2} \ln \frac{1-L}{2} - \frac{L+1}{2} \ln \frac{L+1}{2} \right]$$

dove  $L = \bar{L}$ .

Se espandiamo intorno a  $\bar{L} = 0$ , utilizzando

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - x^2/2 \pm x^3/3 - x^4/4$$

$$\ln \frac{N!}{(N - N_+)! N_+!} = -N \left[ -\ln 2 + \frac{1-L}{2} (-L - L^2/2 - L^3/3 - L^4/4) + \frac{L+1}{2} (L - L^2/2 + L^3/3 - L^4/4) \right] =$$

$$-N \left[ -\ln 2 + (-L^2/2 - L^4/4) + L(L + L^3/3) \right] = -N \left[ -\ln 2 + \frac{L^2}{2} + \frac{1}{12} L^4 \right]$$

Il termine energetico corrispondente e' (vedi Eq. 1)

$$\frac{E}{N} = -\frac{\gamma}{2} \epsilon + H + 2(\epsilon\gamma - H) \frac{N_+}{N} - 2\epsilon\gamma \frac{N_+^2}{N^2} = -\frac{\gamma}{2} \epsilon + H + (\epsilon\gamma - H)(L + 1) - \frac{2\epsilon\gamma}{4} (L + 1)^2 =$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \epsilon + H + \epsilon\gamma L - HL + \epsilon\gamma - H - \frac{\epsilon\gamma}{2} L^2 - \frac{\epsilon\gamma}{2} L - \epsilon\gamma L = -HL - \frac{\epsilon\gamma}{2} L^2$$

La energia libera per sito reticolare, vicino al punto critico e' dunque scrivibile come

$$f \equiv \frac{F(\bar{L}, T)}{N} = -k_B T \ln Q_{BW}/N = -k_B T \ln 2 + \frac{k_B T - \epsilon\gamma}{2} \bar{L}^2 + k_B T \frac{1}{12} \bar{L}^4 - H \bar{L}$$

Ricordandoci che  $k_B T_c = \epsilon\gamma$ , troviamo che vicino a  $\bar{L} = 0$ , in assenza di campo magnetico esterno ( $H = 0$ ), l' energia libera ha una espressione data da una parabola sommata ad una quartica, entrambe centrate su  $\bar{L} = 0$ . Ma il coefficiente di  $\bar{L}^2$  cambia segno proprio a  $T = T_c$ , generando due minimi simmetrici che indicano magnetizzazione spontanea.

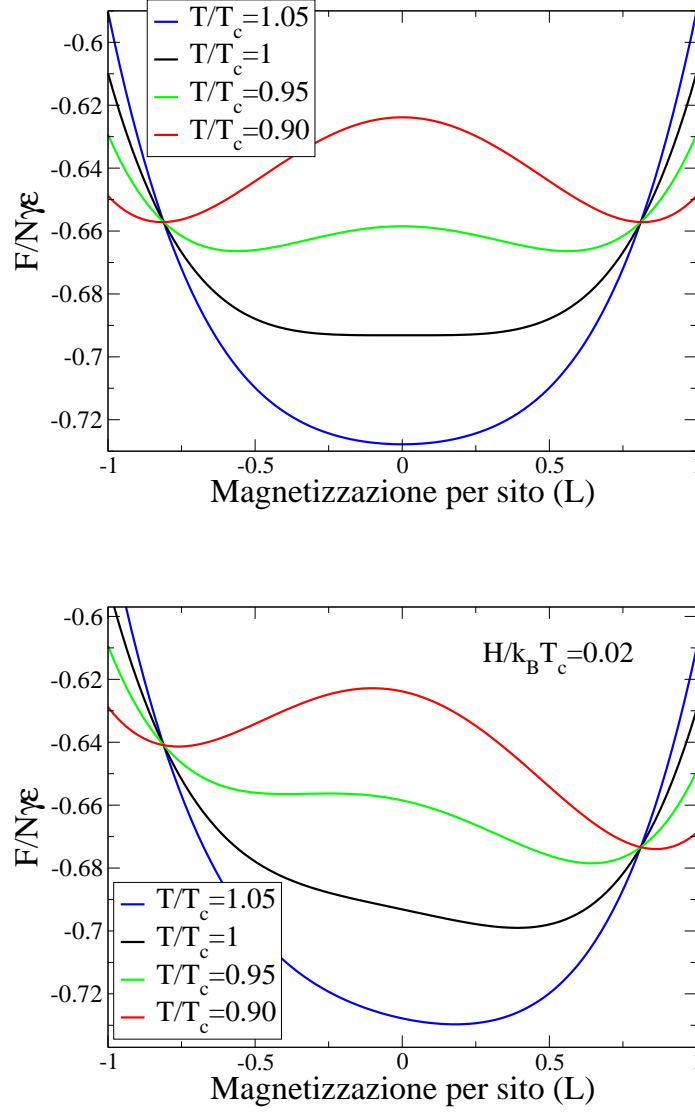


Figure 1: Energia libera in funzione di  $\bar{L}$  secondo la teoria di Braggs-Williams, senza e con campo esterno applicato.

### 3.1 Suscettività magnetica $\chi_m$

Calcoliamo la suscettività, definita come

$$\chi_m = \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial H} \right)_{H=0}$$

Vicino al punto critico, utilizzando la solita espansione di  $\tanh$  al primo ordine possiamo scrivere

$$\bar{L} = \frac{H}{k_B T} + \frac{\epsilon \gamma}{k_B T} \bar{L} \quad \rightarrow \quad \bar{L}(1 - T_c/T) = \frac{H}{k_B T} \quad \rightarrow \quad \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial H} \right)_{H=0} = \frac{1}{k_B(T - T_c)}$$

Quindi la suscettività magnetica diverge al punto critico. Cio' indica che una variazione infinitesima di campo esterno determina una variazione finita della magnetizzazione, in analogia con quanto visto per la compressibilità isoterma.

### 3.2 Critical Isotherm

La variazione della magnetizzazione a  $T = T_c$  e' fornita dalla espressione

$$\bar{L} = \tanh \left( \frac{H}{k_B T} + \frac{T_c}{T} \bar{L} \right) = (\beta H + \bar{L}) - \frac{1}{3}(\beta H + \bar{L})^3$$

cioe'

$$3(\beta H)^{1/3} = \beta H + \bar{L} \quad \rightarrow \quad \bar{L}_{T=T_c} \sim H^{1/3}$$

### 3.3 Relazione tra suscettività e correlazione

Consideriamo per semplicita' una versione continua

$$\langle M \rangle = \langle \int d^3 r m(\mathbf{r}) \rangle$$

La magnetizzazione per unita' di volume e' dunque

$$\frac{\langle M \rangle}{V} = \frac{\int dm [\int d^3 r m(\mathbf{r})] e^{-\beta H}}{\int e^{-\beta H}}$$

dove  $H = H_0 - H \int d^3 r' m(\mathbf{r}')$ . Se calcoliamo la derivata rispetto ad  $H$  troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} &= \beta \frac{- \int dm [\int d^3 r m(\mathbf{r})] [\int d^3 r' m(\mathbf{r}')] e^{-\beta H} - \int dm [\int d^3 r' m(\mathbf{r}')] e^{-\beta H} \int dm [\int d^3 r m(\mathbf{r})] e^{-\beta H}}{(\int dm e^{-\beta H})^2} \\ &= \beta \left\{ \left\langle \left[ \int d^3 r' m(\mathbf{r}') \right] \left[ \int d^3 r m(\mathbf{r}) \right] \right\rangle - \left\langle \left[ \int d^3 r' m(\mathbf{r}') \right] \right\rangle^2 \right\} \end{aligned}$$

E passando a  $r'' = r' - r$  ed  $r$  e sfruttando la isotropia

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \left\langle \left[ \int d^3 r'' d^3 r m(\mathbf{r}'' + \mathbf{r}) m(\mathbf{r}) \right] \right\rangle - \left\langle \left[ \int d^3 r' m(\mathbf{r}') \right]^2 \right\rangle \right\} = \\
&\beta \left\{ V \left\langle \int d^3 r m(\mathbf{r}) m(\mathbf{0}) \right\rangle - \left\langle M \right\rangle^2 \right\} = \beta \left\{ V \left\langle \int d^3 r m(\mathbf{r}) m(\mathbf{0}) \right\rangle - \left\langle m(\mathbf{0}) \right\rangle^2 \right\} = \\
&\beta V \left\{ \int d^3 r [\left\langle m(\mathbf{r}) m(\mathbf{0}) \right\rangle - \left\langle m(\mathbf{0}) \right\rangle \left\langle m(\mathbf{r}) \right\rangle] \right\}
\end{aligned}$$

che mostra che la suscettivita' e' l' integrale della funzione di correlazione. Se la suscettivita diverge, allora la funzione di correlazione deve diventare a lungo range.

## 4 Bethe-Peierls

Per migliorare rispetto a BW, guardiamo la cosiddetta approssimazione di Bethe-Peierls (in assenza di campo esterno). Questa volta non ci focalizziamo piu' solo su uno spin, ma includiamo nella nostra discussione anche gli spin adiacenti. Abbiamo quindi un sistema con  $\gamma + 1$  spin. Lo spin 0, centrale, interagisce con i vicini con la Hamiltoniana  $H = -\epsilon s_0 \sum_{j=1}^{\gamma} s_j$ . Gli spin  $j = 1, \gamma$  interagiscono anche con un campo esterno  $h$ , che descrive l' effetto del resto del reticolo. Questo contributo aggiunge alla Hamiltoniana un termine  $-h \sum_{j=1}^{\gamma} s_j$ . Dobbiamo dunque calcolare

$$Q = \sum_{s_0} \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{\gamma}} e^{-\beta(-\epsilon s_0 \sum_{j=1}^{\gamma} s_j - h \sum_{j=1}^{\gamma} s_j)}$$

Passando alla variabile  $N_{\uparrow}$  che conta quanti dei  $\gamma$  spin sono up,  $H = -\epsilon s_0 \sum_{j=1}^{\gamma} s_j = -\epsilon s_0 [N_{\uparrow} - (\gamma - N_{\uparrow})]$  possiamo riscrivere  $Q$  come

$$Q_{BP} = \sum_{s_0} \sum_{N_{\uparrow}=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{N_{\uparrow}} e^{\beta\{\epsilon s_0 [N_{\uparrow} - (\gamma - N_{\uparrow})] + h [N_{\uparrow} - (\gamma - N_{\uparrow})]\}} = \sum_{s_0} e^{-\beta[(s_0 \epsilon + h) \gamma]} \sum_{N_{\uparrow}=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{N_{\uparrow}} e^{\beta[(2\epsilon s_0 + 2h) N_{\uparrow}]}$$

da cui, separando i due termini con  $s_0 = 1$  e  $s_0 = -1$ ,

$$Q_{BP} = e^{-\beta\epsilon\gamma - \beta h\gamma} \left(1 + e^{\beta[(2\epsilon + 2h)]}\right)^{\gamma} + e^{\beta\epsilon\gamma - \beta h\gamma} \left(1 + e^{\beta[(-2\epsilon + 2h)]}\right)^{\gamma}$$

La probabilita'  $P(\uparrow_0, N_{\uparrow})$  che lo spin centrale sia  $\uparrow$  e circondato da  $N_{\uparrow}$  spin e'

$$P(\uparrow_0, N_{\uparrow}) = \frac{1}{Q_{BP}} e^{-\beta\epsilon\gamma - \beta h\gamma} \binom{\gamma}{N_{\uparrow}} e^{\beta[(2\epsilon + 2h) N_{\uparrow}]}$$

e la probabilita' che lo spin 0 sia up  $P(\uparrow_0)$

$$P(\uparrow_0) = \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} P(\uparrow_0, N_\uparrow)$$

Ora possiamo anche calcolare la magnetizzazione di un generico spin adiacente,  $P(\uparrow_i)$  sommando su tutti gli stati con qualche spin tra 1 e  $\gamma$  che sia up e dividendo il risultato per  $\gamma$

$$P(\uparrow_i) = \frac{1}{\gamma} \left[ \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} N_\uparrow P(\uparrow_0, N_\uparrow) + \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} N_\uparrow P(\downarrow_0, N_\uparrow) \right]$$

Poiche' il generico spin  $i$  e' in realta' del tutto equivalente allo spin che abbiamo selezionato come 0, ne consegue che  $P(\uparrow_0)$  deve essere uguale a  $P(\uparrow_i)$ . Questa relazione ci consente di trovare il campo esterno  $h$ . Abbiamo infatti, indicando con  $z = e^{2\beta h}$  e trascurando il termine  $\frac{1}{Q_{BP}} e^{-\beta h \gamma}$  che compare sia a destra che a sinistra la relazione  $P(\uparrow_0) = P(\uparrow_i)$  si scrive

$$e^{-\beta \epsilon \gamma} \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{N_\uparrow} e^{2\beta \epsilon N_\uparrow} z^{N_\uparrow} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{N_\uparrow} N_\uparrow e^{-\beta \epsilon \gamma} e^{2\beta \epsilon N_\uparrow} z^{N_\uparrow} + \sum_{N_\uparrow=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{N_\uparrow} N_\uparrow e^{+\beta \epsilon \gamma} e^{-2\beta \epsilon N_\uparrow} z^{N_\uparrow} \right\}$$

$$e^{-\beta \epsilon \gamma} (1 + z e^{2\beta \epsilon})^\gamma = \frac{1}{\gamma} \left\{ e^{-\beta \epsilon \gamma} z \frac{\partial}{\partial z} (1 + z e^{2\beta \epsilon})^\gamma + e^{+\beta \epsilon \gamma} z \frac{\partial}{\partial z} (1 + z e^{-2\beta \epsilon})^\gamma \right\}$$

$$(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^\gamma = e^{-\beta \epsilon \gamma} z (1 + z e^{2\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{2\beta \epsilon} + e^{+\beta \epsilon \gamma} z (1 + z e^{-2\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{-2\beta \epsilon}$$

$$(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^\gamma = z (e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{\beta \epsilon} + z (e^{+\beta \epsilon} + z e^{-\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{-\beta \epsilon}$$

$$(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon}) (e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^{\gamma-1} = z (e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{\beta \epsilon} + z (e^{+\beta \epsilon} + z e^{-\beta \epsilon})^{\gamma-1} e^{-\beta \epsilon}$$

$$(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon}) = z e^{\beta \epsilon} + z \frac{(e^{+\beta \epsilon} + z e^{-\beta \epsilon})^{\gamma-1}}{(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^{\gamma-1}} e^{-\beta \epsilon}$$

da cui finalmente

$$z = \frac{(e^{-\beta \epsilon} + z e^{\beta \epsilon})^{\gamma-1}}{(e^{+\beta \epsilon} + z e^{-\beta \epsilon})^{\gamma-1}} = \frac{(1 + z e^{2\beta \epsilon})^{\gamma-1}}{(z + e^{+2\beta \epsilon})^{\gamma-1}} \quad (3)$$

Poiche'  $P(\uparrow_0)$  e' proprio  $N_+/N = \frac{1+L}{2}$  possiamo scrivere

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1}{Q_{BP}} e^{-\beta\epsilon\gamma} \sum_{N_{\uparrow}=0}^{\gamma} e^{2\beta\epsilon N_{\uparrow}} z^{N_{\uparrow}} = \frac{1}{Q_{BP}} e^{-\beta\epsilon\gamma} (1 + ze^{2\beta\epsilon})^{\gamma} = \frac{(e^{-\beta\epsilon} + ze^{\beta\epsilon})^{\gamma}}{Q_{BP}}$$

e sostituendo l' espressione di  $Q_{BP}$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{(e^{-\beta\epsilon} + ze^{\beta\epsilon})^{\gamma}}{(e^{-\beta\epsilon} + ze^{\beta\epsilon})^{\gamma} + (e^{\beta\epsilon} + ze^{-\beta\epsilon})^{\gamma}}$$

Poiche'  $t \equiv z^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1+ze^{2\beta\epsilon}}{z+e^{+2\beta\epsilon}} = \frac{e^{-\beta\epsilon}+ze^{\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon}+ze^{-\beta\epsilon}}$  possiamo scrivere

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1}{1+t^{-\gamma}} = \frac{t^{\gamma}}{t^{\gamma}+1} \quad \rightarrow \quad L = 2 \frac{t^{\gamma}}{t^{\gamma}+1} - 1 = \frac{t^{\gamma}-1}{t^{\gamma}+1}$$

cioe'

$$\bar{L} = \frac{z^x - 1}{z^x + 1} \quad x \equiv \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Questa espressione mostra che  $z = 1$  e' sempre soluzione dell' Eq. 3 e descrive lo stato con  $\bar{L} = 0$ .

Notiamo inoltre dalla equazione 3 che se  $z$  e' una soluzione, anche  $1/z$  e' soluzione. Scambiando  $z$  con  $1/z$  si inverte  $\bar{L}$  in  $-\bar{L}$ .

Come per la soluzione BW, per trovare la temperatura critica occorre calcolare la pendenza in  $z = 1$  e porla uguale ad 1.

Troviamo cosi' (indicando  $a = e^{2\beta\epsilon}$ , derivando il lato destro della Eq. 3 e ponendo uguale ad 1 il risultato)

$$\left. \frac{d}{dz} \right|_{z=1} \left( \frac{1+za}{z+a} \right)^{\gamma-1} = (\gamma-1) \left( \frac{1+za}{z+a} \right)^{\gamma-2} \frac{d}{dz} \frac{1+za}{z+a} = (\gamma-1) \left( \frac{1+za}{z+a} \right)^{\gamma-2} \frac{a(1+za) - (1+za)}{(z+a)^2}$$

che calcolata in  $z = 1$  da

$$\left. \frac{d}{dz} \right|_{z=1} \left( \frac{1+za}{z+a} \right)^{\gamma-1} = \frac{a-1}{a+1} (\gamma-1) = \frac{e^{2\beta\epsilon}-1}{1+e^{2\beta\epsilon}} (\gamma-1)$$

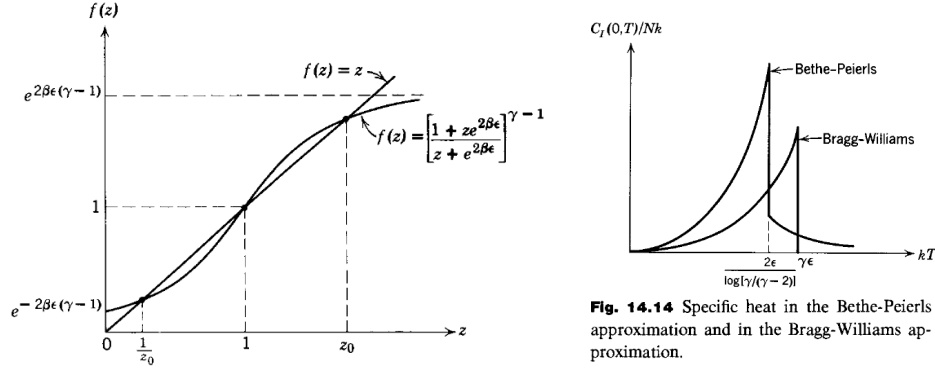
La pendenza assume il valore 1, e quindi si comporta come  $z$  quando

$$e^{2\beta\epsilon} + 1 = (e^{2\beta\epsilon} - 1)(\gamma - 1)$$

da cui

$$\gamma = e^{2\beta\epsilon}(\gamma - 2) \quad 2\beta\epsilon = \ln \frac{\gamma}{\gamma - 2} \quad k_B T_c = \frac{2\epsilon}{\ln \frac{\gamma}{\gamma - 2}}$$

La temperatura critica e' piu' bassa di quella stimata da BW.



**Fig. 14.14** Specific heat in the Bethe-Peierls approximation and in the Bragg-Williams approximation.

Figure 2: (sinistra) Soluzione grafica della equazione di BP. (destra) Confronto tra il calore specifico predetto da BW e da BP.

## 4.1 Back to vdW

### 4.1.1 Compressibilita'... esponenti critici

Torniamo alla equazione di van der Waals, espressa in unita' scalate ( $P_c, T_c, V_c$  tutti uguali a 1)

$$P = \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2}$$

Guardiamo il comportamento della compressibilita' isoterma, una delle importanti funzioni di risposta, definita come

$$k_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T =$$

lungo isochora critica,  $V = 1$ .

$$\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_T = 8T \frac{-3V}{(3V-1)^2} + \frac{6}{V^2} = \frac{-3}{4} 8T + 6 = 6(1-T) \quad (4)$$

per cui la compressibilita' diverge con un esponente critico (di campo medio) di meno uno

$$k_T = -\frac{1}{6(1-T)} = \frac{1}{6(T-1)} = \frac{1}{6}(T-1)^{-1}$$

### 4.1.2 scaling del parametro d'ordine

Se espandiamo la equazione di stato intorno al punto critico,

$$P = \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2} = \frac{8T-8+8}{3V-3+3-1} - \frac{3}{(V-1+1)^2} = \frac{8(T-1)+8}{3(V-1)+2} - \frac{3}{[(V-1)+1]^2}$$

troviamo (utilizzando

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{8}x^3 \right] \quad \text{e} \quad -\frac{3}{(1+x)^2} = -3[1 - 2x + 3x^2 - 4x^3]$$

$$P = 1 - \frac{3(V-1)^3}{2} + (T-1) \left( -\frac{27(V-1)^3}{2} + 9(V-1)^2 - 6(V-1) + 4 \right)$$

Se assumiamo (e lo mostreremo dopo) che  $O(V-1)^2 \sim O((T-1))$ , possiamo semplificare

$$P = 1 - \frac{3(V-1)^3}{2} + 4(T-1) - 6(T-1)(V-1)$$

che costituisce una espressione dell' equazione di stato vicino al punto critico. Quando  $P = 1 + 4(T-1)$ ,  $V = 1$  e' soluzione. Per lo stesso valore di  $P$  e  $T$  esistono anche come soluzioni

$$-\frac{3(V-1)^3}{2} - 6(T-1)(V-1) = 0$$

cioe'

$$(V-1)^2 = -4(T-1) \quad V_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4(1-T)}$$

cioe' due soluzioni simmetriche rispetto a  $V = 1$  [ $(V_1 - 1) = -(V_2 - 1)$ ]

Chiamiamo  $1 + 4(T-1) = P_{coex}$ . Infatti per questo valore di  $P$  e  $T$ ,

$$\int_{V_1}^{V_2} (P - P_{coex}) dV = \left[ -\frac{3(V-1)^4}{8} - 3(T-1)(V-1)^2 \right]_{V_1-1}^{V_2-1} = 0$$

poiche' la quantita' tra parentesi e' una funzione pari rispetto a  $V = 1$  e quindi uguale se calcolata in  $(V_1 - 1)$  o in  $(V_2 - 1)$ . [ $(V_1 - 1)^2 = (V_2 - 1)^2$ ]. Dunque

$$\frac{V - V_c}{V_c} = 4\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$$

che mostra che il parametro d' ordine  $V - V_c$  scala con  $|T - T_c|$  con un esponente critico  $1/2$ .

#### 4.1.3 Scaling a $T_c$

Abbiamo visto che

$$P = 1 - \frac{3(V-1)^3}{2} + 4(T-1) - 6(T-1)(V-1)$$

e dunque a  $T = 1$ ,

$$P - 1 = -\frac{3(V-1)^3}{2}$$

per cui

$$\frac{V - V_c}{V_c} \sim \left( \frac{P - P_c}{V_c} \right)^{1/3}$$

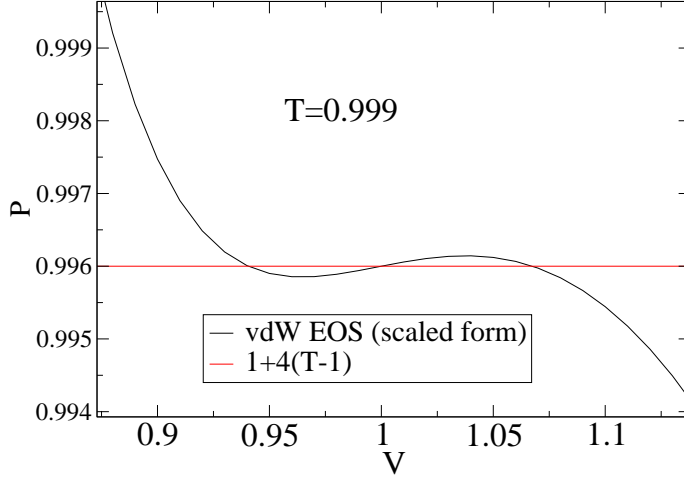


Figure 3: vdW vicino al punto critico ( $T/T_c = 0.999$ )

## 4.2 Esponenti Critici

Se confrontiamo il comportamento della teoria di van der Waals e di una qualsiasi delle teorie qui sviluppate per il modello di Ising scopriamo che si manifesta un comportamento uguale vicino al punto critico. Identificando come parametro d'ordine la differenza di densità nel caso del fluido e la magnetizzazione nel caso di Ising in entrambi i casi, chiamando  $\epsilon \equiv (T - T_c)/T_c$ ,

$$L(T) \sim (-\epsilon)^\beta \quad \rho - \rho_c = (-\epsilon)^\beta \quad \beta = 0.5$$

e

$$\left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial H} \right)_{H=0} \sim |\epsilon|^{-\gamma} \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \sim |\epsilon|^{-\gamma} \quad \gamma = 1$$

Infine, se guardiamo come varia il parametro d'ordine con il campo esterno

$$L(H) \sim H^{1/\delta} \quad \rho - \rho_c \sim (P - P_c)^{1/\delta} \quad \delta = 3$$

Tutti questi andamenti sono descritti quindi da leggi di potenza. Sperimentalmente si osservano effettivamente leggi di potenza ma con esponenti, universali, differenti. Specificamente  $\beta \approx 1/3$ ,  $\gamma \approx 5/4$ ,  $\delta \approx 5$ .

Il campo medio quindi ci consente di capire quello che sta succedendo, ma la descrizione dell'energia libera in vicinanza del punto critico non è esatta. Una nuova teoria, il gruppo di rinormalizzazione, consente di predire gli esponenti corretti.