

In questa lezione discutiamo gli esperimenti che alla fine dell' 800 e agli inizi del 900 misero in crisi la fisica classica e portarono allo sviluppo, negli anni 20 della meccanica quantistica.

Iniziamo con la discussione dei risultati sperimentali che aprirono la crisi. In alcuni punti dovremo utilizzare dei concetti di meccanica statistica, che per il momento postuleremo. Nella seconda parte del corso torneremo su questi punti.

1 Il problema del corpo nero e l'ipotesi di Planck

1.1 Cosa e' un corpo nero

Un corpo nero e' un contenitore chiuso, ma in equilibrio termico. Per esempio una scatola. Per semplificare la trattazione successiva, considereremo una scatola metallica (così che la temperatura della scatola si possa considerare uniforme e così che la radiazione interna sia schermata da quella esterna) di forma cubica (lato L). All' equilibrio termico, nella scatola sarà presente un campo elettromagnetico che "scambia" energia con gli atomi del metallo a temperatura T . Un forellino nella scatola consente di studiare la intensità e distribuzione in frequenza della radiazione contenuta nella scatola.

1.2 I risultati sperimentali

Nello studio della radiazione di corpo nero, i risultati accumulatisi a partire dalla fine dell' 800 mostrarono

- Kirchhoff (1859): a parità di frequenza e temperatura, materiali diversi si comportano in modo simile. Viene dunque ipotizzato che la radiazione di corpo nero sia una proprietà indipendente dalle proprietà del contenitore, e dunque di interesse generale.
- Stefan (1879): l' integrale della energia emessa scala con la temperatura con la legge

$$\mathcal{U} \sim T^4$$

una legge dunque ben diversa dalla predizione classica, a quei tempi ancora non nota ($\mathcal{U} \sim T$).

- Wien (1894): la distribuzione in frequenza della radiazione ha un massimo (in contrasto con la predizione classica) e la posizione del massimo soddisfa

$$\lambda_{max}T = costante$$

Esperimenti successivi dimostrarono che tale risultato non e' corretto quando λ_{max} e' grande (basse frequenze)

- Rayleigh (1900): calcola la distribuzione aspettata teoricamente sulla base della fisica classica riportata precedentemente (a parte un fattore 8), sollevando un problema interpretativo che apre le porte alla meccanica quantistica.

1.3 cosa ci aspettiamo utilizzando concetti di fisica classica

Le condizioni al contorno (campo elettrico nullo sulla superficie del metallo) impongono di fatto onde stazionarie, in cui il campo elettrico sia zero (in ogni direzione) sulle facce in 0 ed in L . Questo fa sì che le possibili onde stazionarie siano date da lunghezze d'onda λ che soddisfano la relazione $n\frac{\lambda}{2} = L$ (e quindi $\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi n}{L}x$) del tipo

$$E_x \sim \sin\left(\frac{\pi}{L}n_x x\right) \quad E_y \sim \sin\left(\frac{\pi}{L}n_y y\right) \quad E_z \sim \sin\left(\frac{\pi}{L}n_z z\right)$$

che possiamo indicare con $\vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$, con n_x, n_y, n_z numeri interi (positivi). Per ogni \vec{k} abbiamo due diverse possibili polarizzazioni (ϵ_i , $i=1,2$ versori ortogonali a \vec{k}). Una tripletta n_x, n_y, n_z ed un valore di ϵ_i definisce un modo di oscillazione del campo elettromagnetico nella scatola.

In fisica classica, un modo del campo elettrico, in equilibrio termodinamico a temperatura T ha energia $V = k_B T$ (infatti il campo elettromagnetico ha una energia che dipende dalla ampiezza del campo al quadrato e vedremo che questo implica che l'energia media sia $k_B T/2$ per termine quadratico). Quindi, tutti i modi hanno in media la stessa energia.

Dimostriamolo, ricordandoci che un campo elettromagnetico ha associata una energia (mediata su un periodo) che può essere espressa come integrale sullo spazio

$$\mathcal{U} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int dV \left(\frac{\epsilon_0 |E|^2}{2} + \frac{|B|^2}{2\mu_0} \right)$$

La media sul tempo (chiamando $q = \omega t$)

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(q) dq = \frac{1}{2}$$

per cui se calcoliamo questa energia per un modo con \vec{k} lungo x , con ampiezza E_0 e B_0 (numeri complessi, incorporano la fase) rispettivamente troviamo (con il cambio di variabile $q = nk_0 x$)

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx dy dz \left(\epsilon_0 E_0^2 \frac{\sin^2(nk_0 x)}{2} + B_0^2 \frac{\sin^2(nk_0 x)}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{2} L^2 \frac{1}{nk_0} \int_0^{2\pi n} dq \left(\epsilon_0 E_0^2 \frac{\sin^2 q}{2} + B_0^2 \frac{\sin^2 q}{2\mu_0} \right)$$

L' integrale indefinito in dq da $(q - \sin(q) \cos(q))/2$ e dunque $2\pi n/2$. Per cui

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} L^2 \frac{1}{nk_0} \left(\epsilon_0 E_0^2 \frac{2\pi n}{2} + B_0^2 \frac{2\pi n}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{2} L^3 \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)$$

Poiche' $E_0/B_0 = c$ e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}L^3\epsilon_0 E_0^2$$

Assumiamo (come dimostreremo nella seconda parte del corso) che la radiazione in equilibrio termodinamico a temperatura T ha energia \mathcal{U} con probabilita' proporzionale a $\exp(-\mathcal{U}/k_B T)$. Il campo elettrico ha una ampiezza $E_0^2 = E_R^2 + E_I^2 + 2iE_R E_I$

Troviamo dunque

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U} \rangle &= \frac{\int_0^\infty dE_R dE_I \mathcal{U} \exp(-\mathcal{U}/k_B T)}{\int_0^\infty dE_R dE_I \exp(-\mathcal{U}/k_B T)} = L^3 \epsilon_0 (\langle E_R^2 \rangle + \langle E_I^2 \rangle) = \\ \sigma_{E_R}^2 + \sigma_{E_I}^2 &= L^3 \epsilon_0 \frac{k_B T}{2L^3 \epsilon_0} + L^3 \epsilon_0 \frac{k_B T}{2L^3 \epsilon_0} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che l' integrale coincide con la varianza σ^2 di una gaussiana.

Supponiamo ora di aprire un forellino nella scatola e misurare la energia della radiazione uscente (che prende il nome di radiazione di corpo nero) e la sua distribuzione in frequenza ω . Ci aspettiamo dunque di misurare una energia proporzionale al numero di modi con frequenza tra ω e $\omega + d\omega$. La relazione che lega k a ω e' naturalmente $\omega = ck$.

Abbiamo visto che i possibili \vec{k} sono dati da

$$\frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

con n_x, n_y, n_z interi positivi o nulli. Dunque nello spazio \vec{k} i possibili modi formano un reticolo cubico di periodicita' π/L , nel "quadrante" positivo. Ad ogni \vec{k} sono associati due modi (diverse polarizzazioni di \vec{E})

In una sfera di raggio K e volume $\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi K^3$ (1/8 tiene conto del fatto che siamo interessati solo al "quadrante" positivo) sono presenti un numero di modi $N_{modi}(k < K)$ (con $k < K$) pari a

$$N_{modi}(k < K) = 2 \frac{\frac{4}{3}\pi K^3}{8(\frac{\pi}{L})^3}$$

Il numero di modi compreso tra K e $K + dK$ e'

$$dN_{modi}(K) = 2 \frac{4\pi K^2}{(\frac{2\pi}{L})^3} dK = L^3 \frac{1}{\pi^2} K^2 dK$$

che in frequenza corrisponde a (o con $\omega = 2\pi\nu$)

$$dN_{modi}(\omega) = 2 \frac{4\pi\omega^2}{(\frac{2\pi}{L})^3} \frac{1}{c^3} d\omega = \frac{L^3\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = L^3 \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

La energia per unita' di volume u che classicamente ci aspettiamo e' dunque

$$du = k_B T dN_{\text{modi}}(\omega) = k_B T \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

o equivalentemente una distribuzione in frequenza

$$du = \rho(\nu) d\nu \quad \rho(\nu) = k_B T \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

o equivalentemente in lunghezza d' onda λ

$$du = \rho(\lambda) d\lambda \quad \rho(\lambda) = k_B T \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

Discutiamo il significato di queste predizioni. Classicamente la distribuzione in frequenza deve crescere con ν^2 o equivalentemente con λ^{-4} . Inoltre deve crescere linearmente con T . L' assurda' della predizione nasce dal comportamento ad alta frequenza (storicamente chiamato catastrofe ultravioletta). Infatti viene predetta una accumulazione dell' energia ad alta frequenza, ed una divergenza della energia totale emessa.

1.3.1 Planck e la quantizzazione

La catastrofe ultravioletta dimostra che c'e' un problema sicuramente ad alte frequenze. La legge di Wien (valida ad alta frequenza) e di Stefan confermano questo problema. Dal confronto tra il calcolo classico e i dati sperimentali si vede che il calcolo classico e' consistente con i dati solo a bassa frequenza. Occorre dunque in qualche modo cambiare lo schema interpretativo alle alte frequenza. Planck, motivato solo da intuizione, postula che le energie possibili di un modo sono tutte multiple di una energia base, proporzionale ad ω . La costante di proporzionalita' dimensionalmente un rapporto tra energia e frequenza, prende oggi il nome di costante di Planck.

Dobbiamo ora calcolare statisticamente quale sara' l' energia di un modo del campo elettromagnetico se le energie possibili non sono piu' distribuite in modo continuo, bensì in modo discreto, con $n = 0, 1, \dots, \infty$

$$E_n = n\hbar\omega$$

(vedremo poi dopo che in realta' e' presente anche un termine costante $\frac{\hbar\omega}{2}$ non incluso nella teoria di Planck).

Come prima, dobbiamo assumere che la probabilita' che un corpo in equilibrio termodinamico a temperatura T abbia energia E_n e' proporzionale a $\exp(-E_n/k_B T)$.

Quindi, l'energia media $\langle U(\omega, T) \rangle$ a temperatura T sara' data da

$$\langle U(\omega, T) \rangle = \frac{\sum_0^\infty n\hbar\omega e^{-\beta n\hbar\omega}}{\sum_0^\infty e^{-\beta n\hbar\omega}} = \hbar\omega \frac{\sum_0^\infty nx^n}{\sum_0^\infty x^n} = \hbar\omega x \frac{\sum_0^\infty \frac{dx^n}{dx}}{\sum_0^\infty x^n} =$$

$$\begin{aligned}\hbar\omega \frac{x \frac{d}{dx} \sum_0^\infty x^n}{\sum_0^\infty x^n} &= \hbar\omega \frac{x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \hbar\omega x \frac{d \ln \left[\frac{1}{1-x} \right]}{dx} = \\ -x \frac{d \ln(1-x)}{dx} &= \hbar\omega \frac{x}{1-x} = \hbar\omega \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \hbar\omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\end{aligned}$$

dove $x = e^{-\beta\hbar\omega}$

La densita' di energia $\rho(\omega)d\omega$ tra ω e $\omega + d\omega$ e' dunque

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{1}{V} \langle U(\omega, T) \rangle dN_{modi}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \quad \rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1}$$

(dove $\hbar = h/2\pi$)

1.4 Predizioni della teoria di Planck

Iniziamo con il guardare l'energia totale, integrata su tutte le frequenze.

$$U = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^\infty x^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

L' integrale a destra e' un numero puro. Dunque non c'e' piu' un problema di catastrofe ultravioletta e inoltre la dipendenza dalla temperatura e' tutta inclusa nel termine β^{-4} , cioe' T^4 (Stefan).

Guardiamo adesso la funzione $\rho(\nu)$ per determinarne il massimo. Effettivamente un massimo sara' presente, perche' a bassi ν la funzione si comporta come ν^2 ($e^{\beta h \nu} - 1 \approx \beta h \nu$) mentre per grandi ν si comporta come $\nu^3 e^{-\beta h \nu}$. Se esprimiamo la funzione nella variabile adimensionale $\beta h \nu$, automaticamente dimostriamo che il massimo in frequenza sara' $(\beta h \nu)_{max} = \text{costante}$. Poiche' $\lambda \nu = c$, avremo $\frac{1}{T \lambda_{max}} = \text{costante}$, cioe' la legge di Wien. Se determiniamo il massimo esattamente, troviamo

$$T \lambda_{max} = \frac{hc}{5k_B}$$

che consenti' di determinare il valore di h , visto che c e k_B erano gia' noti. Il valore di $h \approx 6.7 \times 10^{-34}$ J s. Per una frequenza di 1 Hz, i valori di energia distano dunque tra di loro 10^{-34} J, praticamente un continuo. Per frequenze nel visibile, $\nu = 10^{15}$ Hz, la differenza tra i livelli di energia cresce a 10^{-19} J, un valore significativo.

Torniamo per concludere al comportamento a bassa frequenza

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\beta h \nu} = k_B T \frac{8\pi \nu^2}{c^3}$$

che coincide con il risultato classico. La teoria di Planck sembra funzionare perfettamente, anche se non siamo in grado di capire perche' i livelli energetici non debbano essere continui.

2 Calore Specifico dei Solidi

2.1 cosa ci aspettiamo utilizzando concetti di fisica classica

Dal punto di vista classico, un solido puo' essere in prima approssimazione considerato come un sistema di atomi interagenti con un potenziale armonico. Espandendo il potenziale intorno al minimo dell' energia possiamo espanderlo al secondo ordine come

$$V(\mathbf{r}^N) \approx V(\mathbf{r}_{min}^N) + \frac{1}{2} \sum_{i\alpha} \sum_{j\beta} \left(\frac{\partial^2 V(\mathbf{r}^N)}{\partial r_{i\alpha} \partial r_{j\beta}} \right)_{min} (r_{i\alpha} - r_{i\alpha,min})(r_{j\beta} - r_{j\beta,min})$$

dove il termine di primo grado manca essendo le forze per ipotesi nulle nel minimo.

Figura schematica di un solido armonico bi-dimensionale

L' Hamiltoniana del sistema, se diagonalizzata, puo' essere scritta come la somma di $3N - 6$ modi normali armonici di differenti frequenze. Il termine 6 indica i 3 modi di pura traslazione ed i 3 modi di pura rotazione. Poiche' sia l' energia potenziale che cinetica sono forme quadratiche, ancora una volta classicamente ci aspettiamo che ogni modo contribuisca con $k_B T$ e trascurando la costante 6 per N grandi

$$U = 3Nk_B T$$

Il calore specifico, definito come la derivata di U rispetto a T e' dunque

$$C_V = 3Nk_B$$

indipendente da T e uguale per tutti i materiali.

2.2 I risultati sperimentali

Le prime misure di calore specifico di solidi (1819) portarono Dulong e Petit a postulare che tutti i materiali hanno lo stesso calore specifico. Quando furono pero' compiute (tardo 800) misure del calore specifico a temperature piu' basse della temperatura ambiente ci si accorse che C_V tendeva a diminuire, fino a raggiungere valori nulli a temperature basse. Sembrava dunque paradossale che andando a temperature dove l' approssimazione armonica dei solidi doveva funzionare meglio, la predizione classica diveniva sempre piu' inesatta.

2.3 Il modello di Einstein

Nel 1906, Einstein riconobbe l' analogia tra le oscillazioni nei solidi e l' idea di Planck. Anche egli dunque postulo' che l' energia dei modi di vibrazione di un solido fosse quantizzata esattamente come quella del campo elettromagnetico

$$E_n = n\hbar\omega$$

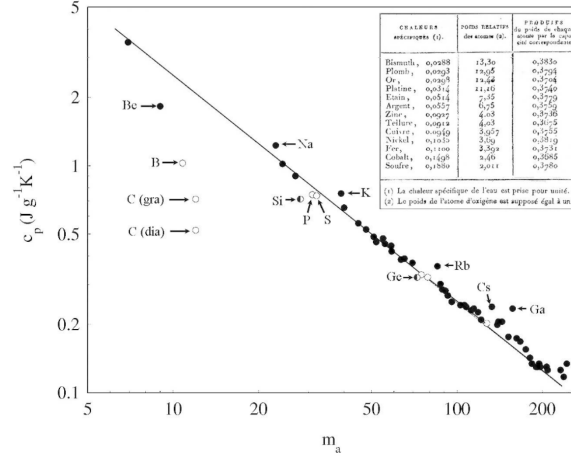


Fig. 3.2 Specific heat per unit mass c_p of those elements that are solids at $T = 25^\circ$. Full and open circles respectively indicate metals and nonmetals, while the semiconductors silicon and germanium are shown by half-full dots. In this double-log plot, the Dulong–Petit law is given by the straight line. Those elements whose heat capacity deviates appreciably from the DP law are explicitly indicated, with two allotropes of carbon, diamond and graphite, marked by C(dia) and C(gra). The original table for the 13 elements studied by Petit and Dulong is shown in the inset

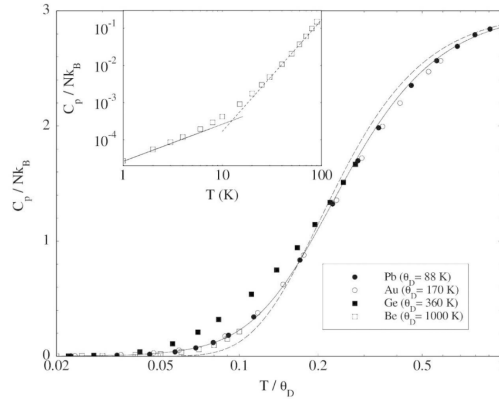


Fig. 3.5 Best fit to the Debye model of the heat capacity for the elements in Fig. 3.3, using the values of θ_D given in the legend. The double-log plot in the inset shows the low- T behavior of C_V for beryllium, with the full and broken lines respectively indicating the limiting linear and cubic behaviour in T

Figure 1: Dati originali di Dulong e Petit e Debye fit

Come abbiamo calcolato precedentemente, questo implica che l' energia media sia

$$\langle U(\omega, T) \rangle = \hbar\omega \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

un valore che passa dall' essere $k_B T$ ad alta T ($e^{\beta\hbar\omega} - 1 \approx \beta\hbar\omega$) a zero a bassa T . Una curva siffatta, ha dunque derivata non nulla. Ipotizzando per semplicità che tutti i modi normali del solido abbiano la stessa frequenza ω

$$\langle U(T) \rangle = 3N \langle U(\omega, T) \rangle = 3N \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

e

$$C_V = \frac{d}{dT} \langle U(T) \rangle = 3N \frac{(\hbar\omega)^2}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \frac{1}{k_B T^2} e^{\beta\hbar\omega}$$

che storicamente, definendo $\theta_E = \hbar\omega/k_B$, viene scritta come

$$C_V^E = \frac{d}{dT} \langle U(T) \rangle = 3N k_B \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2} \frac{\theta_E^2}{T^2}$$

A basse T ,

$$C_V^E \sim 3N k_B e^{-\theta_E/T} \frac{\theta_E^2}{T^2}$$

che non descrive propriamente la dipendenza sperimentale. Il modello di Einsteins cattura dunque l' andamento di C_V e suggerisce che la discretizzazione dei livelli energetici e' importante anche per il calore specifico dei solidi.

2.4 Il modello di Debye

Un miglioramento rispetto alla teoria di Einstein, che migliora l' accordo con i dati sperimentali fu proposto da Debye, il quale sostituì la frequenza singola scelta da Einstein con una densità di modi, calcolata in modo analogo a quanto abbiamo fatto per la radiazione in una cavità.

Ripartiamo dalla distribuzione in frequenza del numero di modi per onde stazionarie in un volume L^3

$$\rho(\nu) = \frac{4\pi}{v_s^3} \nu^2$$

dove, rispetto alla radiazione di corpo nero, abbiamo sostituito c con la velocità del suono v_s ed eliminato il 2 della polarizzazione del campo elettrico. Nel caso delle vibrazioni, possiamo avere 2 modi trasversi (come nel caso del campo elettrico) che propagano con velocità v_t ma anche un modo longitudinale che propaga con velocità v_l . Se scegliamo una velocità media tra le due, usando la relazione

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3}$$

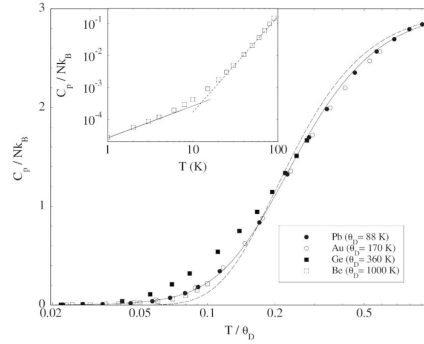


Fig. 3.5 Best fit to the Debye model of the heat capacity for the elements in Fig. 3.3, using the values of θ_D given in the legend. The double-log plot in the inset shows the low- T behavior of C_V for beryllium, with the full and broken lines respectively indicating the limiting linear and cubic behaviour in T

Figure 2: Confronto tra la teoria di Debye e i dati sperimentali. La parte lineare a bassa T si osserva solo nei metalli ed origina dal calore specifico elettronico

possiamo scrivere

$$\rho(\nu) = \frac{12\pi}{v^3} \nu^2$$

A differenza della radiazione di corpo nero, un solido ha un numero di modi fissato ($3N - 6$). Infatti essendo gli atomi distanziati di una distanza reticolare, deve esistere una lunghezza d'onda minima. Debye propose di scegliere la frequenza massima ν_{max} utilizzando la relazione

$$\int_0^{\nu_{max}} \rho(\nu) d\nu = 3N$$

Si trova così che ν_{max} , chiamata anche frequenza di Debye, è

$$\nu_{max} = \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3} v$$

Moltiplicando la densità degli stati per la energia media di un modo a frequenza ν , calcolata esattamente come Planck, troviamo

$$C_V^D = 9Nk_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x dx}{(1 - e^x)^2}$$

dove $\theta_D = h\nu_{max}/k_B$. Questa espressione riproduce correttamente i risultati sperimentali e indica come comportamento ad alte T ($x \rightarrow 0$ poiché il limite di integrazione tende a

zero)

$$C_V^D(T \rightarrow \infty) = 9Nk_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4(1+x+\dots)dx}{[1-(1+x+\dots)]^2} dx = 9Nk_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} x^2 dx = 3Nk_B$$

e a basse T , questa volta portando il limite di integrazione ad infinito

$$C_V^D(T \rightarrow 0) = 9Nk_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^4 e^x dx}{(1-e^x)^2} dx$$

L' integrale sulla destra vale $4\pi^4/15$ per cui

$$C_V^D(T \rightarrow 0) = Nk_B \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

che costituisce la famosa legge T^3 e sancì il grande trionfo della teoria di Debye.

Vale la pena osservare che sia la teoria di Einstein che quella di Debye prevedono anche una legge di stati corrispondenti. Tutti i materiali, una volta che la temperatura è scalata dal θ , mostrano lo stesso andamento.

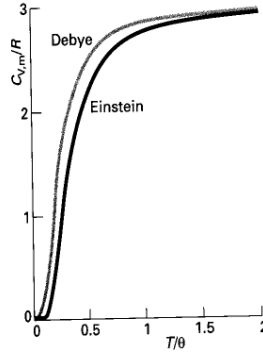


Fig. 0.3 The Einstein and Debye molar heat capacities. The symbol θ denotes the Einstein and Debye temperatures, respectively. Close to $T = 0$ the Debye heat capacity is proportional to T^3 .

Figure 3: Confronto tra le previsioni delle due teorie

3 Effetto fotoelettrico

Un altro esperimento che mise in crisi la fisica classica è il cosiddetto effetto fotoelettrico in cui radiazione inviata su un metallo determina l' emissione di un elettrone. Si scoprì

sperimentalmente che la frequenza della luce inviata doveva essere superiore ad un valore di soglia per determinare l' emissione, indipendentemente dalla intensita' della luce inviata. A frequenze piu' basse della soglia, anche per altissime intensita' inviate, nessun evento di emissione veniva osservato. In aggiunta, a frequenze maggiori l' elettrone viene emesso con una energia cinetica proporzionale alla differenza tra $\hbar\omega$ e $\hbar\omega_{soglia}$.

Questo risultato ancora una volta suggeriva la presenza di livelli discreti di energia per gli elettroni nella materia e, inoltre, suggeriva una localizzazione spaziale della radiazione (assorbita da un elettrone localizzato nello spazio). L' idea che la radiazione fosse un insieme di corpuscoli, o pacchetti d' onde di energia $\hbar\omega$ fu all' origine del nome "fotoni" (nome proposto nel 1926 da Lewis).

4 Spettri atomici

Lo studio degli spettri atomici, cioe' dell' assorbimento ed emissione di atomi in fase gassosa costitui' un altro punto di rottura con la fisica classica. Vennero infatti osservate anche qui frequenze privilegiate, indicative di specifiche differenze finite di energia.

La prima osservazione della presenza di emissione di radiazione di una specifica lunghezza d'onda proveniente da atomi incandescenti si ebbe gia' nel 1750 ma occorre attendere lo sviluppo dei reticoli di diffrazione per capire che atomi diversi sono caratterizzati da luce emessa e/o assorbita a frequenze ben definite (righe) ma diverse tra loro e che le righe osservate sono posizionate a frequenze uguali sia per emissione che per assorbimento della luce. Atomi freddi (cioe' a temperatura ambiente o minore) assorbono la luce, atomi caldi (cioe' a temperature delle migliaia di gradi) emettono luce, ma alla stessa frequenza. La possibilita' di usare la posizione in frequenza della luce emessa per identificare i diversi atomi che compongono un gas consenti' per esempio di stabilire che e' presente sodio intorno sulla superfice solare. Il sodio ha infatti nel visibile uno specifico doppietto (due frequenze molto vicine).

Nel 1855 Balmer intuì la presenza di una regolarita' nelle frequenze emesse e/o assorbite dall' atomo di idrogeno nel visibile, che gli consenti' di stabilire che le frequenze potevano essere descritte da una combinazione di due numeri interi positivi n_a e n_b secondo la relazione

$$\nu_{ab} = cR \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

dove $R = 109.677 \text{ cm}^{-1}$ (per l'idrogeno) e c la velocita' della luce (in cm/s). La possibilita' di scrivere la frequenza come differenza di due termini immediatamente suggerisce di associare dei livelli energetici ai termini. Ricordando che $E = h\nu$, si puo' pensa di descrivere l' atomo di idrogeno come un sistema di livelli determinati dalla espressione

$$E_n = \frac{hcR}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

e la radiazione emessa come passaggio tra due livelli. In base al valore di $n_b = 1, 2, 3, \dots$, le frequenze ottenute al variare di $n_a > n_b$ prendono il nome di righe di Lyman ($n_b = 1$, $\lambda \approx 1000\text{\AA}$), Balmer ($n_b = 2$, $\lambda \approx 4000 - 6000\text{\AA}$), Paschen ($n_b = 3$, $\lambda \approx 10000 - 20000\text{\AA}$), Brackett ($n_b = 4$). Ci si sposta dunque dalla regione *UV* della Lyman, al visibile della Balmer, all' IR della Paschen.

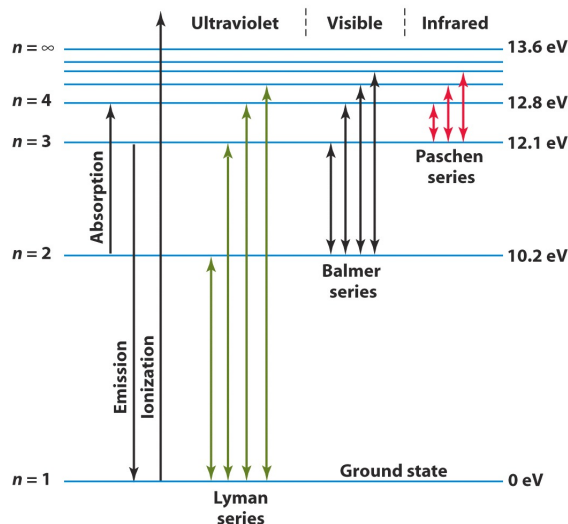


Figure 4: Linee spettrali dell' atomo di idrogeno

Questi risultati richiedevano fortemente una modellizzazione degli atomi che andasse oltre la fisica classica. In realta' la fisica classica aveva gia' da risolvere il problema della stabilita' di un sistema di cariche di segno opposto, anche nel limite di sole due cariche (positiva e negativa). Mentre e' possibile trovare una soluzione stazionaria in cui l' attrazione elettrostatica fornisce la forza centripeta, la continua accelerazione delle cariche dovrebbe portare alle emissioni di radiazione e dunque alla perdita di energia del sistema, fino al collasso delle due cariche. Come poteva dunque un atomo, secondo la fisica classica, rimanere stabile ?

4.1 Il modello di Bohr

Nel 1913 Bohr propose un modello (una serie di ipotesi) compatibile con i dati sperimentali. Propose

- In un atomo esistono un insieme discreto di orbite stazionarie (che assumeremo circolari per semplicita')
- L' energia emessa o assorbita coincide con il passaggio tra orbite. Viene emessa/assorbita radiazione con frequenza $\omega = \Delta E/\hbar$.

- Nelle orbite stazionarie c'è un bilancio tra attrazione elettrostatica e forza centripeta
- Il momento angolare associato all'orbita è un multiplo intero di \hbar . Questo valore determina anche l'energia dell'orbita circolare. Qui sta l'idea che l'orbita è una specie di onda periodica

Da queste ipotesi, conoscendo la massa dell'elettrone m_e , la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 , la carica elettrica e si trova che

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8n^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}$$

Infatti, in una orbita circolare il momento angolare L (che per ipotesi è un multiplo di \hbar) è

$$L = r \times p = rmv = n\hbar$$

La uguaglianza tra forza di Coulomb e forza centripeta (l'accelerazione in un moto circolare uniforme è $a = \frac{v^2}{r}$) porta a

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

una espressione che mostra anche che l'energia potenziale è in modulo 2 volte quella cinetica. Infatti

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mv^2 = -2K$$

L'energia totale è dunque

$$E_n = -K = -\frac{1}{2}mv^2$$

Poiché

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = mrv^2 = mrv \quad v = n\hbar v$$

troviamo

$$mv^2 = \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4m}{n^2 \hbar^2} = \frac{e^4}{4\epsilon_0^2} \frac{m}{n^2 \hbar^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n \hbar}$$

corrispondente a

$$E_n = -\frac{1}{8} \frac{m e^4}{n^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}$$

coincidente con il valore sperimentale.

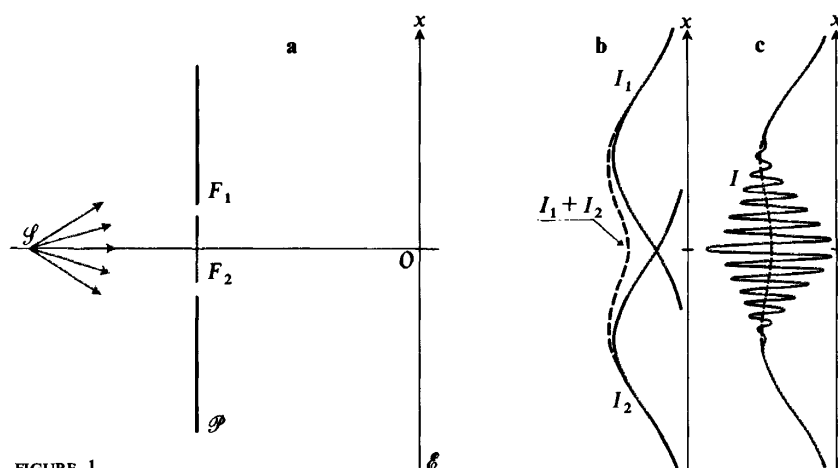


FIGURE 1

Diagram of Young's double-slit light interference experiment (fig. a). Each of the slits F_1 and F_2 produces a diffraction pattern on the screen \mathcal{E} . The corresponding intensities are $I_1(x)$ and $I_2(x)$ (solid lines in figure b). When the two slits F_1 and F_2 are open simultaneously, the intensity $I(x)$ observed on the screen is not the sum $I_1(x) + I_2(x)$ (dashed lines in figures b and c), but shows oscillations due to the interference between the electric fields radiated by F_1 and F_2 (solid line in figure c).

Figure 5: Onda o particella ?

4.2 Dualita' onda particelle

Ulteriori esperimenti misero ulteriormente in crisi la fisica classica. Insieme all' effetto fotoelettrico che indicava un aspetto corpuscolare della luce, va discusso l' esperimento di Young sulla doppia fenditura.

Se in uno schermo si introducono due fenditure, possiamo differenziare tra il passaggio di un' onda ed il passaggio di una particella. Infatti se colpiamo lo schermo con una onda piana, riveleremo su un successivo secondo schermo una figura di interferenza, dovuta al diverso cammino ottico della radiazione che passa dalle due fenditure. Se invece inviamo particelle classiche ci aspettiamo di osservare due picchi di intensita' in prossimita' delle fenditure.

L' esperimento di Young mostro' che diminuendo l' intensita' della radiazione, si passava dal segnale tipico che ci si aspettava per onde, al segnale che ci si aspettava per particelle, in cui lo schermo indicava i precisi punti di impatto dei singoli fotoni. Ma integrando nel tempo, il segnale tipico ondoso veniva recuperato. Quindi, anche quando l' intensita' della radiazione era cosi bassa da suggerire un aspetto corpuscolare (con il fotone che passa o da una o dall' altra fenditura), la presenza della ulteriore fenditura aperta era capace di determinare nel lungo tempo frange di interferenza.