Il dualismo onda-corpuscolo e il principio di indeterminazione

- Dal dualismo onda-corpuscolo sperimentalmente verificato nei fenomeni di interferenza osservati per le particelle nasce la meccanica ondulatoria di Schroedinger, prima formulazione della meccanica quantistica

- Dal dualismo onda-corpuscolo nasce il principio di indeterminazione nella prima formulazione di Heisenberg del 1927:

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar$$
$$\Delta y\, \Delta p_y \geq \hbar$$
$$\Delta z\, \Delta p_z \geq \hbar$$

Il dualismo onda-corpuscolo e il principio di indeterminazione

- Secondo la meccanica ondulatoria lo stato di una particella, come l'elettrone, è determinato da una funzione d'onda ψ che è una funzione complessa a modulo quadro integrabile e normalizzata:
  $\Psi(\mathbf{x}, t)$, con $\int |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \, d^3x = 1$

- La forma della funzione, che viene chiamata pacchetto d'onde, descrive l'aspetto ondulatorio della particella, mentre il legame con l'aspetto corpuscolare è dato dall'interpretazione statistica della funzione d'onda, il cui modulo quadro dà la densità di probabilità di trovare la particella in una certa regione di spazio

Il dualismo onda-corpuscolo e il principio di indeterminazione

- 1) Vale **un principio di sovrapposizione degli stati** analogo al principio di sovrapposizione delle onde

  che spiega i fenomeni di interferenza osservati per le particelle

  potendosi sviluppare una funzione d'onda in integrale di Fourier

Il dualismo onda-corpuscolo e il principio di indeterminazione

- Lo sviluppo in integrale di Fourier della funzione d'onda consente di interpretare il pacchetto d'onde come la somma di onde armoniche espresse come e^{ikx}, con coefficienti dati dalla trasformata di Fourier dell'onda, in analogia con le onde elettromagnetiche, seguendo la corrispondenza di De Broglie:

Per i fotoni: $E = h\nu = \hbar\omega$ e $p = h\nu/c = h/\lambda$

Per le particelle:

lunghezza d'onda $\lambda = h/p$

numero d'onda $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\, p/h$

$p = \hbar k,\ k = p/\hbar$

Significato del principio di indeterminazione

- Una particella la cui quantità di moto sia nota con precisione infinita corrisponde ad un'onda armonica e^{ikx} estesa da $x = -\infty$ a $x = +\infty$, nello spazio degli impulsi da una δ di Dirac

- Una particella la cui posizione sia nota con precisione infinita è descritta da una δ di Dirac, nello spazio degli impulsi da una funzione e^{-ikx} estesa da $k = -\infty$ a $k = +\infty$

- Es.: *caso di una funzione d'onda gaussiana*

Significato del principio di indeterminazione

$f(x) = N\, e^{-x^2/4a^2}$, $N = (2\pi a^2)^{-1/4}$

Densità di probabilità
$|f(x)|^2 = N^2\, e^{-x^2/2a^2} = 1/(\sqrt{(2\pi)}a)\, e^{-x^2/2a^2}$ **gaussiana centrata in 0 di deviazione standard $\sigma = a$**

Indeterminazione $\Delta x = \sigma = a$
$\Delta x^2 = \sigma^2 = \int x^2 N^2\, e^{-x^2/2a^2}\, dx = a^2$

Sviluppo integrale di Fourier:
$f(x) = 1/\sqrt{(2\pi)} \int F(k)\, e^{ikx}\, dk$, con

$F(k) = 1/\sqrt{(2\pi)} \int f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \sqrt{2}\, N\, a\, e^{-k^2a^2}$
$|F(k)|^2 = 2\, N^2a^2 e^{-2k^2a^2} = 2a/\sqrt{(2\pi)}\, e^{-2k^2a^2}$ **gaussiana centrata in 0 di deviazione standard $\sigma = 1/(2a)$**

da cui il prodotto delle indeterminazioni: **$\Delta x\, \Delta k = 1/2 \Rightarrow \Delta x\, \Delta p = 1/2\, \hbar$**

Si dimostra che la gaussiana è la funzione d'onda che rende minimo il prodotto delle indeterminazioni per cui per una generica funzione d'onda sarà

$$\Delta x\, \Delta p \geq 1/2\, \hbar$$

Rappresentazione dell'impulso e dell'energia in meccanica ondulatoria

- Poiché $k_x \, e^{ikx} = - i \, \partial (e^{ikx}) / \partial x$
  e $k_x = p_x / \hbar$
  segue che $p_x = - i \hbar \, \partial / \partial x$, analogamente per p_y e p_z

- Poiché l'energia totale $H = p^2/2m + V$
  per analogia segue che $H = - \hbar^2 (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2)/2m + V$

- In analogia con le onde elettromagnetiche un'onda armonica che si propaga nel tempo è descritta dalla funzione $e^{\,i(kx-\omega t)}$:
  poiché $\omega \, e^{i(kx-\omega t)} = - i \, \partial (e^{i(kx-\omega t)}) / \partial t$
  e $E = \hbar\omega$
  segue che $E = i \hbar \, \partial / \partial t$

- Da cui l'equazione di Schroedinger:
  $$i \hbar \, \partial / \partial t \, \psi(t) = H \, \psi(t)$$

Significato del principio di indeterminazione

- Impossibilità di determinare simultaneamente posizione e impulso

- Impossibilità di attribuire simultaneamente realtà oggettiva, senso a queste due grandezze fisiche

- Es. *l'esperimento di Young*. Se arriva un fotone alla volta, ogni fotone colpisce lo schermo in un punto e la distribuzione dei fotoni sullo schermo esposto per un tempo abbastanza lungo dà ancora la figura di intereferenza, ossia i punti di arrivo dei fotoni sullo schermo sono distribuiti probabilisticamente secondo il pattern della figura di interferenza. Ma se metto un contatore per vedere da quale fenditura è passato il fotone,distruggo l'interferenza: misuro la posizione, ossia trovo la particella in una certa regione di spazio, ne definisco l'aspetto corpuscolare ma distruggo l'aspetto ondulatorio

Conseguenze del principio di indeterminazione

- 2) Il principio di indeterminazione introduce il concetto di **grandezze compatibili** e **non compatibili**
- Due grandezze sono compatibili se si possono misurare contemporaneamente con precisione arbitraria

- Impossibilità di determinare simultaneamente due grandezze fisiche non compatibili
- Impossibilità di attribuire simultaneamente realtà oggettiva, quindi senso, a due grandezze fisiche non compatibili

Conseguenze del principio di indeterminazione

- Se pensiamo alla definizione di momento angolare o di energia in fisica classica, dalla incompatibilità posizione-impulso deriva che ogni altra grandezza fisica non può avere lo stesso significato in meccanica quantistica e in fisica classica

- Es. per il momento angolare **L**:

- il valore di una componente, ad es. L_z, non può essere dedotto dalla conoscenza delle variabili x, y, p_x, p_y
- L_z stesso non è compatibile con nessuna delle variabili x, y, p_x, p_y
- due diverse componenti di **L** non sono compatibili tra di loro

3) Si pone il problema di capire la relazione tra grandezza fisica e sua misura e di come rappresentare le grandezze fisiche!

Conseguenze del principio di indeterminazione

- Un'altra conseguenza è che non potendosi conoscere con precisione arbitrariamente piccola simultaneamente posizione e impulso, dalla indeterminazione delle condizioni iniziali segue l'indeterminazione della traiettoria

4) Il concetto di traiettoria perde significato!

Stati, grandezze fisiche, misure

- Lo stato del sistema è determinato dalla conoscenza simultanea di un insieme massimo di grandezze che siano indipendenti e compatibili fra di loro (cfr. punti 2 e 3)

- Una grandezza fisica misurabile si dice OSSERVABILE

- Si dice osservazione la misura di una o più osservabili compatibili

- Si dice osservazione massima un insieme massimo di osservabili indipendenti e compatibili

Stati, grandezze fisiche, misure

- In fisica classica un sistema ad N gradi di libertà è completamente determinato se si conoscono 2N osservabili (ad esempio, per il punto materiale: x, y, z, px, py, pz)

- In meccanica quantistica un sistema ad N gradi di libertà è completamente determinato se si conoscono N osservabili (ad esempio x, y, z, oppure px, py, pz)

- Sia A = {A1, A2….AN} un'osservazione massima del sistema e siano a = {a1,a2….aN} i valori osservati di queste grandezze

- Si indica col simbolo |a> lo stato del sistema, detto stato quantico

Stati, grandezze fisiche, misure

- Se il sistema si trova nello stato |a> e viene eseguita una misura delle A, il risultato è dato univocamente dalle ai: si dice che |a> è un autostato delle Ai

- Ogni osservabile ammette sempre almeno un autostato per ogni possibile risultato di una misura

- La misura di una osservabile B non compatibile con le Ai quando il sistema si trova nell'autostato |a> non potrà dare un risultato univoco e certo, ossia misure di B sul sistema nell'autostato |a> daranno di volta in volta risultati diversi

Stati, grandezze fisiche, misure

- Tuttavia, eseguita la misura di B e ottenuto il risultato bk, il sistema dopo la misura si trova in un autostato di B e non è più nell'autostato |a>

Il risultato di una misura NON è una funzione univoca dello stato

Un'osservazione del sistema influisce fortemente su di esso poiché ne cambia bruscamente lo stato quantico

Stati, grandezze fisiche, misure

- Se il sistema è nello stato |a> e si esegue la misura di B, si ha una certa probabilità Pk di trovare il risultato bk ovvero di trovare il sistema nell'autostato |bk>

- Si potrebbe pensare allo stato |a> come ad una miscela statistica degli autostati |bk> con pesi Pk, MA una tale descrizione non è corretta perché prima della misura il sistema è nello stato |a> che è uno stato ben definito (stato puro) e non è una miscela statistica di stati

- Come si esprime allora lo stato |a> per mezzo degli autostati |bk> ? Si applica il principio di sovrapposizione! (cfr. punto 1)

Stati, grandezze fisiche, misure

- La meccanica quantistica dice che lo stato |a> è descrivibile come una SOVRAPPOSIZIONE degli autostati |bk>

- In generale vale il principio di sovrapposizione degli stati:

Un generico stato quantico di un sistema si può pensare come sovrapposizione degli autostati di una data osservabile e qualunque sovrapposizione di autostati di una data osservabile di un sistema è uno stato quantico del sistema

Questo significa che ogni autostato componente interviene non solo con un suo peso statistico, ma con una data fase, in modo coerente

Implicazioni del principio di sovrapposizione

- Consideriamo una particella di spin 1/2 (neutrone, elettrone, protone), ignorandone i gradi di libertà spaziali e tenendo conto solo delle variabili di spin. Supponiamo di avere un fascio di particelle identiche e di sottoporlo ad un esperimento di tipo Stern-Gerlach utilizzando un gradiente di campo magnetico nella direzione dell'asse z. In uscita ritroviamo due fasci, uno con spin su e uno con spin giù rispetto all'asse z.

Implicazioni del principio di sovrapposizione

- 1) Se uno solo dei due fasci (ad es. quello con lo spin su rispetto all'asse z) viene sottoposto ad un secondo esperimento di Stern-Gerlach utilizzando ancora un gradiente di campo magnetico nella direzione dell'asse z, in uscita ritroviamo un unico fascio (ad es. con lo spin su rispetto all'asse z)

- 2) Se uno solo dei due fasci (ad es. quello con lo spin su rispetto all'asse z) viene sottoposto ad un secondo esperimento di Stern-Gerlach utilizzando un gradiente di campo magnetico nella direzione dell'asse y, in uscita si ritovano due fasci uno con spin su e uno con spin giù rispetto all'asse y.

Implicazioni del principio di sovrapposizione

- 3) Se ora uno solo dei due fasci (ad es. quello con spin su rispetto all'asse y) viene sottoposto ad un terzo esperimento di Stern-Gerlach utilizzando di nuovo un gradiente di campo magnetico nella direzione dell'asse z, in uscita ritroviamo ancora due fasci uno con spin su e uno con spin giù rispetto all'asse z.

- Si pone quindi il problema di attribuire proprietà fisiche oggettivamente possedute (ossia indipendentemente dal fatto che il sistema sia sottoposto o meno ad un processo di misura) da un sistema fisico. Infatti, dopo la prima misura il sistema si trova con certezza, ossia con probabilità 1, nello stato con spin su (caso 1) e sembreremmo autorizzati a dire che il sistema possieda dopo la misura una proprietà fisica oggettiva, ma l'esperimento 3 dimostra che pensare questo non è legittimo.

Le richieste sul formalismo

Dalla fisica alle richieste sul formalismo:

- \- associare ad uno stato quantico un elemento di un opportuno spazio vettoriale (vettore di stato)
- \- associare ad ogni grandezza fisica misurabile (osservabile) un operatore lineare in quello spazio vettoriale. Tale operatore deve avere una base ortonormale di autovettori in quello spazio vettoriale, almeno uno $|a_k>$ per ogni possibile risultato della misura a_k
- \- ogni vettore di stato si deve poter sviluppare sulla base ortonormale di autovettori dell'osservabile con opportuni coefficienti c_k : il modulo quadro $|c_k|^2$ di ciascun coefficiente dà la probabilità di trovare il risultato a_k dalla misura dell'osservabile
- \- a due osservabili non compatibili devono corrispondere due operatori che non abbiano un insieme comune di autovettori

Le richieste sul formalismo: gli stati

Dalle richieste segue che:

- a) nello spazio vettoriale si deve poter definire il prodotto scalare tra vettori, in modo che i coefficienti c_k siano il prodotto scalare di $<a_k|\Psi>$
- b) nello spazio vettoriale si deve poter definire la norma di un vettore
  e in particolare il vettore di stato deve avere norma 1
- c) qualunque combinazione lineare convergente di autostati di un'osservabile deve essere un vettore di stato del sistema

$\Rightarrow$ Spazio di Hilbert!!!

Le richieste sul formalismo: le grandezze fisiche

- d) le grandezze fisiche devono essere rappresentate da operatori lineari autoaggiunti: infatti, se e solo se un operatore è autoaggiunto ammette un set di autovalori REALI a_k e una base ortonormale di autovettori $|a_k>$, su cui sviluppare i vettori di stato del sistema con coefficienti c_k

- e) due grandezze fisiche non compatibili devono essere rappresentate da operatori lineari autoaggiunti che non commutano e due grandezze fisiche compatibili devono essere rappresentate da operatori lineari autoaggiunti che commutano: infatti, condizione necessaria e sufficiente per poter misurare simultaneamente due osservabili fisiche è che gli operatori corrispondenti abbiano una base comune di autovettori. Condizione necessaria e sufficiente affinchè due operatori autoaggiunti abbiano un sistema completo di autostati in comune è che essi commutino

I postulati della meccanica quantistica

- 1) STATO QUANTICO: ad un sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert. Ad ogni stato del sistema corrisponde un vettore $|\psi>$ di norma 1 nello spazio di Hilbert, detto vettore di stato.

- 2) OSSERVABILE: ad ogni grandezza fisica misurabile (osservabile) A corrisponde un operatore lineare autoaggiunto (hermitiano) $\hat{A}$ nello spazio di Hilbert, dotato di un insieme ortonormale completo di autovettori $|a_k>$. L'insieme dei valori possibili per la misura di un'osservabile è dato dallo spettro degli autovalori a_k (sicuramente reali!) dell'operatore corrispondente.

  La linearità dell'operatore assicura che esso possa essere rappresentato come una matrice (eventualmente infinito dimensionale) in una qualche base, mentre l'autoaggiuntezza assicura che lo spettro dell'operatore sia reale.

  Si generalizza al caso degenere (autospazio degli autovettori degeneri e proiettore sull'autospazio) e al caso di uno spettro continuo di autovalori (alle somme si sostituiscono gli integrali, alla normalizzazione a 1 la normalizzazione alla delta di Dirac).

I postulati della meccanica quantistica

- 3) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: dato un insieme ortonormale completo di autovettori di una osservabile, se il sistema fisico si trova in uno stato $|\psi\rangle$, allora

  $$|\psi\rangle = \Sigma \langle a_k|\Psi\rangle\, |a_k\rangle$$

  e la probabilità che la misurazione di una grandezza dia come risultato a_k è $|\langle a_k|\Psi\rangle|^2$.
  Si generalizza al caso degenere e al caso continuo.

- 4) RIDUZIONE DEL PACCHETTO D'ONDE: se il sistema fisico si trova in uno stato $|\psi\rangle$ e viene eseguita la misura di una osservabile ottenendo il risultato a_k, allora subito dopo la misura il sistema si trova nell'autostato $|a_k\rangle$.
  Si generalizza al caso degenere e al caso continuo.

I postulati della meccanica quantistica

- 5) EVOLUZIONE DEL SISTEMA: l'evoluzione del sistema è descritta dalla seguente equazione del moto:

$$i\hbar\, \partial/\partial t\, |\Psi(t)\rangle = \hat{H}\, |\Psi(t)\rangle$$

dove $\hat{H}$ è un operatore lineare autoaggiunto unitario, che corrisponde nella meccanica classica all'hamiltoniana H (energia) del sistema e pertanto viene chiamato operatore hamiltoniano. Gli autovalori dell'hamiltoniano sono i possibili valori dell'energia del sistema. L'hamiltoniano deve essere un operatore unitario perché deve conservare la norma unitaria del vettore di stato

I postulati della meccanica quantistica

- 6) PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA: il formalismo quantistico definisce le osservabili che ammettono analogo classico (x_i, p_i, che hanno spettro continuo, e le grandezze fisiche espresse come loro funzioni) in analogia con la loro definizione in fisica classica in modo che la fisica classica risulti il limite per $\hbar \to 0$ della fisica quantistica, come abbiamo visto in meccanica ondulatoria.
  Ricordando che in meccanica ondulatoria $p_x = -i\hbar\, \partial / \partial x$ etc. e $E = i\hbar\, \partial / \partial t$
  è facile verificare che deve essere:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[E, t] = i\hbar$$

I postulati della meccanica quantistica

Corollari:

a) Valor medio e scarto quadratico medio di un operatore:
- il valor medio di una osservabile su uno stato $|\psi\rangle$ è $\langle A\rangle = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$
- lo scarto quadratico medio ΔA rappresenta l'indeterminazione di una misura ed è dato da:

$$\Delta A = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle^{1/2}$$

È sempre $\Delta A \geq 0$ e $\Delta A = 0$ solo se il sistema si trova in un autostato di A.

b) Condizione di compatibilità:
condizione necessaria e sufficiente perché due osservabili A e B siano compatibili è che gli operatori che le rappresentano commutino fra loro:

$$[A, B] = 0$$

Dato un insieme di osservabili che commutano tutte tra di loro, tale insieme si dice completo se data una n-pla di autovalori per gli operatori dell'insieme esiste uno ed un solo stato del sistema che sia autostato simultaneo di tutti gli autovalori considerati

I postulati della meccanica quantistica

Corollari:

c) Principio di indeterminazione per osservabili non compatibili:

dati due operatori hermitiani che non commutano, associati a due osservabili A e B non compatibili, per un sistema nello stato $\Psi >|$ vale la diseguaglianza:

$$\Delta A \, \Delta B \geq 1/2 \; |<\Psi| \, [A, B] | \, \Psi\rangle >|$$

In particolare per posizione e quantità di moto, e per energia e tempo:

$$\Delta \, x_i \, \Delta \, p_i \geq 1/2 \, \hbar$$

$$\Delta \, E \, \Delta \, t \geq 1/2 \, \hbar$$

Rappresentazione degli stati e degli operatori

- Nella meccanica ondulatoria di Schroedinger gli stati vengono rappresentati da funzioni d'onda della posizione e dell'impulso e gli operatori sono definiti dal risultato dell'operatore sulla funzione d'onda.

- Nella meccanica matriciale di Heisenberg, gli operatori vengono rappresentati da matrici e gli stati da vettori colonna.

- Nella rappresentazione formale di Dirac, gli stati sono gli elementi di uno spazio di Hilbert, ket $|\alpha>$ (che possono essere rappresentati come vettori colonna), di cui i bra $<\beta|$ (come vettori riga complessi coniugati) sono i vettori duali, il prodotto scalare o interno si indica come prodotto di bra e ket con la proprietà che $\mathbf{<\beta|\alpha> = <\alpha|\beta>^*}$.

Data una base di vettori $|\gamma i>$, $\mathbf{|\alpha> = \sum_i |\gamma i> < \gamma i\ |\alpha >}$.

Dato un operatore A esso può essere rappresentato da una matrice quadrata utilizzando una base di vettori $|\gamma i>$ e gli elementi di matrice sono $Aij = < \gamma i\ |A\ \gamma j > = < \gamma i\ |A\ |\gamma j >$, ossia $A = \mathbf{\sum j < \gamma i\ |A\ \gamma j > < \gamma j}\ |$.

L'aggiunto di un operatore A è A^+ tale che $< \alpha\ |A\ \beta > = < A^+\ \alpha\ |\ \beta >$, ossia $(A^+)ij = (Aji)^*$ (matrice complessa coniugata della trasposta) e A è autoaggiunto o Hermitiano se $A^+ = A$.

Un operatore U è unitario se $U\ U^+ = U^+\ U$, ossia $U^+ = U^{-1}\ U$ ed ha la proprietà di conservare il prodotto interno tra vettori (quindi anche la norma).

L'algebra del momento angolare

- Oltre alla posizione e all'impulso, anche il momento angolare in meccanica quantistica viene costruito in analogia con la sua definizione classica, in base al principio di corrispondenza.

- E' possibile perciò dimostrare che devono valere le seguenti regole di commutazione:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\, L_k$$

$$[L^2, L_j] = 0$$

- Rispetto agli autovettori comuni a L^2 e ad una delle componenti di L , ad esempio Lz , è possibile dimostrare che gli autovalori di L^2 dipendono da un indice intero positivo o nullo l e gli autovalori di una delle componenti di L dipendono da un indice intero m che per un dato valore di l va da – l a + l a salti di 1, per cui indicando con |l,m> un autostato comune si ha:

  L^2 | l,m> = l (l+1) $\hbar^2$ |l,m> , con l intero positivo o nullo,
  ossia il vettore L è lungo √(l(l+1)) $\hbar$

  Lz | l,m> = m $\hbar$ |l,m> , con m tra – l e + l a salti di 1,
  ossia ci sono 2l+1 valori possibili della proiezione di sull'asse (ad esempio z) da l $\hbar$ a – l $\hbar$, quindi il vettore L non può giacere lungo z.

L'algebra del momento angolare

- Ricordiamo che nel caso di una particella carica dotata di momento angolare orbitale, come gli elettroni in moto attorno al nucleo di un atomo, o i protoni nel loro movimento nel nucleo dell'atomo, ad esso è associata, anche classicamente, una proprietà fisica detta momento magnetico orbitale

- Date le regole di quantizzazione, in un esperimento di Stern Gerlach un fascio di tali particelle verrebbe deviato in un numero dispari 2l+1 di direzioni

Le regole di composizione dei momenti angolari

- Dato un sistema di due (o più) particelle, si definisce una nuova osservabile fisica, il momento angolare totale J ancora in analogia con la definizione classica, come somma (vettoriale) dei momenti angolari delle singole particelle.

- Le regole di commutazione e le conclusioni circa i possibili valori del quadrato J^2 del momento angolare e delle sue componenti J_i restano immutate anche per un sistema di due (o più) particelle.

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, J_k$$

$$[J^2, J_j] = 0$$

- La meccanica quantistica stabilisce un vincolo sui possibili valori del momento angolare totale J dati i valori l1 e l2 dei singoli momenti angolari:

$J^2 \,|\, J,mj\rangle = J\,(J+1)\,\hbar^2\, |J,mj\rangle$, con J tra | l1-l2 | e l1+l2

$J_z \,|\, J,mj\rangle = m\,\hbar\, |J,mj\rangle$, con 2J+1 valori possibili di m tra – J e + J a salti di 1

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- Come abbiamo visto dall'esperimento di Stern Gerlach descritto per elettroni, protoni e neutroni, tali particelle sono dotate di un momento angolare intrinseco, detto spin, a cui è associato un momento magnetico intrinseco: **i valori possibili delle proiezioni dello spin su un asse di riferimento sono 2**

- Il momento magnetico intrinseco e lo spin non hanno analogo classico perché sono proprietà intrinseche che non si possono ricondurre al moto della particella

- Allo spin viene associato un operatore S che ha le stesse proprietà dei momenti angolari:

$[S_i , S_j] = i\hbar\, S_k$
$[S^2, S_j] = 0$

$S^2 \mid S, ms\rangle = S\,(S+1)\,\hbar^2 \mid S, ms\rangle$
$Sz \mid S, ms\rangle = ms\,\hbar \mid S, ms\rangle$ con ms da –S a +S a salti di 1

ms però deve avere solo 2 valori possibili da – S a + S a salti di 1: quindi S deve valere 1/2 e ms può valere -1/2 o +1/2.

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- Elettroni protoni e neutroni sono quindi particelle a spin 1/2, ossia a spin semintero

- Lo spin rappresenta un nuovo grado di libertà del sistema, non associato ai gradi di libertà spaziali, per cui lo spazio di Hilbert completo appropriato per la descrizione di tali particelle non è lo spazio a infinite dimensioni associato ai gradi di libertà spaziali, ma sarà il prodotto diretto di questo spazio per lo spazio di spin, che consente di avere solo due valori delle componenti dello spin lungo un'arbitraria direzione

- Dato un sistema di due o più particelle, si verifica sperimentalmente che per le particelle a spin semintero lo stato complessivo (come prodotto dello stato associato ai gradi di libertà spaziali e dello stato associato ai gradi di libertà di spin) deve essere antisimmetrico, e che nello stesso sistema fisico due particelle identiche a spin semintero non possono essere nello stesso stato (complessivo): lo stato di due particelle identiche a spin semintero deve differire almeno per il valore della componente dello spin lungo un'arbitraria direzione, ossia nello stesso sistema fisico non possono esistere più di due particelle identiche nello stesso stato associato ai gradi di libertà spaziali (struttura atomica)

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- Si verifica sperimentalmente che i fotoni sono particelle a spin 1, ossia intero
- In linea di principio i possibili valori di una delle componenti dello spin del fotone dovrebbero essere tre, -1, 0, 1
- Tuttavia, si dimostra in meccanica quantistica relativistica che lo stato a spin 0 per il fotone non è possibile, quindi, di fatto, ci sono solo due stati possibili per lo spin del fotone
- Lo spin del fotone è associato allo stato di polarizzazione dell'onda elettromagnetica corrispondente: si dimostra che al valore 1 della componente dello spin corrisponde lo stato di polarizzazione circolare sinistrorsa e al valore -1 lo stato di polarizzazione circolare destrorsa
- Gli stati di polarizzazione lineare lungo una direzione si ottengono come combinazione lineare (sovrapposizione) dei due stati di polarizzazione circolare
- Pertanto è possibile pensare ad un esperimento in cui vengono selezionati in successione mediante un polarizzatore stati diversi di polarizzazione lineare e riprodurre per i fotoni le situazioni descritte per gli elettroni a proposito delle implicazioni del principio di sovrapposizione

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- Dato un sistema di due o più particelle, si verifica sperimentalmente che per le particelle a spin intero lo stato complessivo (come prodotto dello stato associato ai gradi di libertà spaziali e dello stato associato ai gradi di libertà di spin) deve essere simmetrico, e che nello stesso sistema fisico due particelle identiche a spin intero possono essere nello stesso stato (complessivo)

Le regole di composizione applicate allo spin

- Le regole di composizione dei momenti angolari si estendono tali e quali anche alla composizione degli spin con i momenti angolari che hanno analogo classico e degli spin con gli spin

- Date due particelle identiche a spin semintero, lo stato complessivo deve essere antisimmetrico. Pertanto, gli autostati dello spin totale delle due particelle devono essere o simmetrici o antisimmetrici, e in corrispondenza lo stato associato ai gradi di libertà spaziali sarà rispettivamente antisimmetrico o simmetrico

- Gli autostati dello spin, per le regole di composizione dei momenti angolari, sono
  | J, mj > = |0, 0>
  | J, mj > = |1, 1>, | J, mj > = |1, 0>, | J, mj > = |1, -1>

- Lo stato J = 0 viene detto stato di singoletto.
  L'unico stato corrispondente | J, mj > = |0, 0> è antisimmetrico.
  Lo stato J = 1, | J, mj > = |1, 1>, | J, mj > = |1, 0>, | J, mj > = |1, -1> viene detto stato di tripletto.
  I tre autostati corrispondenti sono simmetrici.

Le regole di composizione applicate allo spin

- Date due particelle identiche (che chiameremo 1 e 2) a spin 1/2 e detto α lo stato di singola particella a spin su $|S, ms\rangle = |1/2, 1/2\rangle$, e β lo stato di singola particella a spin giù $|S, ms\rangle = |1/2, -1/2\rangle$, rispetto ad una qualunque direzione arbitraria, si ha:

$| J, mj \rangle = |0, 0\rangle = 1/\sqrt{2}\ (| \alpha 1\ \beta 2 \rangle - | \beta 1\ \alpha 2 \rangle)$

$| J, mj \rangle = |1, 1\rangle = | \alpha 1\ \alpha 2 \rangle$
$| J, mj \rangle = |1, 0\rangle = 1/\sqrt{2}\ (| \alpha 1\ \beta 2 \rangle + | \beta 1\ \alpha 2 \rangle)$
$| J, mj \rangle = |1, -1\rangle = | \beta 1\ \beta 2 \rangle$

- Si nota che i due stati $|1, 1\rangle$ e $|1, -1\rangle$ si possono scrivere come prodotto di due stati di singola particella, mentre i due stati $|0, 0\rangle$ e $|1, 0\rangle$ non si possono scrivere come prodotto di due stati di singola particella
- I primi due vengono detti stati fattorizzabili o fattorizzati, e secondi due stati non fattorizzabili o "entangled"

Sistemi composti: stati fattorizzabili e non fattorizzabili

- Un sistema composto è un sistema costituito da due (o più) costituenti elementari (sistemi semplici)

- Lo spazio di Hilbert per la descrizione di un sistema composto è il prodotto diretto degli spazi di Hilbert associati ai suoi costituenti elementari

- Dato un sistema di composto da due costituenti elementari, una base nello spazio di Hilbert prodotto si ottiene prendendo tutti i prodotti di due elementi, uno per ciascuna base di ciascuno spazio di Hilbert, corrispondenti a coppie ordinate di indici: nell'esempio dello spazio di spin di un sistema di due particelle una base possibile è data dai quattro stati: $| \alpha 1\ \alpha 2 >$, $| \alpha 1\ \beta 2 >$, $| \alpha 2\ \beta 1 >$, $| \alpha 2\ \beta 2 >$

- Tra gli stati del sistema composto vi sono stati dati dal prodotto degli stati di ciascun costituente, detti stati fattorizzati, ma l'insieme di tutti gli stati del sistema composto è molto più ricco perché contiene anche tutte le loro combinazioni lineari

Stati entangled e postulato di riduzione del pacchetto d'onde

- Per gli stati entangled si pone il problema della realtà oggettiva delle proprietà fisiche degli stati dei suoi costituenti elementari: preso lo stato di singoletto di due particelle di spin 1/2 , ad esempio, ho una probabilità 1/2 di trovare la particella 1 con lo spin su o con lo spin giù *rispetto ad una qualsiasi direzione*, e lo stesso vale per la particella 2: quindi non si può prevedere con certezza il risultato della misura dello spin per le singole particelle. I costituenti del sistema non possiedono in generale alcuna proprietà oggettiva. Nel caso del sistema di due particelle a spin 1/2 esse non possiedono alcuna proprietà di spin, non esiste alcuna osservabile di spin di cui si possa prevedere l'esito prima di eseguire una misura.

- Accanto alle variabili di spin esistono anche i gradi di libertà spaziali, e questi possono corrispondere ad avere i due costituenti in regioni spazialmente separate da una distanza arbitrariamente grande

Stati entangled e postulato di riduzione del pacchetto d'onde

- Il postulato di riduzione del pacchetto d'onde implica che si possa eseguire la misura dello spin di una delle due particelle (che può essere distante tanto quanto si vuole dall'altra, ad esempio le due particelle possono propagarsi in direzioni opposte) e che dopo la misura lo stato del sistema venga trasformato nella sua proiezione sull'autospazio associato all'autovalore trovato.

- Se immaginiamo di eseguire la misura della componente dello spin *in una qualsiasi direzione* di una delle due particelle a partire da uno stato di singoletto, dopo la misura il sistema si trova uno dei due stati fattorizzati:

  $|\, \alpha 1\ \beta 2 >$ o $|\, \beta 1\ \alpha 2 >$, ossia emerge *istantaneamente* una proprietà *oggettiva* dello spin anche per la seconda particella

- Questa è una forma di non località, come una specie di azione istantanea a distanza, per cui la misura che ha luogo in una precisa regione spaziale comporta l'emergere di una proprietà oggettiva per un sistema arbitrariamente lontano, al punto che

- Se le due particelle sono così lontane che *non esiste il tempo necessario ad un qualsiasi segnale fisico per propagarsi*, il processo di misura di una particella iinfluenza il processo di misura sull'altra senza che alcun segnale possa propagarsi dall'una all'altra: gli esiti delle due misure sono perfettamente correlati

Completezza e non-località: l'esperimento concettuale di EPR

- La situazione descritta incorpora, nella riformulazione di Bohm (due particelle di spin 1/2 che si propagano in direzioni opposte e che sono descritte da uno stato di singoletto di spin, 1951), gli elementi essenziali della acutissima analisi di Einstein Podolsky e Rosen (EPR, 1935) che rifiutando la non località della teoria conclusero che essa era incompleta

- Due sono le ipotesi di EPR:

  1) Realismo: "Se, anche senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile prevedere con certezza il valore di una grandezza fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica che corrisponde a questa quantità"

  2) Località Einsteiniana: "Gli elementi di realtà fisica di un sistema non possono essere influenzati istantaneamente a distanza"

- Nell'esperimento descritto, si deve concludere che: o la misura eseguita sulla particella 1 ha un effetto istantaneo sulla particella 2, e allora la teoria è non locale, oppure si deve ammettere che la particella 2 ha prima della misura definite proprietà di spin relative a qualsiasi direzione arbitraria (violando il principio di indeterminazione), ciò che però la teoria quantistica impedisce di affermare e non è in grado di descrivere, e in questo caso bisogna ritenere che la teoria sia incompleta, ossia il vettore di stato o la funzione d'onda non descrive in modo esauriente l'effettiva situazione fisica di un sistema

Completezza e non-località: l'esperimento concettuale di EPR

- L'argomento di incompletezza di EPR:

1) segna la fine dell'interpretazione a disturbo del principio di indeterminazione, ossia il punto di vista che l'indeterminazione sia dovuta alla finitezza del quanto d'azione e all'inevitabile e incontrollabile disturbo causato al sistema dal processo di misura (interpretazione di Bohr della complementarietà dei concetti fisici)

2) Pone in evidenza la radicale distinzione tra sistemi "elementari" e sistemi "entangled"

3) Suggerisce l'idea di tentare di elaborare un completamento deterministico della teoria (le teorie delle variabili nascoste)

4) Non è un paradosso ma mette in evidenza un aspetto cruciale della teoria quando vi siano correlazioni tra grandezze fisiche

5) La violazione della non-località einsteiniana NON comporta la possibilità di segnali superluminali , ossia NON contraddice la teoria della relatività. Infatti, due osservatori troverebbero una sequenza casuale di spin su e giù indipendentemente dal fatto che l'altro osservatore abbia o non abbia fatto la misura, quindi non si può usare la non località per inviare segnali ad un altro osservatore

La disuguaglianza di Bell e l'esperimento di Aspect

- Bell è convinto che il punto cruciale sia quello della non località della teoria quantistica e della natura fondamentalmente non locale dei processi naturali

- Conclude che risulta impossibile rendere conto delle correlazioni quantistiche in uno schema locale: 1) formula una definizione di località; 2) sotto l'ipotesi di località, dimostra la disuguaglianza di Bell; 3) la disuguaglianza di Bell è violata dalla teoria quantistica, in particolare nell'esperimento alla Bohm.

- Nel 1982 Alain Aspect progetta un esperimento che riproduce la situazione dell'esperimento di Bohm ma tratta con un sistema di due fotoni ed esegue misure di polarizzazione; tale esperimento verifica appieno le previsioni quantistiche, escludendo la possibilità di un completamento locale della teoria

- Significato: "è proprio vero che la particella B non ha alcuno stato definito di spin, non possiede alcuna proprietà oggettiva di spin, a meno che qualcuno, magari per mezzo di un processo di misura sulla sua partner A, non la osservi"

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- E' utile rappresentare gli elementi dello spazio di spin come vettori a due componenti e gli operatori di spin S_x, S_y, e S_z sulle tre direzioni ortogonali x, y, z, come matrici 2 x 2.

- Per praticità si usa introdurre due nuovi operatori chiamati σ_x, σ_y, e σ_z, che hanno gli stessi autostati, tali che
  $S_i = 1/2\, \hbar\, \sigma_i$

- Le matrici rappresentative di questi operatori sulla base dei due autovettori α (spin su) e β (spin giù) di σ_z sono le cosiddette matrici di Pauli

- Gli autostati di S_x e di S_y rispetto agli autostati di S_z si esprimono come:
  $| \alpha >_x = = 1/\sqrt{2}\ (| \alpha > + | \beta >)$; $| \beta >_x = = 1/\sqrt{2}\ (| \alpha > - | \beta >)$
  $| \alpha >_y = = 1/2\ ((1 - i) | \alpha > + (1 + i) | \beta >)$; $| \beta >_y\ 1/2\ ((1 - i) | \alpha > - (1 + i) | \beta >)$

- Gli autostati di S_x, S_y, e S_z si possono rappresentare graficamente in uno spazio tridimensionale come tre direzioni in cui la direzione dell'autostato di S_x forma con la direzione dell'autostato di S_z un angolo di 45° e la direzione dell'autostato di S_y ????sta sul piano perpendicolare al piano di S_x e S_z passante per S_z e forma con la direzione dell'autostato di S_z un angolo di 45°

Osservabili che non hanno analogo classico: lo spin

- Più in generale si dimostra che uno stato di spin misurato lungo una qualunque direzione si può esprimere rispetto agli autostati di S_z in funzione degli angoli θ e ϕ (coordinate polari) che tale direzione forma rispetto all'asse z e al piano xz:

  $| S>_{\theta,\phi} = \cos(\theta/2)\, e^{-i\phi/2} \,|\, \alpha > + \operatorname{sen}(\theta/2)\, e^{i\phi/2} \,|\, \beta >$

  e che tale stato di spin si può rappresentare graficamente in uno spazio tridimensionale come una direzione che forma con la direzione dell'autostato di S_z un angolo $\theta/2$ e ?????con il piano degli autostati di S_x e S_z un angolo $\phi/2$.

- Ne segue viceversa che la proiezione dell'autostato α (β) di S_z sulla direzione di $S\theta$ è cos $\theta/2$ (sen $\theta/2$) e la sua proiezione sulla direzione di - $S\theta$ è sen $\theta/2$ (cos $\theta/2$)

La disuguaglianza di Bell

- In un esperimento alla Bohm indichiamo con:

  A la regione in cui misuro le componenti di spin di una particella e B la regione in cui misuro le componenti di spin dell'altra particella

  a e b le direzioni in cui misuro le componenti di spin delle particelle

  α e β i due possibili risultati della misura

  λ i parametri fisici che definiscono il sistema delle due particelle

- Chiamiamo: $P_\lambda^{AB}(a, b; \alpha, \beta)$ la probabilità di ottenere gli esiti α e β in un esperimento in cui ad entrambi gli estremi A e B misuro le componenti dello spin delle due particelle, nelle direzioni indicate, nel caso in cui il sistema sia caratterizzato dai parametri λ

- Chiamiamo $P_\lambda^{AB}(a, *; \alpha)$ la probabilità di ottenere α quando effettuo la misura in A e non in B e simmetricamente $P_\lambda^{AB}(*, b; \beta)$ la probabilità di ottenere β quando effettuo la misura in B e non in A

- La definizione di località che dà Bell è la seguente:

  $P_\lambda^{AB}(a, b; \alpha, \beta) = P_\lambda^{AB}(a, *; \alpha) \times P_\lambda^{AB}(*, b; \beta)$

La disuguaglianza di Bell

- Chiamiamo $E_\lambda(a, b)$ la somma delle probabilità di ottenere esiti concordi meno la somma delle probabilità di ottenere esiti discordi, e prendiamo 4 direzioni a e c in A, b e d in B, allora data l'ipotesi di località si dimostra che:

$$|E_\lambda(a, b) - E_\lambda(a, d)| + |E_\lambda(c, b) - E_\lambda(c, d)| \leq 2$$

- Secondo la teoria quantistica, per due particelle nello stato di singoletto e per due direzioni a e b che formino tra loro un angolo θ, si ha:

  $P_\lambda^{AB}(a, b; +1/2, +1/2) = P_\lambda^{AB}(a, b; -1/2, -1/2) = 1/2 \text{ sen}^2(\theta/2)$

  $P_\lambda^{AB}(a, b; +1/2, -1/2) = P_\lambda^{AB}(a, b; -1/2, +1/2) = 1/2 \cos^2(\theta/2)$

- $E(a, b) = \text{sen}^2(\theta/2) - \cos^2(\theta/2) = \cos\theta$

- Fissata la direzione a, e scelte le direzioni b, c, e d in modo che formino con a rispettivamente un angolo di 45° , 90° e 135° (ossia $1/4\ \pi$, $1/2\ \pi$ e $3/4\ \pi$) si ha

  $|E_\lambda(a, b) - E_\lambda(a, d)| + |E_\lambda(c, b) - E_\lambda(c, d)| =$

  $= |\cos\pi/4 - \cos 3\pi/4| + |\cos\pi/4 - \cos\pi/4| = 2\sqrt{2} > 2$

L'esperimento di Aspect

- Si misura la polarizzazione di due fotoni

- I polarizzatori a e c in A e b e d B sono così lontani (13 m) e la scelta fra i due polarizzatori in A e i due in B viene decisa in un tempo così piccolo (da due interruttori ogni 10 ns) che neppure un segnale che si propaghi alla velocità della luce può partendo da A raggiungere B prima che la misura in B venga eseguita (40 ns)

- Si verifica la previsione della teoria quantistica:

$$P^{AB}(a, b; +1/2, +1/2) = P_\lambda^{AB}(a, b; -1/2, -1/2) = 1/2\ \mathrm{sen}^2\,\theta$$
$$P^{AB}(a, b; +1/2, -1/2) = P_\lambda^{AB}(a, b; -1/2, +1/2) = 1/2 \cos^2\theta$$