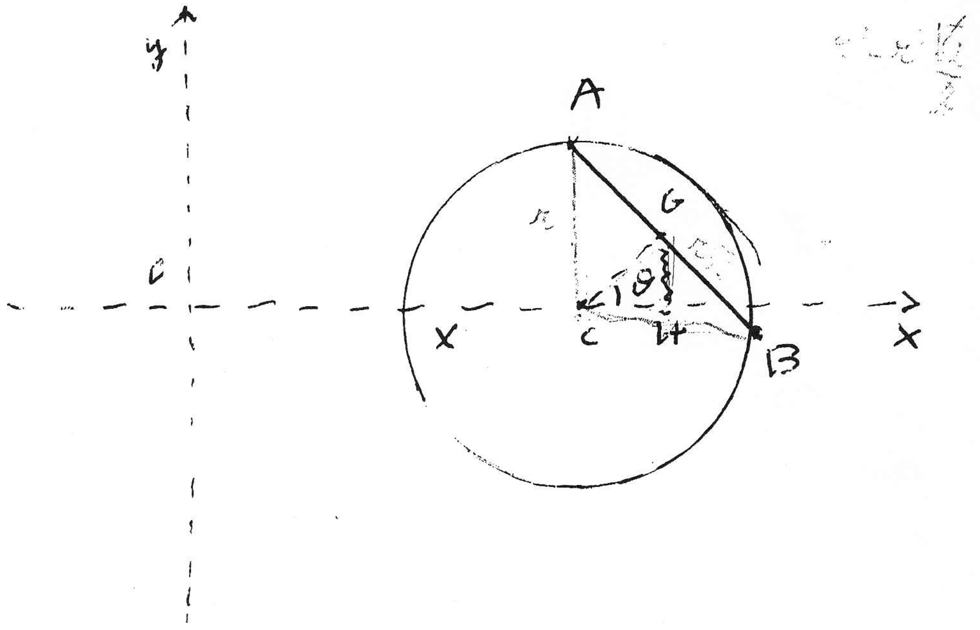
MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA.
COMPITO DI ESONERO DEL 27.10.02

In un piano orizzontale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano e' posto un solido circolare di massa M e raggio R, con centro C sull'asse delle x e che puo' traslare (senza ruotare) senza attrito, tenendo C su tale asse. Sul piano e' posta anche una asta omogenea AB di massa m e lunghezza L= $R\sqrt{2}$. Gli estremi A e B possono scorrere senza attrito lungo una guida solidale con il bordo del solido circolare. Tale asta e' soggetta alla unica forza attiva presente nel sistema $\underline{F} = -k\underline{HG}$, $k > 0$, ove G e' il baricentro dell'asta e H e' la proiezione di G sull'asse delle x.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che CG forma con ll'asse x .

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.
2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne la stabilita'.
3) Scrivere due integrali primi del moto e discuterne il significato fisico.



$\hat{ACB} = \frac{\pi}{2}$

COMPITO A

MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA.

COMPITO DI ESONERO DEL 22.11.05

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. Sia D il punto dell'asta che si trova a distanza d dal punto A, ove L=4d. Il punto D dell'asta e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z, ed e' soggetto ad una forza elastica, che lo attrae verso l'origine : $\underline{F_1} = -kOD, k > 0$. L'estremo B e' soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'asse delle x :$\underline{F_2} = -k\overline{HB}, k > 0$, ove H e' la proiezione del punto B sull'asse delle x.(vedi figura).

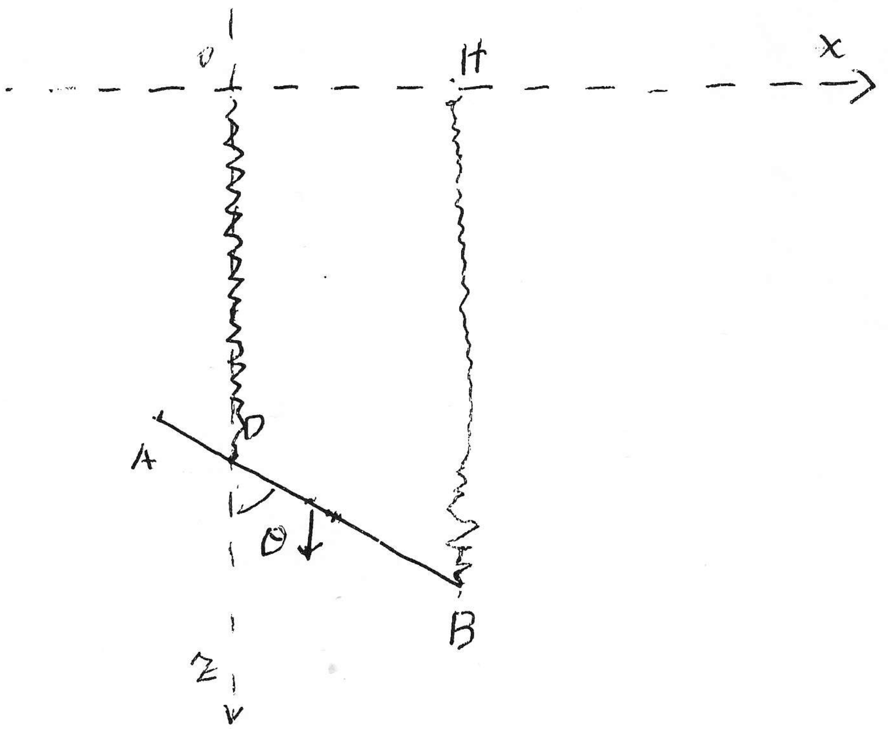
Si assumano come variabili lagrangiane la quota z di D e l'angolo θ che DB forma con l'asse z.

1) Scrivere la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto)

2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne il numero al variare di k.

3) Posto in questa domanda M=1,d=1,k=2, g=9 (ove g indica l'accelerazione di gravita'), studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio e ,scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. $I_G = \frac{ML^2}{12}$ (G= baricentro) . Ricordiamo che la forza peso e' presente.



Meccanica Analitica e Relativistica. Compito esonero del 6.12.05

I

Data la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$:

$$Q = p^{\alpha}(2q)^{-1/2} - 1 \quad ; \quad P = -(2p)^{1/2}q^{\beta}$$

trovare i valori dei parametri reali α e β per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q,Q)$.

II

Indichiamo un evento nello spazio-tempo con $E = (ct, x, y, z)$ e scegliamo delle unita' di misura in cui la velocita' della luce $c = 1$.

i) Dati i due eventi:

$$E_1 = (1,3,0,0) \quad ; \quad E_2 = (6,\alpha,0,0)$$

trovare il valore del numero reale α per i quali esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei. Quando la risposta sia positiva, trovare la velocita' di tale sistema di riferimento.

ii) Dati i due eventi:

$$E_1 = (0,3,2,0) \quad ; \quad E_2 = (3,-1,\beta,1)$$

trovare i valori del numero reale β per il quale esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo.

III

Due astronauti partono dall'origine al tempo 0 e si muovono l'uno sull'asse delle x con velocita' $\frac{c}{4}$ (c velocita' della luce), il secondo sullo stesso asse con velocita' $\frac{-c}{3}$. Al tempo $4T$ il primo inverte il moto e viaggiando con velocita' $\frac{-c}{4}$ arriva nell'origine e li' si ferma. Il secondo astronauta continua a viaggiare fino al tempo $12T$, poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $\frac{-2c}{3}$. Arrivato nell'origine vi si ferma. A questo punto, cioe' nell'origine, i due astronuati confrontano i rispettivi orologi (portati sulle loro astronavi): chi dei due risulta piu' giovane e di quanto?

IV

Quattro particelle relativistiche di massa uguale m si muovono lungo l'asse x con velocita' rispettivamente $\frac{c}{2}, \frac{c}{4}, \frac{-c}{2}$ e $\frac{-c}{4}$. Esse urtano contemporaneamente fra loro e formano dopo l'urto una unica particella di massa M. Supposta nota m, trovare M.

V

Una particella relativistica di massa m e carica q inizialmente si trova nell'origine con velocita' $v_o > 0$ e si muove lungo l'asse x soggetta ad un campo elettrico E variabile nel tempo diretto come l'asse x:

$$E(t) = E_o(2+t)^{\beta} \quad ; \quad \beta < 0$$

Trovare la velocita' v in funzione del tempo ed in particolare dire per quali valori di β, $v(t) \to c$ quando $t \to \infty$.

VI

(Si consiglia di affrontarlo dopo aver svolto bene gli altri cinque). Una particella relativistica di massa m si muove lungo l'asse x soggetta ad una forza $F = -kx$, $k >= 0$. Date le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_o$, trovare il massimo valore di x raggiunto durante il moto.

MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA.
COMPITO DI ESAME DEL 13.12.05

I

In un piano orizzontale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano e' posta una asta omogenea AB di massa M e lunghezza L. Il punto D di tale asta che dista $\frac{L}{3}$ da A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo l'asse x. L'asta e' soggetta alle forze attive $\underline{F} = -kH_aA$, $(k > 0)$ e $\underline{F} = -kH_bB$, $(k > 0)$, ove H_a e' la poiezione ortogonale del punto A sull'asse y e H_b e' la proiezione ortogonale del punto B su un asse parallelo all'asse delle y e distante da questo una quantita' $d, d > 0$. (Vedi Figura 1)

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di D e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare di d.

3) Ponendo in questa domanda $M = 1$, $L = 1$, $k = 1$, $d = \frac{1}{2}$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

(N.B. Osservare che non c'e' forza peso. Si ricorda che il momento d'inerzia I_G di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale all'asta stessa e passante per il baricentro e' $I_G = \frac{ML^2}{12}$).

II

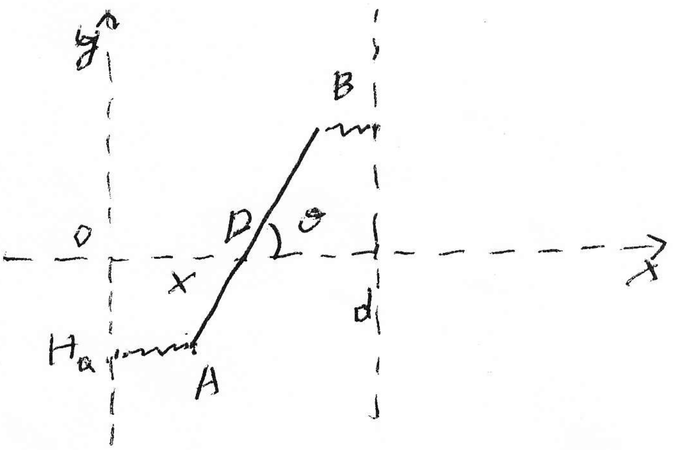
Data la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$:

$$Q = \frac{1}{2}p\, q^{\alpha} \quad ; \quad P = -(q^2+1)$$

trovare i valori del parametro reale α per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q,Q)$.

III

Una particella relativistica di massa propria m e velocita' $\frac{c}{4}$ ($c =$ velocita' della luce) si muove lungo l'asse delle x ed urta con una altra particella di massa propria $2m$ che si muove anch'essa lungo l'asse delle x ma con velocita' $\frac{-c}{4}$. Nell'urto esse formano una unica particella di massa propria M che si muove con velocita' V lungo l'asse delle x. Trovare M, V noto m.



MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA.
COMPITO DI ESAME DEL 19.9.06

I

In un piano orizzontale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano e' posto un anello circolare di massa m e raggio R. Siano C e D due punti opposti di tale anello (cioe' lunghezza $CD = 2R$) vincolati a scorrere senza attrito lungo una guida solidale all'asse delle x. Nel piano in questione e' posta anche una asta omogenea AB di massa M e lunghezza L. Il punto A e' obbligato a scorrere senza attrito lunga l'asse x. L'altra estremita' B e' obbligata a scorrere senza attrito lungo l'anello. L'asta e' soggetta alla forze attiva $\underline{F}_1 = -kOA$, $(k > 0)$, e l'anello alla forza attiva $\underline{F}_2 = -kP_aD$, $(k > 0)$, ove P_a indichiamo un punto fisso dell'asse delle x posto a distanza $a > 0$ dall'origine e $x_C < x_D$. Poniamo $R = L$. (Vedi Figura 1)

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

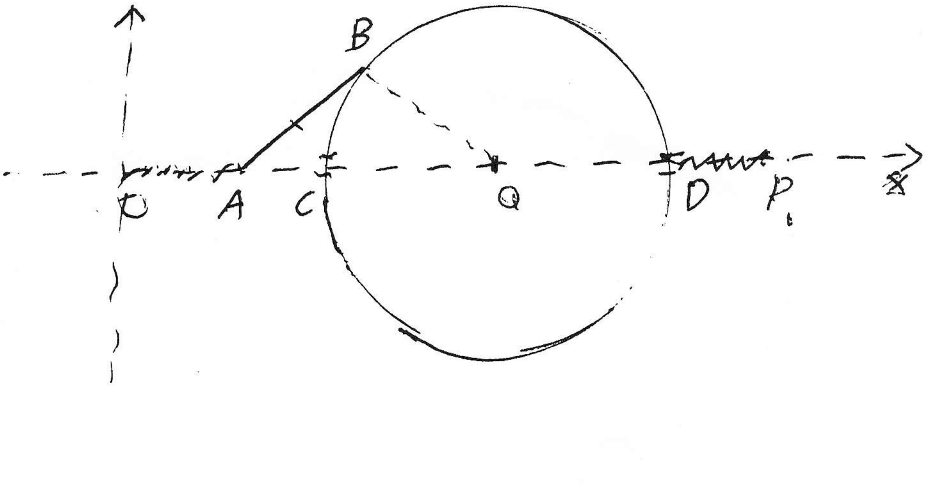
2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare di a.

3) Ponendo in questa domanda $M = m = 1$, $L = R = 1$, $k = 1$, $a = 2$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

(N.B. Osservare che non c'e' forza peso. Si ricorda che il momento d'inerzia I_G di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale all'asta stessa e passante per il baricentro e' $I_G = \frac{ML^2}{12}$).

II

Due particelle relativistiche di massa propria M si muovono lunga l'asse delle x. Esse hanno velocita' V e $-V$ rispettivamente. Si urtano e dalla reazione nucleare escono tre particelle di massa propria m , che si muovono lungo l'asse delle x e che hanno velocita' nulla la prima e v_2 e v_3 le altre due. Calcolare tali due velocita' supponendo note M, m, V.



COMPITO B

MECCANICA ANALITICA E RELATIVISTICA.
COMPITO DI ESONERO DEL 24.10.06

In un piano orizzontale si muove un rettangolo A, B, C, D ove il lato A, B e' composto da una asta omogenea di massa M e lunghezza L, mentre le altre parti hanno una massa trascurabile. I punti A e B sono vincolati a scorrere senza attrito lungo una guida circolare fissa di raggio $R = L$ e centro O. Il lato minore del rettangolo e' scelto di lunghezza $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ in modo tale che in punto O risulta sulla congiungente dei punti C e D. Un punto materiale P di massa m si muove senza attrito lungo una guida r di massa trascurabile solidale al lato del rettangolo C, D ed e' sottoposto alla forza attiva $\underline{F} = -kBP$, $k > 0$.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di P lungo la guida r e l'angolo θ che OH forma con un asse fisso, ove H e' il punto di mezzo del segmento AB (vedi figura).

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne la stabilita'.

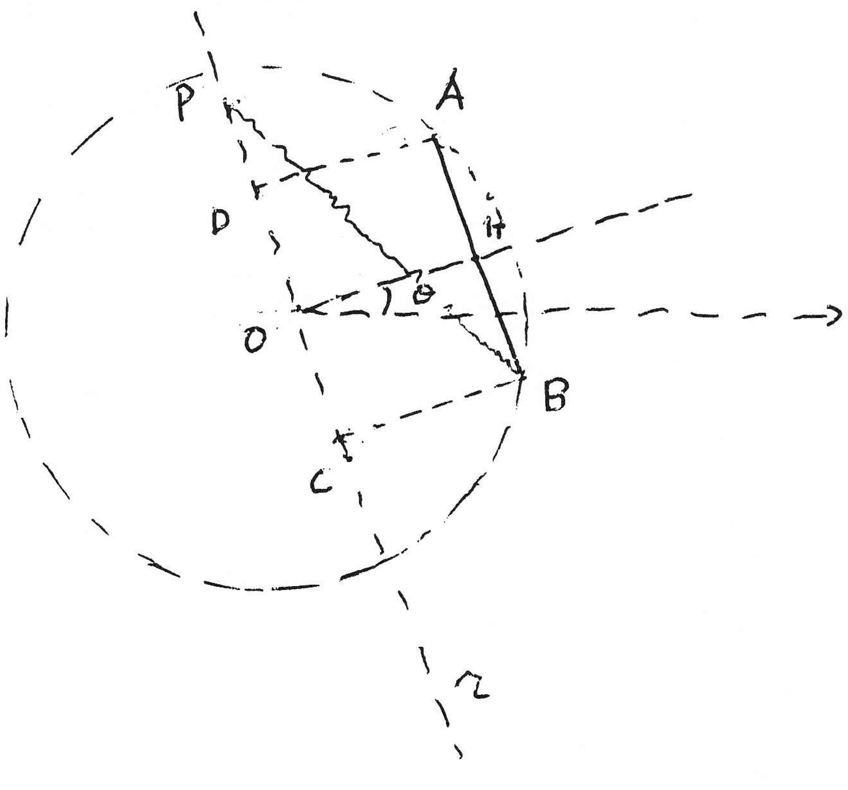
3) Scrivere due integrali primi del moto e discuterne il significato fisico, studiando le forze in gioco.

4) Facoltativa.

Trovare se esistono condizioni iniziali per cui il moto si svolge tenendo $\dot{\theta}(t) =$ *costante* e se si', discuterne il numero.

Si ricorda che il momento d'inerzia di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale al piano e passante per il baricentro e' $I_G = \frac{1}{12}ML^2$. Osservare inoltre che nel problema l'eventuale forza peso e' inessenziale.

$\overline{OP} = \xi$



Compito B

Corso di Meccanica Analitica e Relativistica
Compito di esonero del 21 Novembre 2006

Problema 1. In un piano verticale una guida rettilinea ideale è collocata in modo da formare un angolo $\phi = \pi/3$ con la verticale discendente. Un disco rigido di massa m e raggio R è libero di traslare lungo la guida, con il centro C giacente sulla guida stessa. Il disco subisce l'effetto di una forza elastica diretta verso l'origine O degli assi cartesiani, con costante elastica k, applicata al centro. Un punto materiale P di massa m è libero di muoversi senza attriti lungo il bordo del disco, sotto l'azione di una forza elastica di costante k diretta verso il punto P', proiezione del punto P sull'asse orizzontale.

Si scelgano come coordinate lagrangiane l'ordinata z del punto C e l'angolo ϑ che il segmento OP forma con la verticale discendente.

(i) Scrivere la funzione di Lagrange.

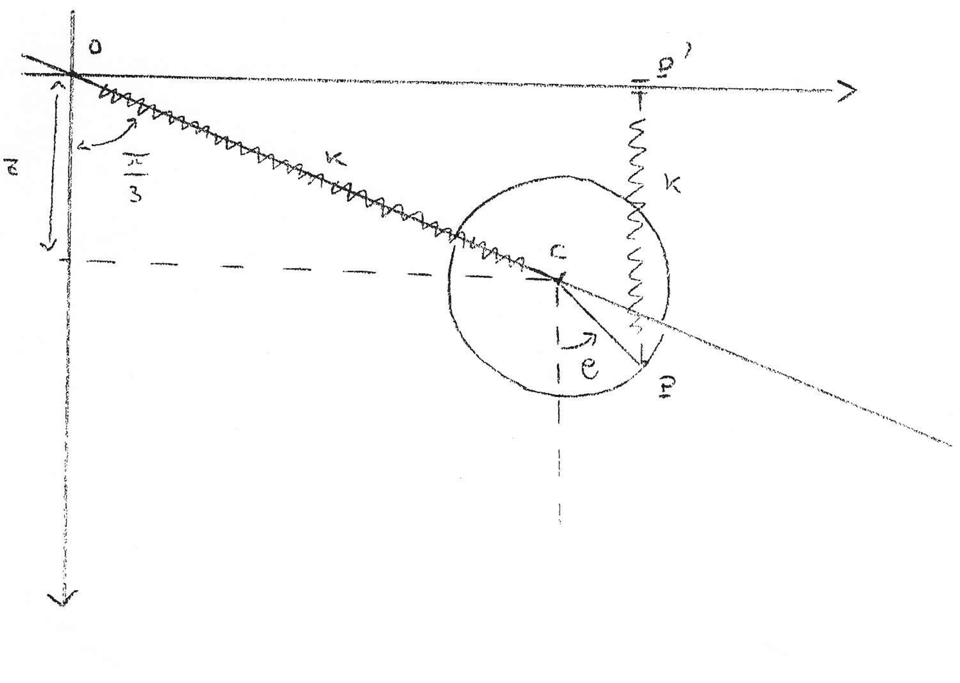
(ii) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kR}$.

(iii) Si consideri il caso in cui i parametri assumono, in un opportuno sistema di unità di misura, i valori $k = 1$, $R = 1$, $m = 1$, $g = 3$. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Problema 2. Nello spazio delle fasi $\Gamma = \mathbb{R}^2$ si consideri la trasformazione di coordinate $(q, p) \mapsto (Q, P)$ data da

$$\begin{cases} P = \alpha\, p\, q^{2\beta} \\ Q = q^{\beta} \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la trasformazione è canonica.
Facoltativo: determinare la funzione generatrice corrispondente.



Meccanica Analitica e Relativistica.
12.12.06

I

In un piano orizzontale introduciamo un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una asta omogenea di estremi A, B,di massa M e lunghezza L. Sia D un punto dell'asta che dista $L/3$ da A. Tale punto D e' vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida solidale all'asse delle y. L'estremo B e' soggetto ad una forza elastica $\underline{F}_1 = -kHB, k > 0$, ove H e' la proiezione ortogonale del punto B su una retta parallela all'asse delle y e che interseca l'asse delle x in un punto di ascissa $d > 0$. Infine il punto D e' soggetto ad una forza $\underline{F}_2 = -kOD, k > 0$.

Scelte come variabili lagrangiane l'ordinata y del punto D e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse delle x, (vedi figura), si risponda alle seguenti domande:

7 1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

7 2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di $d, (d > 0)$.

4.5 3) posto il questa domanda $M = 1, L = 1, k = 1, d = 1/2$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze nodali delle piccole oscillazioni.

(Nota Bene: la forza peso e' inessenziale. Si ricorda che il momento d'inerzia I_o di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale passante per il baricentro vale $I_o = ML^2/12$)

II

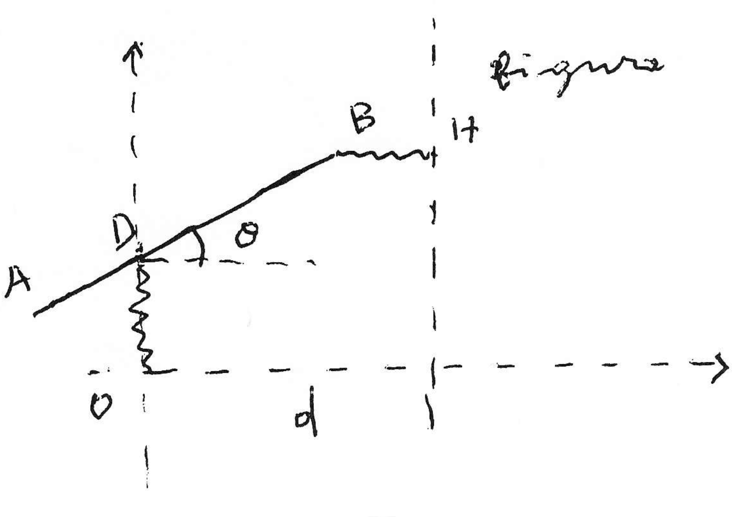
7 Una particella relativistica di massa propria m e carica q e' soggetta ad un campo elettrico $\underline{E}$ diretto lungo l'asse x e di intensita' positiva costante sia nello spazio che nel tempo. La particella inizialmente si trova nell'origine con velocita' nulla e vuole raggiungere il punto di ascissa positiva x^* al tempo $t = \alpha$.

Trovare i valori di α perche' cio' avvenga per un opportuno E e trovare tale campo.

III

4.5 Due particelle relativistiche di massa propria m si muovono lunga l'asse delle x. Esse hanno velocita' v e $-v$ rispettivamente. Si urtano e dalla reazione nucleare esce una unica particella di massa propria M e velocita' V.

Trovare il valore di M e V supponendo note m ed v.



Meccanica Analitica e Relativistica.
Compito di esonero del 22.1.07
COMPITO B

Risolvere i seguenti 5 esercizi.

I

Data la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$:

$$Q = (\frac{p}{2q})^{1/3} \quad ; \quad P = -3(\frac{p}{2})^{2/3}\, q^{\beta}$$

trovare il valore del parametro reale β per cui essa e' canonica. Inoltre in questo caso trovare la funzione generatrice $F(q,Q)$.

II

Indichiamo un evento nello spazio-tempo con $E = (ct, x, y, z)$ e scegliamo delle unita' di misura in cui la velocita' della luce $c = 1$.

i) Dati i due eventi:

$$E_1 = (\beta, 3, 0, 0) \quad ; \quad E_2 = (5, 2, 0, 0)$$

trovare i valori del numero reale β per i quali esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei. Qualora la risposta sia positiva, trovare la velocita' di tale sistema di riferimento.

ii) Dati i due eventi:

$$E_1 = (1, 3, 2, 0) \quad ; \quad E_2 = (6, \beta, 1, 2)$$

trovare i valori del numero reale β per il quale i due eventi possono venir collegati solamente tramite un raggio di luce rettilineo.

III

Vi sono due gemelli inizialmente fermi. Il primo si muove sotto l'azione di una forza costante F, mentre il secondo rimane sempre fermo. Dopo un tempo T, tempo misurato con un orologio solidale al gemello fermo, anche il primo si arresta bruscamente e rimane in quiete. Confrontano le loro eta': dire, usando la relativita' ristretta, chi risulta piu' giovane e di quanto, sapendo che il gemello in moto ha massa propria m. Inoltre, indicato con ΔT la differenza fra le due eta', a che valore tende il rapporto $\frac{\Delta T}{T}$ quando $T \to \infty$?

N.B. Si ricorda che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log[2\sqrt{1+x^2} + 2x]$$

IV

Due particelle relativistiche di massa propria uguale m si muovono lungo l'asse x con velocita' rispettivamente $\frac{c}{3}, \frac{-c}{3}$. Esse urtano contemporaneamente con una particella di massa $2m$ ferma nell'origine. Dopo l'urto risultano due particelle di massa propria M ciascuna e velocita' V_1 e V_2 rispettivamente. Trovare tali velocita'.

V

Consederato un sistema cartesiano (O, x, y), una particella relativistica di massa propria m inizialmente si trova nel punto $(x_o, 0)$ con velocita' $(0, v_o)$ e si muove nel piano sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V = -k\rho^{-1}, k > 0$ ove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Trovare il valore di v_o per cui essa compie un moto circolare e trovare il periodo di tale moto. Risolvere lo stesso problema in meccanica classica e dire per quali valori di x_o (o in quale limite) le due soluzioni coincidono .

Meccanica Analitica e Relativistica.
18.9.07

I

In un piano verticale e' posto un semidisco omogeneo pesante di massa M. Tale semidisco e' ottenuto da un disco di centro O e raggio R tagliandolo lungo un diametro AB. Il punto O e' fisso ed il semidisco puo' ruotare senza attrito attorno ad esso. Indichiamo inoltre con G il baricentro del semidisco. Solidalmente ad AB e' posta una guida liscia di massa trascurabile. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto pesante P di massa m, soggetto (oltre alla forza peso e la reazione vincolare) alla forza $\underline{F} = -kOP$, $k > 0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema, la quantita' $\xi = OP$ (lungo la guida) e l'angolo θ che OG forma con la verticale discendente (vedi figura).

Si risponda alle seguenti domande:

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita'.

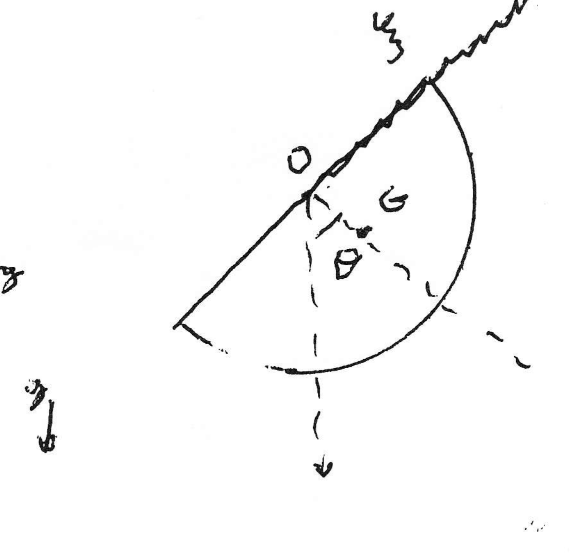
3) Posto in questa domanda $M = 1, m = 2, R = 1, k = 1, g = 1$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze nodali delle piccole oscillazioni.

(Nota Bene: rammentiamo che la forza peso e' presente. Si ricorda che il momento d'inerzia I_o rispetto ad un asse ortogonale al piano verticale e passante per O vale $I_o = MR^2/2$ e la distanza del punto G da O vale $|OG| = \frac{4R}{3\pi}$.)

II

Una particella relativistica di massa propria m_o si trova ferma nell'origine al tempo $t = 1$ ed e' soggetta ad una forza diretta come l'asse delle x: $F = F_o t^{-2}$ con F_o costante positiva. Dire a quale velocita' essa tende quando $t \to \infty$.

Fig



Meccanica Analitica e Relativistica.
Compito di esonero del 15.11.07
COMPITO B

In un piano orizzontale consideriamo un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una asta omogenea AB di lunghezza L e massa M. Il punto A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse delle x. L'asta e' soggetta a due forze attive $F_1 = -kOA, k > 0$ e $F_2 = -kBD, k > 0$, ove O e D sono due punti fissi, il primo coincidente con l'origine, l'altro di coordinate $(a, 0), a > 0$.

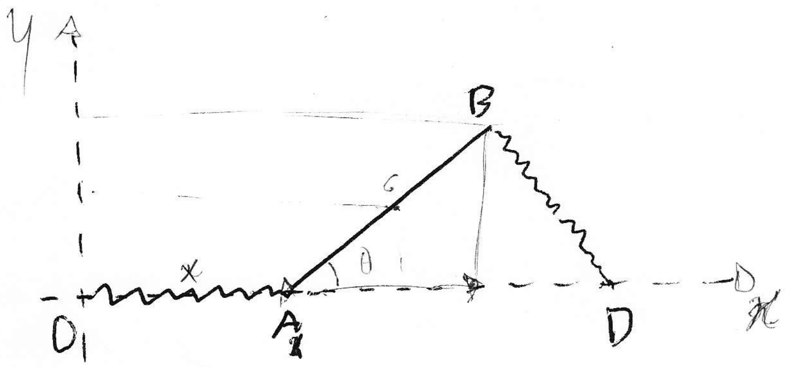
Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare di a.

3) Ponendo in questa domanda $k = 0$ scrivere due integrali primi del moto e dirne il significato fisico.

(N.B. Osservare che non c'e' forza peso. Si ricorda che il momento d'inerzia I_G di una asta omogenea rispetto ad un asse ortogonale all'asta stessa e passante per il baricentro e' $I_G = \frac{ML^2}{12}$).



Meccanica Analitica e Relativistica.
Compito di esonero del 13.12.07
COMPITO A

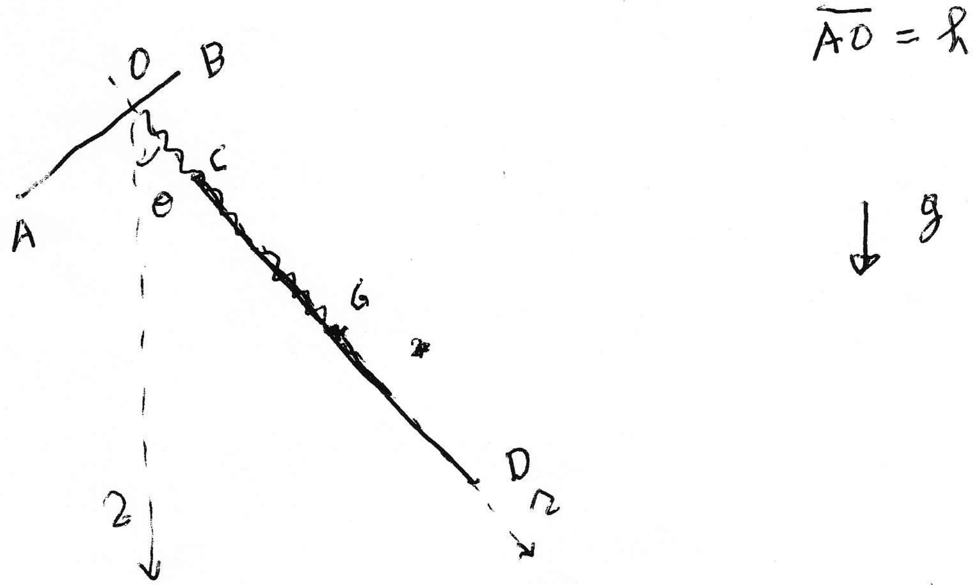
In un piano verticale si muove una asta omogenea pesante AB di lunghezza L e massa M. Il suo punto O, di distanza h dal punto A, e' obbligato a rimanere fisso. Per tale punto O passa una guida rettilinea r di massa trascurabile obbligata a rimanere ortogonale all'asta AB. Su tale guida scorre senza attrito un'altra asta omogenea pesante CD di lunghezza $2L$ e massa m. Tale asta e' soggetta ,oltre alla forza peso, alla forza attiva $F = -kOG, k > 0$ ove G e' il punto intermedio tra C e D.

Assumiamo come variabili lagrangiane l'ascissa ξ del punto G lungo la guida r e l'angolo θ che CD forma con l'asse verticale discendente z.

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni equilibrio e discuterne numero e stabilita' al variare di h, assumendo $\frac{L}{2} \leq h \leq L$.

3) Ponendo in questa domanda $M = 1, m = 1, k = 1, L = 1, h = \frac{3}{4}, g = 1$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.



Meccanica Analitica e Relativistica. 17.9.2008

1

In un piano orizzontale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, y. In tale piano si muove un'asta di estremi AB, omogenea e di massa M, con il punto G, mediano di tale asta, obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle y. L'estremo B dell'asta e' soggetto alla forza attiva $\underline{F} = -kDB, k > 0$ ove D e' il punto di coordinate $D = (a, a), a > 0$.

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ordinata y del punto G e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di a.

3) In questa domanda poniamo $L = 4, M = 1, a = 1, k = 1$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

2

Una particella relativistica di massa propria M, inizialmente ferma, decade in tre particelle, due identiche di massa propria m_o ed una di massa propria $4m_o$, che si muovono le due identiche lungo l'asse delle x ed l'altra lungo un asse ortogonale a quello delle x. Trovare le velocita di ognuna delle tre particelle.

Meccanica Analitica e Relativistica.
25.1.08

I

In un piano verticale π e' posto un sistema di assi cartesiani (O, x, z) con asse z lungo la verticale discendente. In tale piano π si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L, nella quale l'estremo A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x e l'altro estremo B e' soggetto alla forza $\underline{F} = -kDB$, $k > 0$, ove il punto fisso D ha coordinate $(0.d)$, $-\infty < d < \infty$.

Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema, l'ascissa' x di A e l'angolo θ che AB forma con la verticale discendente.

Si risponda alle seguenti domande:

1) Scrivere la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita'.

3) Posto in questa domanda $M = 1, L = 1, k = 1, g = 1, d = -1$, scegliere una posizione di equilibrio stabile e trovare le frequenze nodali delle piccole oscillazioni.

II

Una particella relativistica di massa propria m_o si trova inizialmente ferma nell'origine e si muove sotto l'azione di una forza costante F forza diretta come l'asse delle x e positiva. Una seconda particelle di massa propria M_o , $M_o = 2m_o$, si trova inizialmente ferma nel punto dell'asse x di ascissa $L > 0$ e si muove sotto l'azione di una forza $-F$ diretta sempre come l'asse delle x, ma opposta alla precedente. Trovare il tempo T nel quale le due particelle si incontrano e dire in quale punto cio' avviene.

Nota bene. Ricordo che $\int dx \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$.

Meccanica Analitica e Relativistica. Esonero del 28.11.2008

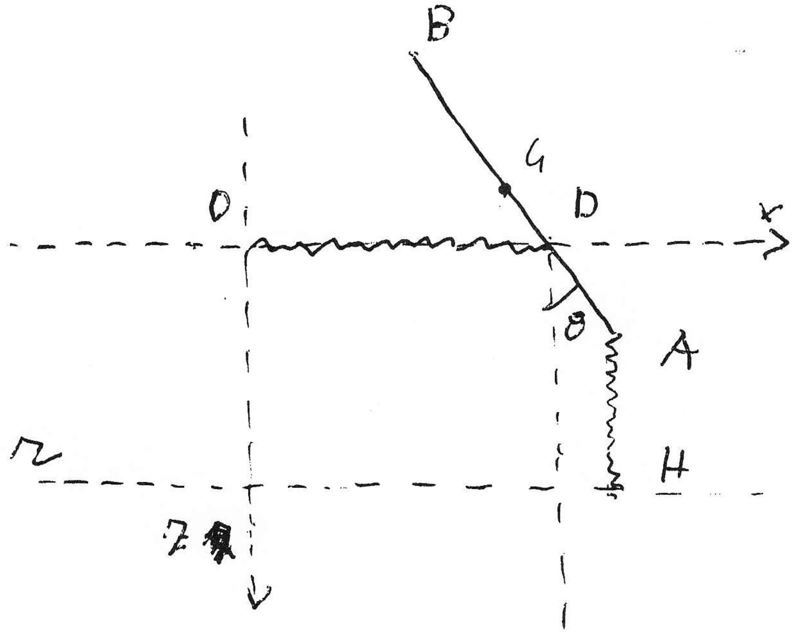
In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con x orizzontale e z verticale discendente. Chiamiamo r una retta parallela all'asse delle x e che interseca l'asse delle z in un punto in cui $z = d > 0$. In tale piano si muove un'asta pesante di estremi AB, omogenea, di lunghezza L e massa M. Il punto D di tale asta, con $AD = \frac{L}{4}$, e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle x. Oltre alla forza peso agiscono sull'asta due forze attive $\underline{F}_A$ ed $\underline{F}_D$: $\underline{F}_A = -kHA, k > 0$ ove H e' la proiezione ortogonale di A sulla retta r, e $\underline{F}_D = -kOD, k > 0$.

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ascissa x del punto D e l'angolo θ che DA forma con l'asse z.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di $d > \frac{L}{4}$.

3) In questa domanda poniamo $k = 0$. Scrivere due integrali primi del moto e discuterne l'eventuale significato fisico.



$\downarrow z$

$\overline{DA} = \frac{L}{4}$

Meccanica Analitica e Relativistica. Esonero del 30.1.2009

1

Sia dato un sistema descritto dalle due variabili lagrangiane ϕ e θ, ambedue angoli e quindi definite tra 0 e 2π. L'energia cinetica del sistema sia:

$$T = \frac{1}{2}(2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta}),$$

e l'energia potenziale:

$$U = -(\cos\phi + 5\cos\phi\cos\theta + 5\sin\phi\sin\theta).$$

Scegliere una posizione di equilibrio stabile e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno di essa.

2

Data la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$:

$$Q = (\frac{p}{2q})^{1/4} \quad , \quad P = -4q^2(\frac{p}{2q})^{\alpha} \ ,$$

trovare il valore di α per cui essa e' canonica. Per tale valore trovare la funzione generatrice F(q,Q).

3

Individuiamo un evento nello spazio-tempo come $E(ct, x, y, z)$ ove x, y, z sono le tre coordinate spaziali, t quella temporale e c la velocita' della luce. Scegliamo unita' di misura per cui c=1.

a) Dati i due eventi: $E_1 = (1, 2, 0, 1)$, $E_2 = (6, \alpha, \alpha, \alpha)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare i valori di α per i quali esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono contemporanei.

b) Dati i due eventi $E_1 = (1, 2, 2, 2)$, $E_2 = (6, 4, 4, 4)$, consideriamo un sistema di riferimento che si muove rispetto al primo di moto traslatorio uniforme con una velocita' $\underline{v}$ (non necessariamente diretta come l'asse delle x). Trovare la velocita' di tale sistema di riferimento necessaria affinche' i due eventi avvengono nello stesso posto. Inoltre in questo sistema di riferimento trovare l'intervallo temporale fra i due eventi.

4

Due astronauti al tempo $t = 0$ si trovano ambedue sull'asse x l'uno nel punto con ascissa $(-c)$ e l'altro con ascissa (c), ove c e' la velocita' della luce. Il primo si muove verso l'origine con velocita' $v = \frac{c}{2}$, arriva nell'origine e li' si ferma. Il secondo si muove con velocita' $v = -\frac{c}{3}$, arriva nell'origine e li' si ferma. Gli astronauti avevano portato a bordo due orologi, al tempo $t = 0$ sincronizzati. Li confrontano quando ambedue sono fermi nell'origine. Un orologio e' in ritardo rispetto all'altro, e se si' di quanto?

5

Una particella relativistica di massa propria m si muove lungo l'asse delle x sotto l'azione una forza F diretta come quest'asse: $F = A\sin(\omega t)$, ove A, ω sono due costanti positive. Al tempo $t = 0$ la velocita' della particella e' $v(0) = \frac{c}{2}$. Trovare la velocita' della particella a $t = 1$; inoltre trovare la velocita' massima che la particella raggiunge durante il suo moto.

6

Due particelle relativistiche di massa propria M ciascuna hanno velocita' la prima $V = \frac{c}{4}$ e la seconda $V = -\frac{c}{4}$. Si scontrano e dal loro urto escono due particelle, la prima di massa propria m , la seconda di massa propria $2m$. Trovare il valore di m per il quale la prima particella sia ferma.

Meccanica Analitica e Relativistica. 9.2.2009

1

In un piano orizzontale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, y. In tale piano si muove un'asta di estremi AB, omogenea e di massa M, con il punto A obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle y. L'estremo B dell'asta e' soggetto alla forza attiva $\underline{F} = -kDB, k > 0$ ove D e' il punto di coordinate $D = (a, 0), a > 0$.

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ordinata y del punto A e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

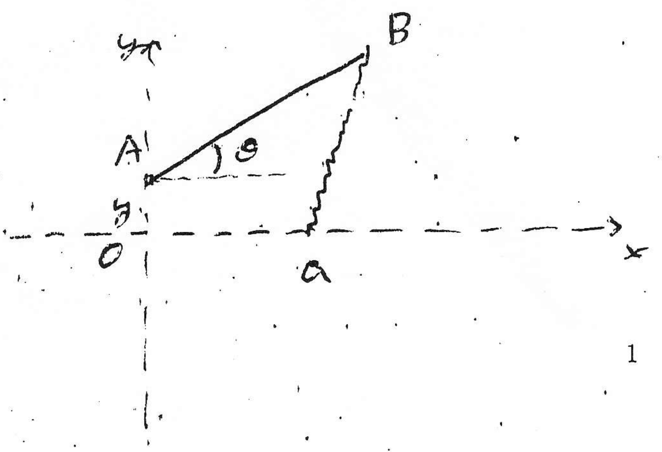
2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di a.

3) In questa domanda poniamo $L = 2, M = 1, a = 1, k = 1$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. Si osservi che il piano e' orizzontale e quindi la forza peso e' ininfluente sul moto.

2

Una particella relativistica di massa propria m, inizialmente ha una velocita' $v(0) = -\frac{c}{2}$ diretta come l'asse delle x ed e' soggetta ad una forza costante $F > 0$ diretta anche essa come l'asse delle x. Trovare dopo quanto tempo t_1 la particella si arresta e dopo quanto tempo t_2 $v(t_2) = \frac{c}{4}$.



Meccanica Analitica e Relativistica. 9.3.2009

1

In un piano verticale e' posto un sistema di assi cartesiani Oxz con asse x orizzontale ed asse z lungo la verticale discendente. In tale piano si muove un'asta omogenea pesante AB, di lunghezza L e massa m. L'estremo A dell'asta e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse z. L'asta e' soggetta, oltre che alla forza peso, a due altre forze attive F_A ed F_G: $F_A = -kOA, k > 0$, $F_G = -kHG, k > 0$, ove G e' il punto di mezzo fra A e B ed H e' la proiezione ortogonale di G sull'asse delle x.

Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema la quota z di A e l'angolo θ che l'asta AB forma con la verticale discendente.

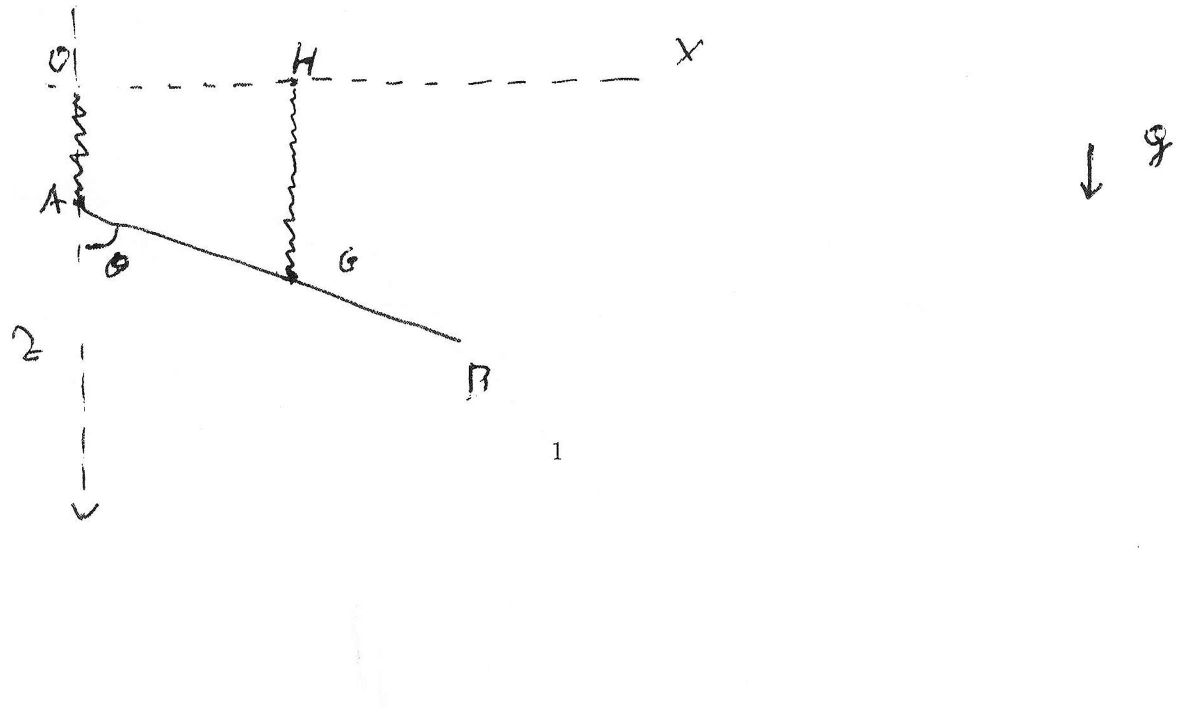
1) Scrivere la funzione di Lagrange del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne numero e stabilita' al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kL}$.

3) Posta in questa domanda $g = m = L = 1, k = 4$, trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

2

Tre particelle relativistiche, ciascuna di massa propria $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = m$ e velocita' $-\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}$ rispettivamente, si scontrano simultaneamente e danno origine ad una particella di massa propria M. Determinare M.



Meccanica Analitica e Relativistica. 9.7.2009

1

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con z lungo la verticale discendente. In tale piano si muove un'asta pesante di estremi AB, omogenea e di massa M e lunghezza L, con il punto A obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle x. Alla estremita' B e' incollata all'asta un punto materiale di massa $m = M$. Il sistema e' soggetto alla forza attiva del peso ed a due forze elastiche: $\underline{F}_1 = -kOA, k > 0$ e $\underline{F}_2 = -kHB, k > 0$ ove H e' la proiezione ortogonale di B sull'asse $O \rightarrow x$

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse z.

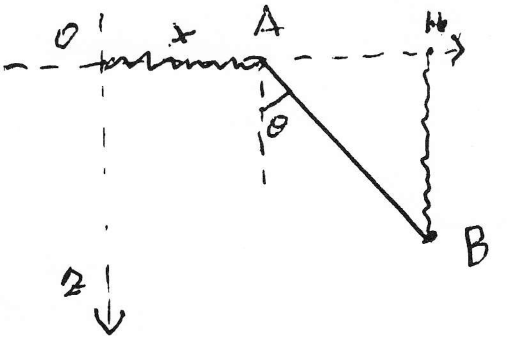
1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di $\lambda = \frac{Mg}{kL}$.

3) In questa domanda poniamo $L = 1, M = m = 1, g = 1, k = 5$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

2

Una particella relativistica di massa propria m, inizialmente ha una velocita' $v(0) = \frac{c}{4}$ diretta come l'asse delle x ed e' soggetta ad una forza $F = \frac{a}{(b+t)^2}$, ove a, b sono due costanti positive, diretta anche essa come l'asse delle x. Trovare il valore a cui tende la velocita' quando $t \to \infty$.



Meccanica Analitica e Relativistica. 17.9.2009

1

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con z lungo la verticale discendente. In tale piano si muove un corpo omogeneo pesante di massa M di forma quadrata A, B, C, D, di lato L ; in tale corpo i vertici A, C sono vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse delle z, i punti A, B hanno quota z maggiore di quella dei punti C, D (cioe' $z_A < z_C$) ed inoltre A e D sono gli estremi di una diagonale del quadrato (vedi figura). Nel piano π si muove anche un'asta di estremi DP, omogenea, pesante e di massa M e lunghezza L. Il sistema e' soggetto alla forza attiva del peso ed a due forze elastiche: $\underline{F}_1 = -10kOA, k > 0$ e $\underline{F}_2 = -kHP, k > 0$ ove H e' la proiezione ortogonale di P sull'asse x.

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema la quota z del punto A e l'angolo θ che l'asta DP forma con l'asse z.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di $\lambda = \frac{Mg}{kL}$.

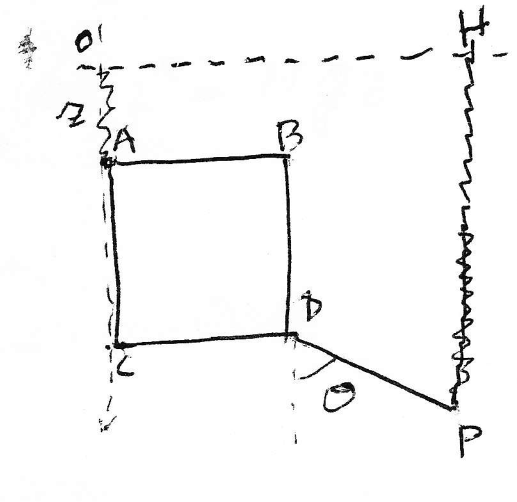
3) In questa domanda poniamo $L = 1, M = 1, k = 1, g = 1$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. Osservare che il coefficiente elastico della forza applicata in A e' 10 volte superiore a quello della forza applicata in P.

2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relativita' ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocita' $\frac{c}{4}$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $-\frac{c}{4}$ ed ivi si ferma. La seconda si muove con velocita' $\frac{c}{2}$ per un tempo T, poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $-\frac{c}{2}$ ed ivi si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?



Meccanica Analitica e Relativistica. Esonero del 18.11.2009

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con x orizzontale. In tale piano si muove di moto traslatorio un disco rigido di massa M, raggio R e centro C vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse delle x. Nello stesso piano si muove una asta rigida pesante AB di massa $m = M$ e lunghezza $L = 8R$. L'estremo A e' obbligato a scorrere senza attrito lungo la circonferenza esterna del disco, mentre il punto D dell'asta che dista R da A e' obbigato a scorrere senza attrito lungo l'asse delle x. Il sistema e' soggetto a tre forze attive: la forza peso e le due forze elastiche $\underline{F}_1 = -kOC$, $\underline{F}_2 = -kHA$, $k > 0$, ove con H indichiamo la proiezione ortogonale del punto A sull'asse delle x.

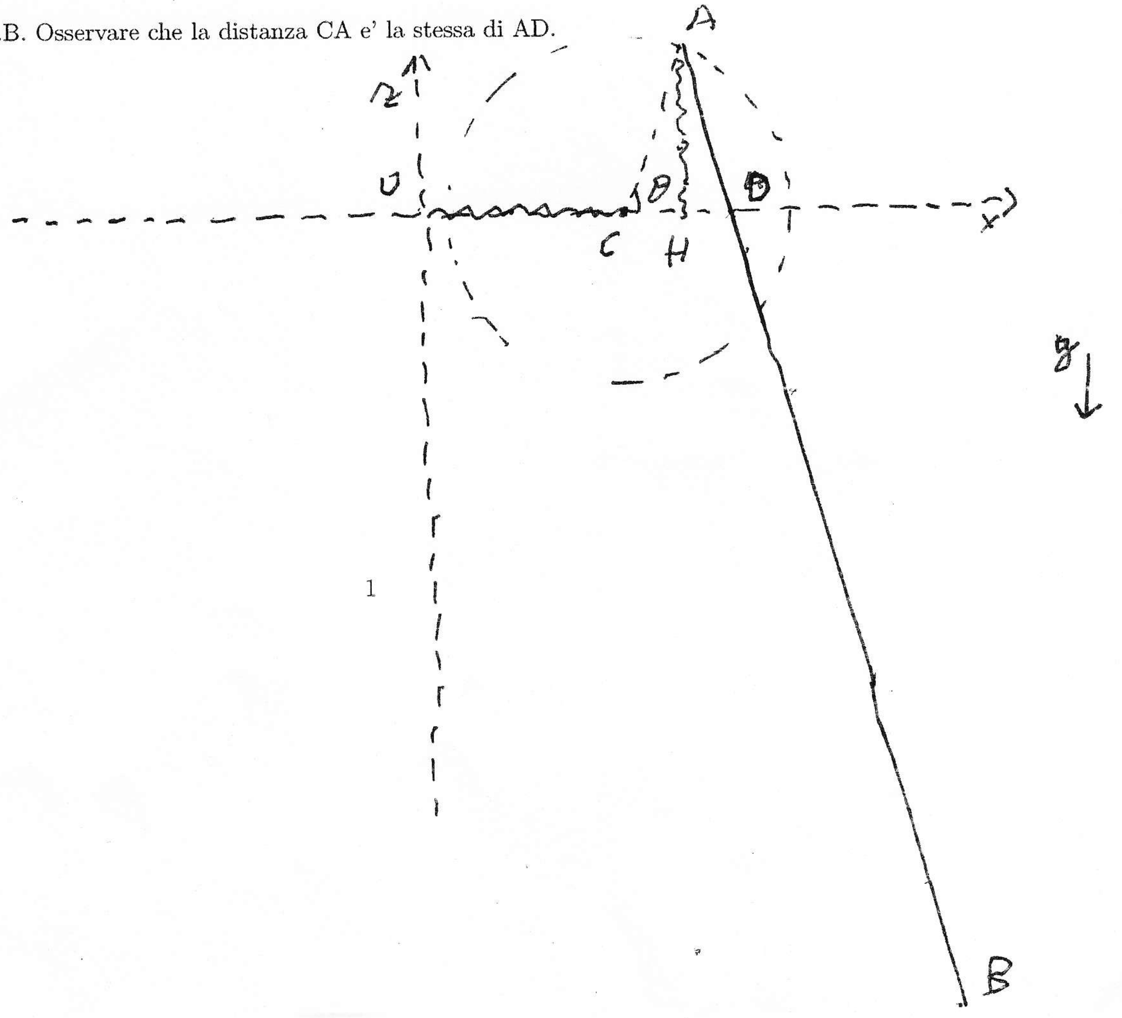
Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ascissa x del punto C e l'angolo θ che CA forma con l'asse delle x.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita'.

3) In questa domanda poniamo $k = 0$. Scrivere due integrali primi del moto e discuterne l'eventuale significato fisico.

N.B. Osservare che la distanza CA e' la stessa di AD.



Meccanica Analitica e Relativistica. Esonero del 22.1.2010

1

Sia dato un sistema descritto dalle due variabili lagrangiane x e y, ambedue variabili cartesiane definite tra $-\infty$ e ∞. L'energia cinetica del sistema sia:

$$T = \frac{1}{2}[(2+y^2)\dot{x}^2 + (3+x^2)\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}],$$

e l'energia potenziale:

$$U = e^{-x}(x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Scegliere una posizione di equilibrio stabile e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

2

Data la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$:

$$Q = (\frac{p}{3q^2})^\beta \quad , \quad P = -(3q^5p^2)^\beta \; ,$$

trovare il valore di β per cui essa e' canonica. Per tale valore trovare la funzione generatrice F(q,Q).

3

Individuiamo un evento nello spazio-tempo come $E(ct, x, y, z)$ ove x, y, z sono le tre coordinate spaziali, t quella temporale e c la velocita' della luce. Scegliamo unita' di misura nella quale c=1.

a) Dati i due eventi: $E_1 = (0, 2, 0, 1)$, $E_2 = (5, 2, \alpha, \alpha)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare i valori di α per i quali esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono contemporanei.

b) Dati i due eventi $E_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $E_2 = (6, 4, 4, 4)$, consideriamo un sistema di riferimento che si muove rispetto al primo di moto traslatorio uniforme

Meccanica Analitica e Relativistica. 1.2.2010

1

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani ortogonali (O, x, z) di origine O ed asse verticale discendente z. In tale piano si muove un'asta di estremi AB, omogenea, pesante, di massa M e lunghezza L. Sia D il punto di tale asta che dista $\frac{L}{6}$ dall'estremo A. D e' obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z. L'asta e' soggetta oltre alla forza peso a due forze attive: $\underline{F}_1 = -kOD, k > 0$, $\underline{F}_2 = -kHA, k > 0$ ove H e' la proiezione ortogonale da A sulla retta parallela all'asse delle x e passate per il punto $(0, 2L)$ (vedi figura). Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema la quota z del punto D e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse z.

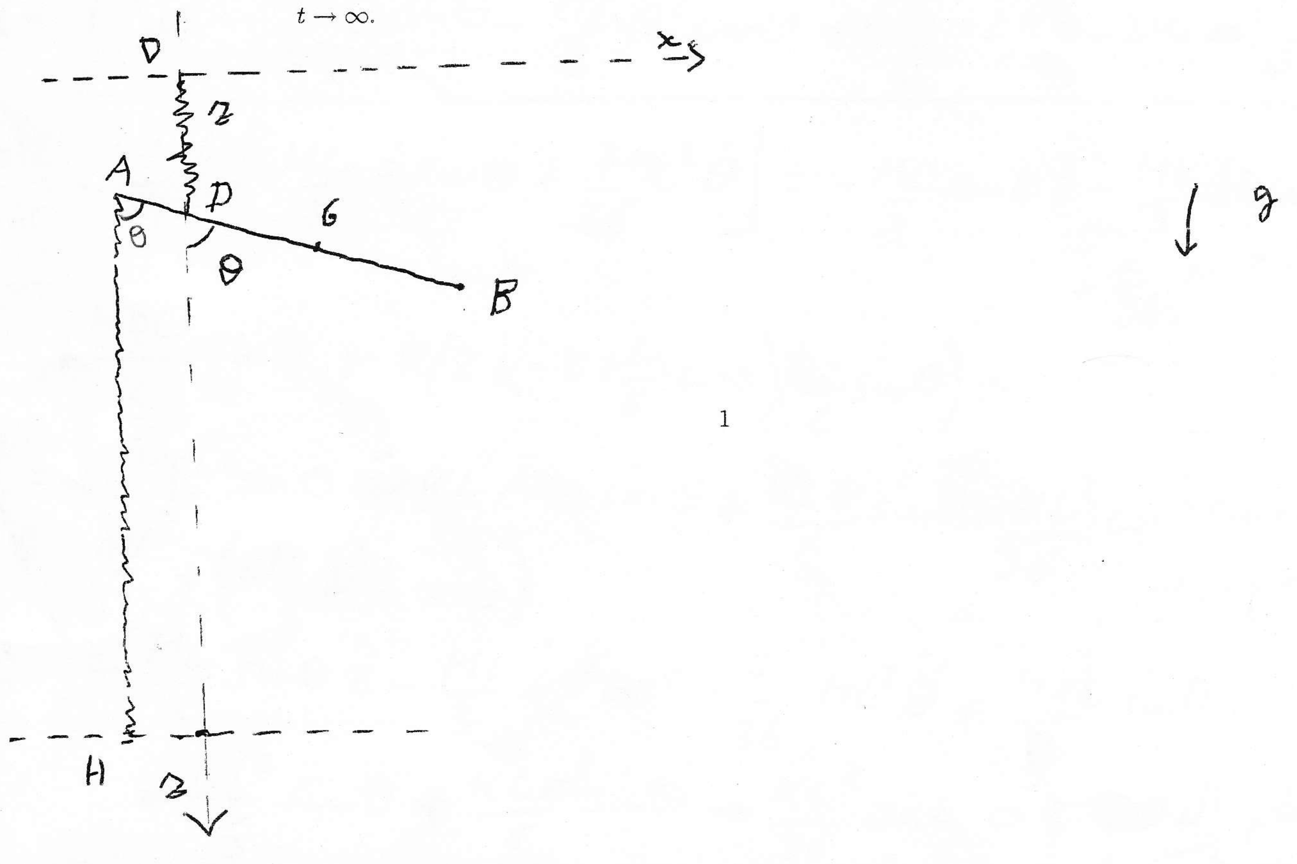
1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto. 8

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita'. 10

3) In questa domanda poniamo $L = 6, M = 1, g = 1, k = 10$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa. 6

2

Una particella relativistica di massa propria m, inizialmente ha una velocita' $v(0) = -\frac{c}{3}$ diretta come l'asse delle x ed e' soggetta ad una forza $F = Ae^{(-at)}, A, a > 0$ diretta anche essa come l'asse delle x. Trovare il valore della velocita' per $t \to \infty$. 6



Meccanica Analitica e Relativistica. Esonero del 12.1.2011 Compito B

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con x orizzontale e z verticale discendente. In tale piano si muove di moto traslatorio un anello circolare rigido di massa m, raggio R e centro C vincolato a scorrere senza attrito lungo un asse parallelo a quello delle x e passante per il punto D di coordinate $(0, 3R)$. Nel piano verticale si muove anche un'asta pesante rigida omogenea di massa M e lunghezza $L = R$, i cui estremi A, B sono vincolati a scorrere senza attrito lungo l'anello. Il sistema e' soggetto a tre forze attive: la forza peso e le due forze elastiche $\underline{F}_1 = -kDC$, $\underline{F}_2 = -kHG$, $k > 0$, ove con G indichiamo il punto mediano della asta ed H la proiezione ortogonale del punto G sull'asse delle x.

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema l'ascissa x del punto C e l'angolo θ che CG forma con l'asse delle z.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare del parametro $\frac{Mg}{kR}$.

3) In questa domanda poniamo $m = 1, M = 8, g = 1, k = 3, R = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

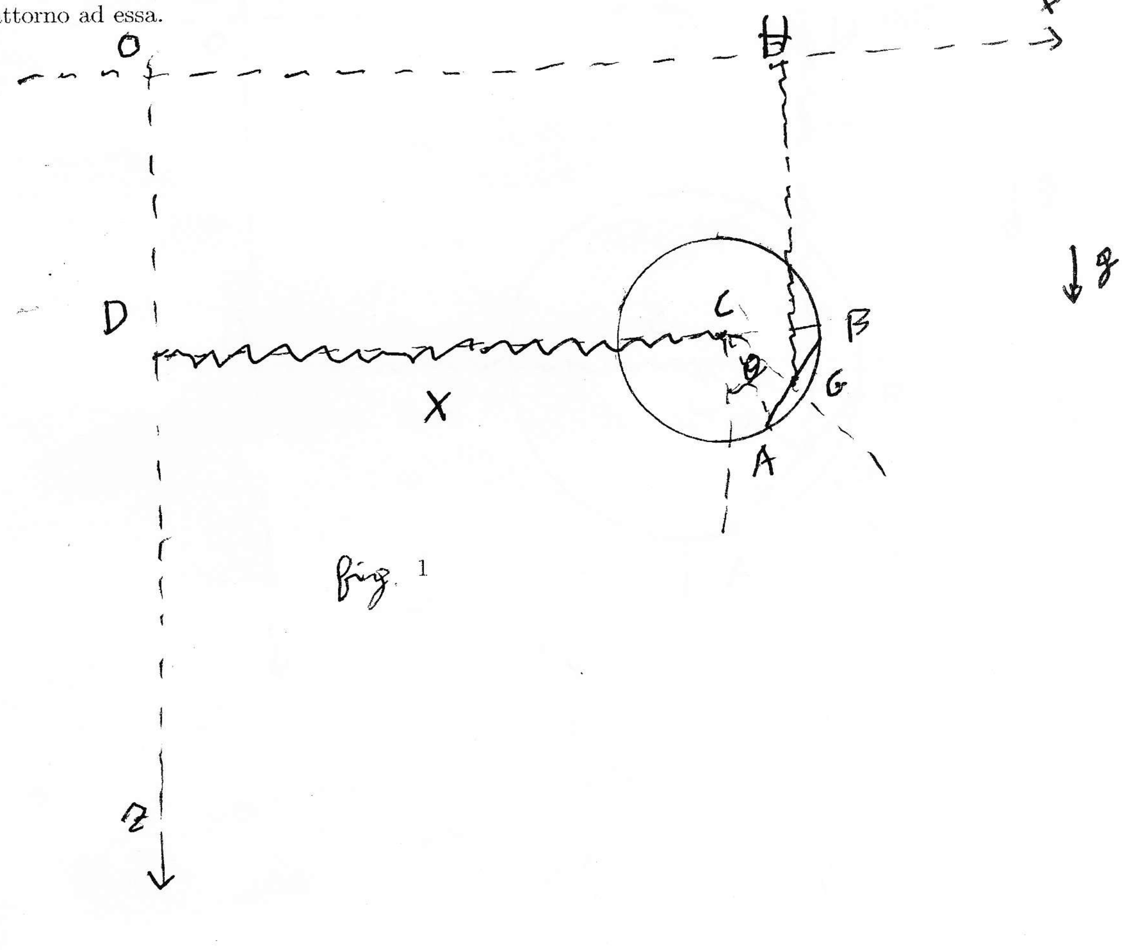


fig. 1