

## VI: Dipolo magnetico, correnti e induzione magnetica

### 1 Dipolo magnetico definizioni e proprietà

Definiamo il dipolo magnetico di una distribuzione di corrente stazionaria (ovvero con  $\nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$ ) e localizzata intorno alla posizione  $\mathbf{r}_c$  come:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Dimostrate che  $\mathbf{m}$  non dipende dalla scelta di  $\mathbf{r}_c$ . A questo scopo dimostrate che per una corrente localizzata a divergenza nulla (suggerimento per dimostrare la relazione seguente può essere utile calcolare la divergenza di  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)_\alpha \mathbf{J}(\mathbf{r})$  e usare il risultato ottenuto):

$$\int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Considerate ora il caso particolare in cui la corrente localizzata è quella di una spira chiusa piana, in cui circola una corrente  $I$ . Dimostrate che  $\mathbf{m}$  in questo caso è un vettore perpendicolare al piano della spira, orientato nella direzione data dalla regola della mano destra usando la direzione della corrente  $I$  e di modulo uguale a  $AI$  dove  $A$  è l'area della superficie piana sottesa alla spira.

Immergete ora le correnti localizzate in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}_0$ . Calcolate la coppia  $\mathbf{N}$  della forza di Lorentz agente sulla distribuzione di carica rispetto ad un punto  $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{N} = \int d^3r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_L(\mathbf{r})$$

Dove  $\mathbf{F}_L(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_0$  è la forza di Lorentz. Dimostrate che  $\mathbf{N}$  non dipende dalla scelta di  $\mathbf{r}_0$ .

Dimostrate che

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0.$$

A questo scopo dimostrate che per una corrente localizzata a divergenza nulla:

$$\int d^3r [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\alpha J_\beta(\mathbf{r}) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\beta J_\alpha(\mathbf{r})] = 0,$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  indicano due componenti cartesiane (suggerimento calcolate la divergenza di  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)_\alpha \mathbf{J}(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)_\beta$ ).

Infine considerate il caso in cui la distribuzione di corrente possa solo ruotare rigidamente su se stessa. In questo caso determinate le posizioni di equilibrio stabili e instabili del dipolo magnetico. Ricordando che il lavoro infinitesimo compiuto dal momento della forza in una rotazione infinitesima  $d\theta$  intorno ad un asse di rotazione  $\hat{\omega}$  è uguale a

$$dL_{av} = -d\theta \mathbf{N} \cdot \hat{\omega}$$

desumete che l'energia potenziale del dipolo è uguale a

$$E_{pot} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0.$$

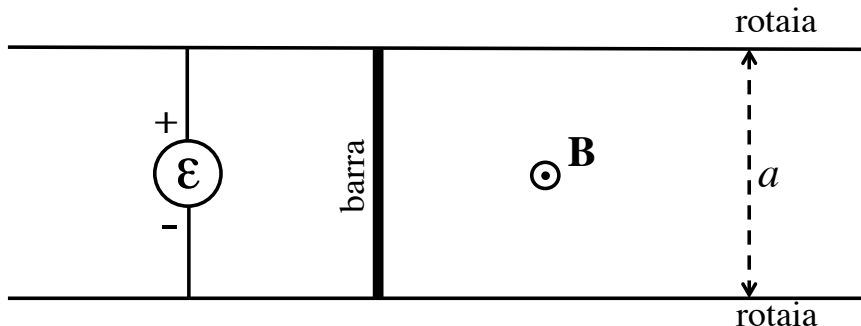
## 2 Resistenza di fili metallici

Considerate due fili rettilinei conduttori di sezione costante di area  $S$ , e di lunghezza  $L$ , con  $L \ll \sqrt{S}$ . Il primo filo è nella sua prima metà costituito da un metallo di conducibilità  $\gamma_1$  e nella seconda metà da un metallo di conducibilità  $\gamma_2$ . Nel secondo filo la conducibilità varia lungo il filo linearmente fra i valori  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Ovvero se il filo è orientato parallelo all'asse  $z$ , ed ha estremi in  $z = 0$  e  $z = L$ ,  $\gamma(z) = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)z/L$ . Calcolate la resistenza elettrica  $R$  dei due fili in funzione di  $S, L, \gamma_1, \gamma_2$ . Applicare una differenza di potenziale  $\Delta V$  ai due estremi dei fili, calcolate per i due casi: la densità di corrente elettrica  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , la variazione di campo elettrico lungo il filo  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e le eventuali cariche elettriche (di volume e di superficie) presenti lungo il filo.

## 3 Mutua induzione

Calcolate il coefficiente di mutua induzione  $M_{12}$  fra un solenoide toroidale di sezione circolare con  $N$  spire e un filo rettilieo passante per l'asse del toro. Considerate il caso in cui  $R \gg r$  dove  $r$  è il raggio della sezione circolare del solenoide e  $R$  la distanza fra il filo e il centro della sezione circolare.

## 4 Moto di una barra in campo magnetico



Una barra metallica di lunghezza  $a = 10$  cm, massa  $m = 80$  gr e resistenza  $R = 0.5$  ohm può muoversi senza attrito lungo due rotaie, mantenendo la sua orientazione perpendicolare alle rotaie (vedi figura). Le due rotaie hanno una resistenza trascurabile. Un generatore di tensione applica una differenza di potenziale  $\epsilon = 12$  V fra le due rotaie. La barra chiude il circuito in cui passa una corrente elettrica  $I(t)$ . Considerate inoltre trascurabile il coefficiente di auto induzione  $L$  del circuito. È presente infine un campo magnetico uniforme,  $B = 0.5$  T, perpendicolare al piano dove giace il circuito. All'istante iniziale  $t = 0$  la barra ha velocità nulla. Calcolate come varia la velocità della barra nel tempo,  $v(t)$ . In particolare dimostrate che per  $t \rightarrow \infty$  la velocità tende ad un valore limite costante  $v_\infty$  in un tempo caratteristico  $\tau$ . Trovate la legge oraria della velocità e calcolate numericamente i valori di  $v_\infty$  e  $\tau$ .

## 5 Spira ruotante

Una spira circolare piana conduttrice di raggio  $r$  è fatta ruotare da un motore con velocità angolare costante  $\omega$  intorno ad un suo diametro. La spira è caratterizzata da una resistenza  $R$  e da un coefficiente di autoinduzione  $L$ . La spira è immersa in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$  diretto perpendicolarmente all'asse di rotazione.

1. Calcolate la corrente indotta nella spira  $I(t)$
2. Calcolate l'energia dissipata per effetto Joule nella spira in un periodo di rotazione. Desumete il lavoro compiuto in un periodo di rotazione dal motore per mantenere la spira a velocità costante.
3. Utilizzando il risultato del primo esercizio, calcolate il dipolo magnetico della spira e momento della forza  $\mathbf{N}(t)$  agente sulla spira
4. Ricordando che il lavoro infinitesimo compiuto dal momento della forza in una rotazione infinitesima  $d\theta$  intorno ad un asse di rotazione  $\hat{\omega}$  è uguale a  $dL_{av} = -d\theta \mathbf{N} \cdot \hat{\omega}$ , desumete che la potenza istantanea  $P(t)$  erogata dal motore elettrico per mantenere la velocità costante è uguale a:

$$P(t) = \omega(\mathbf{m} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\omega}.$$

5. Integrando su un periodo  $P(t)$  calcolate il lavoro fatto dal motore in un periodo. Confrontate il risultato con quello ottenuto al punto due. Prima di analizzare il caso generale considerate inizialmente i due casi limite semplificati: ( $R \neq 0, L = 0$ ) e ( $R = 0, L \neq 0$ ). La potenza istantanea (non quella mediata sul periodo) coincide con la potenza istantanea dissipata in calore per effetto Joule? Commentate il risultato.

## 6 Spira in moto in campo magnetico

Considerate una spira elettrica quadrata planare rigida di lato  $a = 10$  cm e di massa  $m = 10$  gr, di resistenza  $R$  finita e di autoninduttanza  $L$  trascurabile che giace nel piano  $z = 0$  con i lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$ . Nella regione dello spazio con  $x > 0$  c'è un campo magnetico  $B = 1$  T lungo la direzione  $z$ , nel resto dello spazio il campo magnetico è nullo. La spira, che si muove senza attrito, si trova inizialmente nella regione senza campo magnetico ed è lanciata con velocità  $v = 1$  cm/s, parallela all'asse  $x$ , verso la regione dove il campo magnetico è finito.

1. Dite in quale regione dello spazio la velocità della spira non è costante.
2. Trovate l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale della velocità della spira, da questa ricavate l'equazione differenziale che descrive la variazione della velocità della spira in funzione della coordinata  $x$ . Calcolate la velocità finale della spira per  $t \rightarrow \infty$  per  $R = 50$  Ohm e per  $R = 5$  Ohm.
3. Ripetere il calcolo usando una spira a forma di triangolo equilatero di lato  $a$  con massa, velocità iniziale e resistenza identiche a quelle della spira quadrata. Orientate il triangolo nel piano  $z = 0$  con un lato parallelo all'asse  $y$  con una punta del triangolo che indica la direzione degli  $x$  positivi.

## 7 Coefficiente di autoinduzione del solenoide toroidale

Considerate un solenoide toroidale di sezione quadrata con lati di lunghezza  $a = 10$  cm due dei quali paralleli all'asse del toro. Supponete che il quadrato si trovi a distanza  $b = 1$  cm dall'asse e che il solenoide abbia  $M = 10000$  spire. Calcolate il coefficiente di autoinduzione  $L$  del solenoide. Calcolate l'energia immagazzinata nel solenoide se per le spire passa una corrente  $I = 1$  A. Dimostrate che l'energia ottenuta con la formula  $LI^2/2$  coincide con quella ottenuta con  $\int d^3r B(\mathbf{r})^2/(2\mu_0)$ .

## 8 Coefficiente di autoinduzione cavo coassiale



Considerate un cavo coassiale formato all'esterno da una treccia di fili conduttori assimilabili ad un cilindro metallico conduttore cavo di spessore trascurabile rispetto al suo raggio  $r_e = 2.5$  mm e di un filo interno (pieno) coassiale al cilindro cavo e di raggio  $r_i = 0.5$  mm. Realizzate un circuito mettendo in contatto da un capo del filo coassiale il cilindro esterno con quello interno, e dall'altro capo collegando il cilindro interno con quello esterno attraverso un generatore di tensione. Calcolate l'energia magnetica presente nel filo quando nel filo interno passa una corrente (costante nel tempo)  $I$  (prima di iniziare il conto dite come si ripartisce la corrente elettrica sulla sezione del filo). Usando la formula Energia =  $LI^2/2$ , calcolate il coefficiente di autoinduzione  $L$  per unità di lunghezza del cavo coassiale.