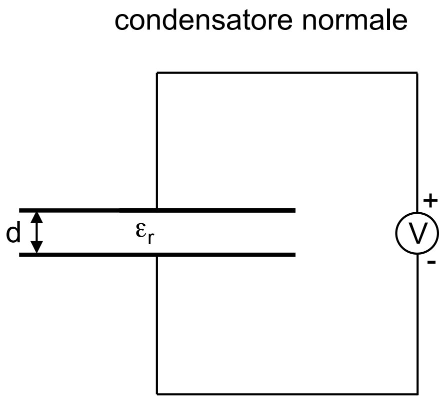
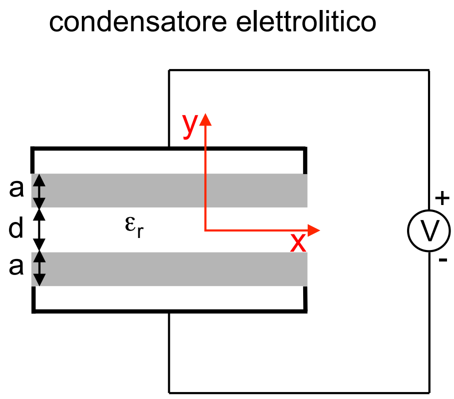
Esercizio di elettrostatica: condensatore elettrolitico





Considerate un condensatore piano di superficie S, con placche distanziate d, riempite di un materiale isolante di costante dielettrica ϵ_r, a cui si applica una differenza di potenziale V.

- Calcolate in funzione dei parametri (S, d, ϵ_r, V) la capacità del condensatore C, la carica superficiale libera sulla placca superiore σ , l'energia elettrostatica accumulata dal condensatore E.

Nei condensatori elettrolitici la distanza d fra le placche è estremamente piccola, dell'ordine di qualche nanometro (1 nm $= 10^{-9}$ m). Inoltre, per le placche si usano metalli porosi che permettono di avere una grande superficie impacchettata in un piccolo volume.

- Valori tipici di un condensatore elettrolitico sono: $d = 1$ nm, $S = 10$ m^2, $\epsilon_r = 10$, $V = 10$ V. Per questi parametri calcolate numericamente i valori di C, σ e E.

Durante il corso e per rispondere alle domande precedenti abbiamo assunto che la carica libera di superficie del metallo σ abbia uno spessore infinitesimo. In realtà gli elettroni di un metallo si ripartiscono su uno spessore di pelle finito a di qualche frazione di nanometro. In generale lo spessore finito a è trascurabile, ma non nei condensatori elettrolitici, dove tale spessore è comparabile alla separazione fra le placche. Per considerare gli effetti di questo spessore finito a assumete ora che la carica libera sulla placca del condensatore Q si ripartisca uniformemente nel volume di un parallelepipedo di base S e altezza a. Considerate una terna cartesiana centrata in mezzo alle due placche con l'asse y perpendicolare alle placche. Lo spessore di pelle a su cui si ripartisce la carica superficiale è molto più piccolo dello spessore delle placche metalliche (attenzione in figura lo spessore delle placche non è in scala), quindi ad una distanza $y = \pm(2a + d/2)$ ci troviamo all'interno del conduttore in una regione senza cariche libere. Data la geometria del condensatore il campo elettrico è parallelo alll'asse y e dipende solo dalla coordinata y, ovvero $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(y)\hat{\mathbf{y}}$.

- Calcolate in funzione y e dei parametri S, d, ϵ_r, Q, a, la componente del campo $E(y)$ per $-(2a + d/2) < y < (2a + d/2)$. Fate un grafico di $E(y)$ in funzione di y nella regione $-(2a + d/2) < y < (2a + d/2)$.

- Calcolate in funzione y e dei parametri S, d, ϵ_r, Q, a, il potenziale elettrostatico $V(y)$ per $-(2a + d/2) < y < (2a + d/2)$. Fate un grafico di $V(y)$ in funzione di y nella regione $-(2a + d/2) < y < (2a + d/2)$.

- Costatando che il potenziale ai capi del condensatore è uguale a $V = V(2a + d/2) - V(-2a - d/2)$. Calcolate la capacità del condensatore elettrolitico
$$C_{\text{eletr}} = Q/V$$
in funzione dei parametri S, d, ϵ_r, a

- Calcolate l'energia elettrostatica E_{eletr} accumulata nel condensatore usando la formula
$$E_{\text{eletr}} = \frac{1}{2}\int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})$$
Comparate E_{eletr} con l'energia spesa dal generatore per caricare il condensatore
$$E_{\text{gen}} = VQ/2 = C_{\text{eletr}}V^2/2$$
Dite quale delle due energie è facilmente misurabile.

- *Domanda facoltativa.* Se le energie E_{gen}, E_{eletr} non sono uguali discutete la ragione della differenza.

- Se $d = 1$ nm, $S = 1$ cm^2, $\epsilon_r = 10$, $V = 10$ V, e $a = 0.2$ nm calcolate numericamente i valori di C_{eletr}, E_{gen}, E_{eletr}, comparatele al caso precedente in cui lo spessore di pelle a è stato trascurato.

Ricordiamo che $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.

Esercizio di magnetismo

Un cilindro rigido di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 12$, ha raggio $R = 2.0$ cm, lunghezza $L = 30$ cm e ruota con velocità angolare costante $\omega = 2.0$ rad/s intorno al suo asse. Il cilindro è neutro e immerso in un campo magnetico uniforme di induzione magnetica $\mathbf{B}$ di modulo $B = 2.0$ T parallela all'asse di rotazione. Per effetto della rotazione si generano delle cariche di polarizzazione. Il campo magnetico generato dalla rotazione delle cariche di polarizzazione è trascurabile.

1. Calcolate il flusso del campo magnetico attraverso la superficie laterale del cilindro e le basi del cilindro.

2. In un dielettrico la polarizzazione $\mathbf{P}$ è indotta sia dalla presenza sia di una forza di Coulomb, ovvero di un campo elettrico, che dalla forza di Lorentz, ovvero di un campo magnetico, se il dielettrico si muove con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Quindi:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\chi[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})].$$

   Ricavate la relazione chiusa che lega $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$ ai campi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

3. Utilizzate questa relazione chiusa per calcolare la densità di carica di polarizzazione $\rho_p(\mathbf{r})$ interna al cilindro.

4. Dite su quali superfici del cilindro compare una densità di carica di superficie σ_p. Calcolatela.

5. Calcolare la carica totale di polarizzazione di volume.

6. Calcolare la carica totale di polarizzazione di superficie.

Ricordiamo che la divergenza di una campo $\mathbf{A}$ in coordinate cilindriche $(r_\perp, \theta, z)$ è uguale a

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp A_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$