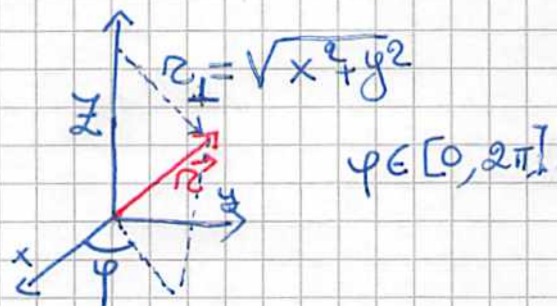
PREREQUISITI VETTORI

14:16 CABIBBO (FERMI
9:11 AULA III

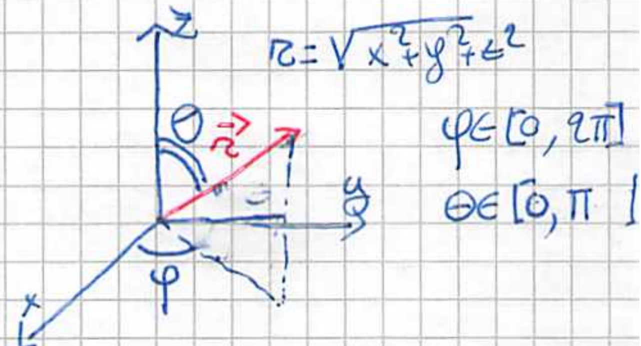
SISTEMA DI COORDINATE

$\vec{r} = (x, y, z)$ CARTESIANE

$(r_\perp, z, \varphi)$ CILINDRICHE



(r, θ, φ) POLARI



VERSORI

$\hat{x}$ = VETTORE UNITARIO LUNGO $\hat{x}$

$\hat{r}$ = VETTORE UNITARIO LUNGO $\vec{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$

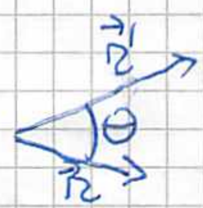
OPERAZIONI VETTORIALI

SOMMA DI VETTORI

$$\vec{r}'' = \vec{r} + \vec{r}' = (x+x', y+y', z+z')$$

PRODOTTO SCALARE

$$a = \vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy' + zz' = r\,r' \cdot \cos\theta$$



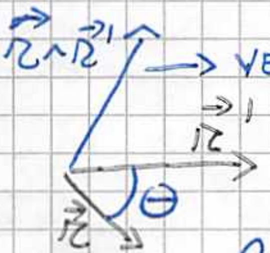
NORMA

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{r}\wedge\vec{r}' = (yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx')$$

$$= \mathrm{DET}\begin{pmatrix}\hat{x} & x & x'\\ \hat{y} & y & y' \\ \hat{z} & z & z'\end{pmatrix}$$

$=$ 

→ VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO DEFINITO DA $\vec{r}, \vec{r}'$

DIREZIONATO SECONDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA
(DITA INDICANO IL MOVIMENTO DEL PRIMO SUL SECONDO VETTORE
POLLICE INDICA DIREZIONE

$$|\vec{r}\wedge\vec{r}'| = |\vec{r}||\vec{r}'|\sin\theta$$

$$\vec{r}'\wedge\vec{r} = -\vec{r}\wedge\vec{r}'$$

INTEGRALI DI VOLUME

$$\int d^3 r \rightarrow \iiint dx\,dy\,dz$$ CARTESIANE

CILINDRICHE $\rightarrow \iiint r_\perp \, dr_\perp \, dz \, d\varphi$

SFERICHE $\rightarrow \int r^2 dr \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int d\varphi = \int r^2 dr \int_{0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int d\varphi$

$$= \int r^2 dr \iint \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ANGOLO SOLIDO}}}{d\Omega}$$

CARICHE ELETTRICHE

- DUE CLASSI $\nearrow$ POSITIVE (+)
  $\searrow$ NEGATIVE (−)

CARICHE DELLA STESSA CLASSE: (+, +) o (− −)
SI RESPINGONO

DI CLASSE DIFFERENTE: (+, −) o (−, +)
SI ATTRAGGONO

- UNITÀ DI CARICA: COULOMB

- CONSERVAZIONE DELLA CARICA:
  LA CARICA TOTALE DI UN SISTEMA ISOLATO È COSTANTE

- QUANTIFICAZIONE DELLA CARICA:

ALLA SCALA CORPUSCOLARE

e^-: ELETTRONE, GRANO DI ELETTRICITÀ NEGATIVA
p^+: PROTONE, GRANO DI ELETTRICITÀ POSITIVA

$$e \equiv |e^-| = p^+ = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ COULOMB} \quad [C]$$

$$m_p \sim 1860\, m_e$$

$$1\,gr \simeq N_A\, m_p \qquad N_A \simeq 6 \times 10^{23}$$
$$(1\,gr = N_A \cdot m_{^{12}C}/12)$$

ALLA SCALA DEL NOSTRO MONDO

$$\left.\begin{matrix} N_{e^-} \\ N_{p^+} \end{matrix}\right\} \sim N_A$$

$$\text{CARICA TOTALE} = (N_{p^+} - N_{e^-})\, e$$

$$|N_{p^+} - N_{e^-}| \ll N_p, N_e$$

DESCRIZIONE DELLA CARICA DI UN CORPO

AMPERE

SISTEMA MKSA

- CARICA PUNTUALE $\quad q \quad$ [COULOMB]
- DENSITÀ DI VOLUME $\quad \rho = \dfrac{\Delta q}{\Delta V} \quad$ [COULOMB/M^3]

PUÒ DIPENDERE DALLA POSIZIONE

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

CARICA NEL VOLUME INTORNO ALLA POSIZIONE $\vec{r}$

- DENSITÀ DI SUPERFICIE $\quad \sigma = \dfrac{\Delta q}{\Delta S} \quad$ [COULOMB/M^2]

- DENSITÀ LINEARE $\quad \lambda = \dfrac{\Delta q}{\Delta \ell} \quad$ [COULOMB/M]

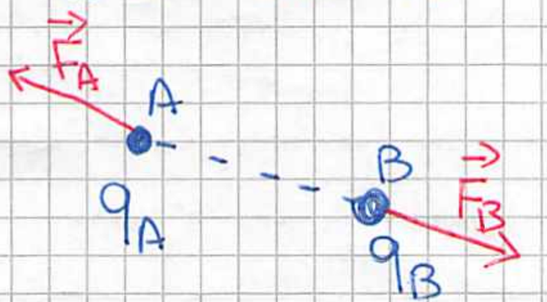
ELETTROSTATICA

CARICHE A RIPOSO (NON SI MUOVONO)

LEGGE DI COULOMB

INTERAZIONE FRA CARICHE A RIPOSO (FERME)

2 CARICHE PUNTUALI



$(q_A \cdot q_B > 0)$

$$\vec{F}_A = \underset{\text{SU A}}{\text{FORZA}} = \underset{K>0}{K} \underbrace{\frac{q_A \cdot q_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2}}_{\text{DECRESCE CON IL QUADRATO DELLA DISTANZA}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}}_{\hat{r}_{AB} = \text{VERSORE UNITARIO}}$$

- $\vec{F}_B$ = FORZA SU B = STESSA $A \leftrightarrow B$ $= -\vec{F}_A$

CARATTERE NEWTONIANO DELLA FORZA (PRINCIPIO AZIONE REAZIONE)

1 LEZIONE

- SIMILE FORZA GRAVITAZIONALE

$$\left(\vec{F}_A = -g \frac{M_A \cdot M_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} \quad M_A, M_B > 0 \text{, FORZA ATTRATTIVA}\right)$$

- K DIPENDE DAL SISTEMA DI UNITÀ

NEL MKSA q [COULOMB]

$$K = 8{,}9875 \times 10^{9} \left[Kg \frac{m}{s^2} \frac{m^2}{C^2} \right] \simeq 9 \times 10^{9} \text{ MKS}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 \equiv \text{PERMEATTIVITÀ DEL VUOTO} = 8{,}854 \times 10^{-12} \text{ MKS}$$

[NEL CGS
$K = 1 \Rightarrow q$ [STATCOULOMB]]

- RAPPORTO FRA FORZA GRAVITAZIONALE / COULOMBIANA

2 PROTONI

g IN MKS — MASSA PROTONE Kg

$$|\vec{F}_g| = \frac{6{,}7 \times 10^{-11} (1{,}7 \times 10^{-27})^2}{r^2} \text{ MKS} = \frac{2{,}9 \times 10^{-64}}{r^2}$$

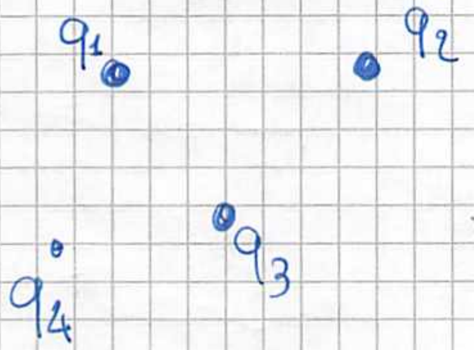
K IN MKS — e^- IN COULOMB

$$|\vec{F}_c| = 9 \times 10^{9} (1{,}6 \times 10^{-19})^2 = \frac{2{,}3 \times 10^{-28}}{r^2}$$

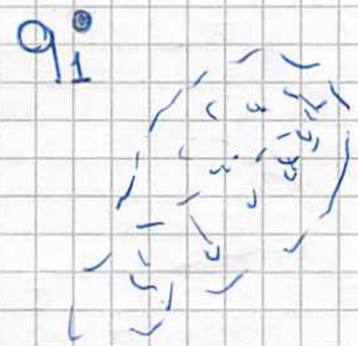
$$|\vec{F}_c| \gg |\vec{F}_g|$$

- ADDITIVITÀ

LA FORZA FRA DUE CARICHE NON È MODIFICATA DALLA PRESENZA DI ALTRE



$$\vec{F}_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{m=2}^{n} \underbrace{\frac{q_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|}}_{\text{VETTORE}}$$



DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA $\rho(\vec{r})$

[COULOMB

CARICA NEL VOLUMETTO CENTRATO IN $\vec{r}$

$$\vec{F}_1 = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \underbrace{\frac{d^3r\, \rho(\vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|}}_{\text{VETTORE}}$$

CAMPO ELETTRICO (VALIDO SOLO NEL CASO STATICO)

$$\underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{VETTORE CHE DIPENDE DALLA POSIZIONE CAMPO VETTORIALE}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

- CAMPO ELETTRICO LINEARE IN $\rho(\vec{r})$

$$\left[\ \rho_{TOT}(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r}) \qquad \vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})\ \right]$$

- FORZA SU UNA CARICA PUNTIFORME $\vec{q}$ IN $\vec{r}$ (SE $\rho(\vec{r}\,')$ IMPERTURBATA)

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r})$$

(NELLA MATERIA (CONDUTTORI DIELETTRICI) LA PRESENZA DI q PUÒ ALTERARE $\rho(\vec{r}\,')$, IN QUESTO CASO

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}$$
)

ESEMPIO CAMPO DI UNA DISTRIBUZIONE PIANA DI CARICA UNIFORME INFINITA

σ = DENSITÀ SUPERFICIALE = $[C/m^2]$

PIANO DI CARICA $z=0$

$$\int d^3r'\rho(\vec{r}')\ldots \rightarrow \int dx'dy'\,\sigma \ldots \quad \text{CON } z'=0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$E_x(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}dy'\,\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$x-x'=x''$

$y-y'=y''$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dy''\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dx''\,\frac{x''}{\left[x''^2+y''^2+z^2\right]}}_{=0} = 0$$

$=0$ PERCHE' $\int_{-\infty}^{+\infty}dx''f(x'')=0$ SE $f(x'')=-f(x'')$

$$E_x(\vec{r})=0$$

STESSA RAGIONE

$$E_y(\vec{r})=0$$

CAMBIO DI VARIABILE GIÀ FATTO

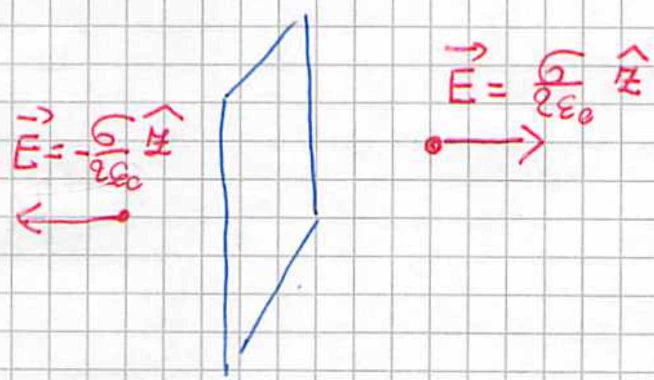
$$E_z(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx''dy'' \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(x''^2+y''^2+z^2)^{3/2}}$$

$$r_\perp = \sqrt{x''^2+y''^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r_\perp dr_\perp \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r_\perp^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r_\perp^2+z^2}} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[0 - \frac{1}{|z|} \right] = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|}$$



SI PUÒ FARE SENZA INTEGRALI?

SI CON

-> SIMMETRIE

+

-> TEOREMA DI GAUSS

PER TEOREMA DI GAUSS:

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

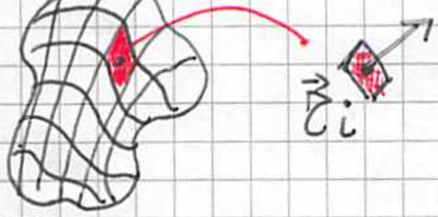
CAMPO VETTORIALE — ELEMENTO DI SUPERFICIE ORIENTATA INTORNO A $\vec{r}$ (VETTORE)

$$\phi_S(\vec{C}) \equiv \int_S d^2\vec{a} \cdot \vec{C}(\vec{r}) =$$

PRODOTTO SCALARE

SUPERFICIE ORIENTATA (NON NECESSARIAMENTE PIATTA)

ORIENTATA = QUALE FACCIA (SE CHIUSA CONVENZIONALMENTE FACCIA ESTERNA)



SE GLI ELEMENTI SONO SUFFICIENTEMENTE PICCOLI:

1) POSSIAMO ASSIMILARLO A PIATTO

⇓

VERSORE ⊥ A SUPERFICIE $\hat{n}_i$ ORIENTATO COME LA SUPERFICIE

$$\vec{a}_i = \hat{n}_i \, a_i$$

a_i = AREA DELL'ELEMENTO

2) SULL'AREA i IL CAMPO COSTANTE

$$\phi_S(\vec{C}) = \sum_i \vec{a}_i \cdot \vec{C}(\vec{r}_i) = \sum_i |\vec{a}_i| \, |\vec{C}(\vec{r}_i)| \cos\theta_i$$

PRODOTTO SCALARE

ANGOLO FRA $\vec{n}_i$ E $\vec{C}(\vec{r}_i)$

PROPRIETÀ

- $\Phi_{S_1+S_2}(\vec{C}) = \Phi_{S_1}(\vec{C}) + \Phi_{S_2}(\vec{C})$
- $\Phi_S(\vec{C}_1 + \vec{C}_2) = \Phi_S(\vec{C}_1) + \Phi_S(\vec{C}_2)$

ESEMPIO DI FLUSSO

PORTATA DI UN FIUME

PORTATA = VOLUME D'ACQUA (m^3) CHE PASSA PER UNITÀ DI TEMPO ATTRAVERSO UNA SEZIONE TRASVERSALE

$= [m^3/s]$

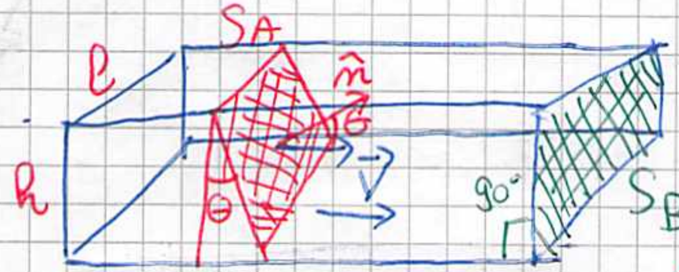
2ª LEZIONE

[IL PO 1540 m^3/s]

$$\text{PORTATA} = \underset{\substack{\vec{S}\\ \text{SEZIONE TRASVERSALE}\\ \text{(ORIENTATA VERSO LA FOCE)}}}{\Phi_S}(\underbrace{\vec{v}}_{\text{CAMPO DI VELOCITÀ}}) = \int_S \underbrace{d^2\vec{a}}_{[m^2]} \cdot \underbrace{\vec{v}(\vec{r})}_{[m/s]} = [m^3/s]$$

- SE ACQUA INCOMPRIMIBILE (E NON EVAPORA, NON AFFLUENTI) IN REGIME STAZIONARIO (NON DIPENDE DAL TEMPO) FLUSSO È COSTANTE (INDIPENDENTE DALLA SEZIONE)

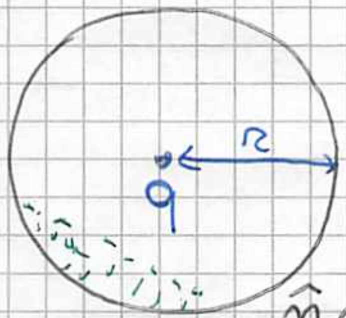
VERIFICA NEL CASO $V(\vec{r})$ = COSTANTE



$$\Phi_{S_A}(\vec{v}) = \overbrace{\ell\,\frac{h}{\cos\theta}}^{a}\ \overbrace{v\cos\theta}^{\hat{n}\cdot\hat{v}} = \Phi_{S_B}(\vec{v}) = h\cdot\ell\ v\ \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{1}$$

FLUSSO DI $\vec{E}$ SU UNA SUPERFICIE CHIUSA

TEOREMA DI GAUSS



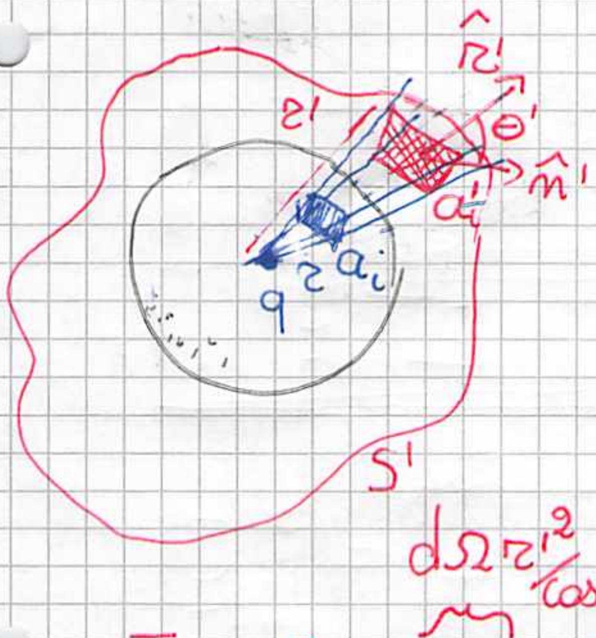
CARICA PUNTUALE q AL CENTRO DI UNA SUPERFICIE SFERICA CENTRATA IN q

$\hat{n} \parallel \vec{E}$ SULLA SFERA ($\cos\theta_i = 1$)

$$\Phi_{SFERA}(\vec{E}) = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{SUPERFICIE}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}_{|\vec{E}| \text{ SULLA SUPERFICIE}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

→ RISULTATO INDIPENDENTE DAL RAGGIO (GRAZIE AL FATTO CHE $|E| \propto \frac{1}{r^2}$)

È ANCHE INDIPENDENTE DALLA FORMA DELLA SUPERFICIE?



$$\Phi_{a_i}(\vec{E}) = a_i \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \overset{1}{\overset{\parallel}{\cos(0)}} =$$

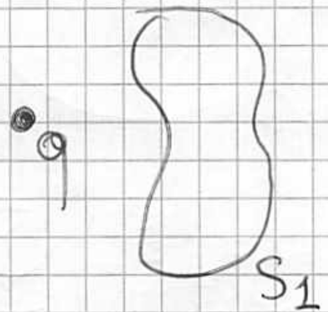
$$= \underbrace{d\Omega}_{\substack{\text{ANGOLO SOLIDO} \\ \frac{a_i}{r^2}}} \frac{1}{4\pi}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{a'_i}(\vec{E}) = \overbrace{a'_i}^{d\Omega\, r'^2/\cos\theta'} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\cos(\theta') = d\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

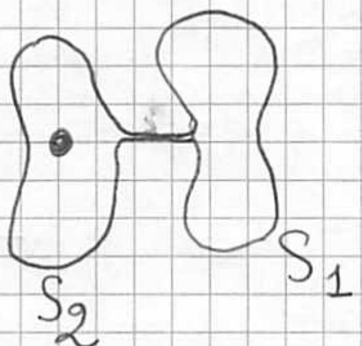
$$\oint_{SFERA}(\vec{E}) = \oint_{S'}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

S': SUPERFICIE CHIUSA ARBITRARIA

CARICA ALL'ESTERNO DELLA SUPERFICIE



$$\oint_{S_1}(\vec{E}) = ?$$



$$\oint_{S_1+S_2}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \oint_{S_1}(\vec{E}) + \oint_{S_2}(\vec{E})$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0} + \oint_{S_2}(\vec{E})$$

$$\oint_{S_1}(\vec{E}) = 0$$

PIU CARICHE PRESENTI $\{q_i\}_{i=1,\dots,N}$

$$\underbrace{\vec{E}_{TOT}}_{\text{CAMPO TOTALE}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{E}_i}_{\text{CAMPO GENERATO DALLA CARICA } i}(\vec{r})$$

$$\oint_S(\vec{E}_{TOT}) = \oint_S\left(\sum_i \vec{E}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \oint_S(\vec{E}_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \{q_i \text{ INTERNA A } S\}}}^{N} q_i/\varepsilon_0$$

$\Downarrow$

TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i}^{\text{INTERNE A } S} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int d^3 r \, \rho(\vec{r})}_{\text{VOLUME CONTENUTO IN } S}$$

LEMMA DAL TEOREMA

È POSSIBILE MANTENERE IN EQUILIBRIO <u>STABILE</u> UNA CARICA PUNTUALE IN UNA REGIONE DELLO SPAZIO SENZA CARICHE?

$\vec{r}_e$ POSIZIONE DI EQUILIBRIO PER CARICA q

1) $\vec{F}(\vec{r}_e) = \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_e)}_{\text{CAMPO ELETTRICO GENERATO DA TUTTE LE CARICHE TRANNE } q} \cdot q = 0 \qquad \vec{E}(\vec{r}_e) = 0$

2) SE SPOSTO LA CARICA DA $\vec{r}_e$ LA FORZA DEVE RISPINGERLA IN $\vec{r}_e$

$q > 0$

$\Rightarrow \Phi_S(\vec{E}) < 0$ MA PER GAUSS

$\Phi_S(\vec{E}) = 0 \Rightarrow$ NON ESISTE POSIZIONE DI EQUILIBRIO